S. 1802. C. 60.

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

TOMUS XIII.

PRAECEDIT HISTORIA EJUSDEM ACADEMIAE
AD ANNOS MDCCXCV et MDCCXCVI.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARUM MDCCCXXVII.

?1802?

This is dated between 1798 and 1802. See volume XV p. 89
cm Gokce
4/6/92

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

TABLE DE MATIERES.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
ANNÉES MDCCXCV et MDCCXVI.

Page

I. Evènemens mémorables:
- I. Visite de LEURS ALTESSES IMPÉRIALES MESDAMES LES GRANDES - DUCHESSES 3
- II. Visite de SA MAJESTÉ le Roi de Suède , ... 4

II. Changemens arrivés dans l'Académie:
- I. Membres décédés 5
- II. Nouvelles réceptions 10
- III. Promotions 14

III. Gratifications et récompenses:
- I. Possessions en Tauride accordées à Mr. Pallas 14
- II. Pension viagère à Mr. Krafft . . . . . ibid.
- III. Pension académique à Mr. Schanguine . . . . . ibid.
- IV. Montre d'or garnie de brillans à Mr. Roumovski 15

IV. Présens faits à l'Académie:
- I. Pour la Bibliothèque 15
- II. Pour le Cabinet d'Histoire naturelle 21
- III. Pour le Cabinet de curiosités 23
- IV. Pour le Médailler et le jardin botanique 24

V. Mémoires et autres ouvrages manuscrits présentés à l'Académie 25

* *

Page

VI. Observations, expériences et notices intéressantes faites et communiquées à l'Académie:

I. Sur une terre inconnue dans le Spath pesant 29
II. Sur deux Manuscrits de la Bibliothèque de Zaluski . . . . . ibid.
III. Sur la dépuration de l'éther sulfurique 30
IV. Sur la décomposition du tartre par le muriate de chaux . . . . ibid.
V. Sur la vitesse des vibrations du son 31
VI. Sur les ossemens d'un animal inconnu trouvés près d'Azof 32

VII. Rapports présentés et lus dans les Conférences académiques:

I. Sur un télégraphe nouveau 33
II. Sur un projet de diriger les balons aërostatiques 34
III. Sur le projet d'une écluse au-pas de Trollhätta et d'un pont sur la riviere Götha-Elf 35
IV. Sur une machine pour mâter les vaisseaux . . . . . ibid.
V. Sur la trisection d'angle par Mr. Pizzati 36
VI. Sur un mouvement prétendu perpétuel 37
VII. Sur un enduit pour la vaisselle de cuisine 39
VIII. Sur la trisection de l'angle, par Mr. le Lieutenant Tychkévitch . . 40
IX. Premier rapport de Mr. Pallas 41

VIII. Leçons publiques 43

IX. Ouvrages publiés par l'Académie 44

X. Prix adjugés 45

XI. Extraits des mémoires contenus dans ce volume:

I. Classe de Mathématique et de Physico-Mathématique 51
II. Classe de Physique 64
III. Classe d'Astronomie et de Météorologie. 73

NOVA ACTA

ACADEMIAE SCIENTIARUM IMPERIALIS

TOMUS XIII.

MATHEMATICA ET PHYSICO-MATHEMATICA.

Pag.

Leonh. Euleri. Exemplum quarundam memorabilium aequationum differentialium, quas adeo algebraice integrare licet, etiamsi nulla via pateat variabiles a se invicem separandi. 3

—— . De variis modis numeros praegrandes examinandi, utrum sint primi nec ne? 14

—— . Resolutio formulae Diophanteae $ab(maa+nbb) = cd(mcc+ndd)$ per numeros rationales. . . 45

—— . Solutio problematis mechanici. 64

Nicolai Fuss. De motu baculi super plano inclinato, cui insistit, descendentis. 70

—— . Examen théorétique des revêtemens à dos incliné et des revêtemens à assises inclinées, proposés par quelques auteurs de Fortification. . . 80

Pag.

Joh. Trembley. Recherches sur les équations linéaires aux différences partielles du troisième degré. . . . 101

Sim. Gourief. Essai de démontrer rigoureusement un théorème fondamental des équations de condition de la différentielle des fonctions à plusieurs variables et du calcul des variations. 154

Nicolai Fuss. De Polygonis symmetrice irregularibus circulo simul inscriptis et circumscriptis. 166

F. T. Schubert. De evolutione sectionum cylindri. . . . 190

C. F. Kausler. Solution de quelques problèmes remarquables de l'Analyse indéterminée. 205

—— Nova demonstratio theorematis, nec summam, nec differentiam duorum biquadratorum biquadratum esse posse. 237

—— Nova demonstratio theorematis, nec summam, nec differentiam duorum cuborum cubum esse posse. 245

PHYSICA.

Pag.

T. Lowitz. Methodus nova potassinum carbonicum plene saturatum obtinendi, adjectis novis observationibus potassini acido carbonico imperfecte satiati naturam spectantibus. 257

B. F. J. Hermann. Déscription de la célébre mine de Zméof, aux monts d'Altaï, en Sibérie. 275

J. T. Kölreuter. Mirabil. Jalaparum hybridarum ulterius continuata descriptio. 305

Joh. Lepechin. Cheiranthus Tauricus. 336

B. F. J. Hermann. Déscription d'une nouvelle mine de cuivre nommée Achirite. 339

Sevastianof. Déscription d'une nouvelle espèce de Canard et d'une variété de l'huitrier, qui se trouvent dans le Cabinet d'Histoire naturelle de l'Académie Impériale des Sciences. 346

B. F. Hermann. Rémarques sur les différentes méthodes de rendre le fer malléable. 352

Sevastianof. Déscription de l'Acarauna longirostris, nouveau genre de poisson, appartenant à l'ordre des torachiques, et qui se trouve dans le Musée de notre Académie. 357

Pag.

N. Ozeretskovski. De ossibus ligno inclusis. 367

—— De speciebus systematicum genus Trichechi constituentibus. 371

Basil. Severguine. Distribution méthodique des pierres de roche agrégées. 376

—— Notice sur une nouvelle variété de Spath de plomb blanc. 392

—— Notice sur l'oxide de fer en forme d'aiguilles, qui se trouve sur les améthystes de l'isle de Kija en Onega. 395

ASTRONOMICA ET METEOROLOGICA.

Pag.

Maur. Henry. Observations de Venus, faites à l'observatoire de l'Académie IMPÉRIALE de St. Pétersbourg, vers le tems de la plus grande digression occidentale de cette planète, qui a eu lieu en Mai 1798. 399

Steph. Rumovski. Meditatio de figura telluris exactius cognoscenda. 407

F. T. Schubert. Supplementum ad theoriam lunae Eulerianam. 418

Maur. Henry. Passage de Mercure sur le soleil du 7 Mai 1799. 463

W. L. Krafft. Essai sur la méthode de trouver la latitude sur mer par les hauteurs simultanées de deux astres. 477

Maur. Henry. Sur l'occultation de ε des gemeaux du 8 Août 1798. 494

W. L. Krafft. Supplément au mémoire sur la reduction des distances lunaires. 517

F. S. Schubert. Sur les passages de Mercure sur le soleil, qui auront lieu dans le dix-neuvième siècle. Première partie. 529

P. Inochodzof. De relativa nonnullorum locorum elevatione, in quibus observationes barometricae ac thermometricae sunt institutae. 555

Pag.

J. A. Euler. Extrait des observations météorologiques faites à St. Pétersbourg en 1796. 565

—— Extrait des observations météorologiques faites à Moscou en 1795 par Mr. Stritter. 583

—— Extrait des observations météorologiques faites à St. Pétersbourg en 1796. 593

—— Extrait des observations météorologiques faites à Moscou en 1796 par Mr. Stritter. 609

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DES

SCIENCES.

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

ANNÉES MDCCXCV ET MDCCXCVI.

I.

Evènemens mémorables.

I. Visite de LEURS ALTESSES IMPÉRIALES Mesdames les Grandes-Duchesses.

La période de deux ans, dont nous nous proposons de rendre compte dans ce volume, fournit deux évènemens aussi mémorables que flatteurs pour l'Académie. Le premier, qui arriva le 26 Août 1795, fut la visite dont LEURS ALTESSES IMPÉRIALES, Mesdames les Grandes-Duchesses ALEXANDRA PAVLOVNA, HELENA PAVLOVNA, MARIA PAVLOVNA et EKATHERINA PAVLOVNA, accompagnées de S. E. Madame la Comtesse *de Lieven*, Dame d'honneur de S. M. I. et de quelques autres dames de Leur suite, honorèrent le musée académique. Mr. de Bakounin, Gentilhomme de la chambre de S. M. I. et directeur en fonction de l'Académie, et plusieurs Académiciens s'empressèrent à montrer et à expli-

quer à LEURS ALTESSES IMPÉRIALES tout ce qui dans cette riche collection pouvoit intéresser ces augustes Princesses, Lesquelles, après avoir tout examiné avec beaucoup d'attention, se retirèrent fort satisfaites et temoignèrent leur contentement de la manière la plus gracieuse.

II. Visite de S. M. le Roy de Suède.

L'autre évènement mémorable, dont nous ayons à faire mention, est aussi une visite dont l'Académie se trouva infiniment flattée. S. M. le Roy de Suède, GUSTAVE ADOLPHE et S A. R. Mgr. le Duc de Sudermanie, le premier sous le nom de Comte de *Haga*, le second sous celui de Comte de *Vasa*, honorèrent, le 18 Août 1796, le musée académique de leur présence, pour voir les diverses collections de raretés des trois regnes de la nature et les autres objets de curiosités, d'arts, d'antiquités, etc. qu'on y trouve rassemblés. Mrs les Académiciens y furent appellés et s'y rendirent avec empressement, tant pour présenter leurs hommages à ces illustres hôtes, que pour Leur expliquer les objets de curiosité les plus remarquables que l'Académie possède. Plusieurs d'entr' eux se rappellerent avec émotion, d'avoir rendu, il y a 19 ans, les mêmes devoirs, et dans le même lieu, à l'auguste père de Sa Majesté, le Roy GUSTAVE III. de glorieuse mémoire, qui, sous le nom de Comte de *Gothland*, avoit aussi daigné illustrer de sa présence ce même musée et tous les différens départemens de l'Académie.

II.

Changemens arrivés dans l'Académie.

I. Membres décédés.

L'Académie a eu, vers la fin de l'année 1796, la douleur de rayer de sa liste des membres honoraires un nom qui la dé-

coroit depuis vingt ans et qui étoit cher à la patrie, celui de l'immortel Comte Pierre Alexandrovitch Roumäntzof-Zadunaïski, Feld-Maréchal général. Sénateur, Gouverneur-général de Kiev, Tchernigof et Novgorod-Severski, Lieutenant-Colonnel du régiment des gardes d'Ismaïlof, Chef du régiment de Grenadiers de la petite Russie et Chevalier des ordres de St. André, de St. Alexandre Nevski; de St. George et de St. Vladimir de la 1re Classe, de l'aigle noir et de Ste. Anne. Ce heros, dont la mort fut regardée par la Russie reconnoissante comme une calamité publique, avoit été reçu, par acclamation, membre honoraire de l'Académie, le jour de son jubilé semi-seculaire (1776), avec plusieurs autres Seigneurs que les Sciences révéroient depuis longtems comme leurs protecteurs les plus zélés.

Outre cette perte, qui en fut une pour l'état entier, l'Académie s'est vu enlever par la mort, dans le courant des années 1795 et 1796, dix de ses membres, sçavoir: deux Académiciens effectifs; deux membres sortis de cette classe pour entrer dans celle des honoraires regnicoles; deux membres honoraires externes qui jadis avoient été Académiciens ordinaires; un associé étranger et trois membres correspondans. Tous ces savans ayant tenu à l'Académie par les liens d'une association plus ou moins étroite et lui ayant tous rendu des services, ils ont des droits sur sa reconnoissance et méritent que leurs noms restent consignés dans cette histoire.

Mr. *Michel de Verevkin*, Conseiller d'Etat actuel, décéda à sa terre de Michaïlowo, près de la ville de Klin, le 21 Mars 1795. Madame la Princesse de Daschkof le fit recevoir en 1782 au nombre des correspondans regnicoles et le gratifia en 1784 de la pension académique de 200 Roubles.

Mr. *Jean Sievers*, Hanovrien, cy-devant Apothicaire à Irkoutzk, mourut le 6 Avril 1795. Déstiné à faire un voyage en Boukharie et au Thibet, et doué de toutes les qualités qui font le bon observateur: d'une sagacité rare, d'un zéle ardent,

d'une patience à toute épreuve et de connoissances très étendues en histoire naturelle, surtout en Botanique: l'Académie, qui l'avoit reçu le 5 Mars 1795 au nombre de ses correspondans regnicoles pouvoit se promettre les plus grands avantages de cette association, et des services signalés d'un naturaliste prêt à parcourir des contrées si fertiles et si peu connues, lorsqu'à la veille de son départ une maladie d'esprit, un dégoût prématuré de la vie le porta à en abrêger le cours. Le Tome X. des *Nova Acta* contient un mémoire posthume de Botanique de feu Mr. Sievers, auquel Mr. le Conseiller d'Etat et Chevalier Pallas avoit mis la derniere main.

Mr. *Nicétas Socolof*, Docteur en Médecine, Conseiller de Cour, ancien Académicien pour la Chymie et membre de l'Académie Russe, mourût à Moscou le 7 Avril 1795. Il fut un des élèves de l'Académie et accompagna Mr. Pallas dans son expédition, en quatité d'étudiant. Après son retour de cette expédition l'Académie l'envoya achever ses études à Strasbourg, où il prit le grade de Docteur en Médecine. De retour à St. Pétersbourg, l'Académie le reçut au nombre de ses Adjoints en 1783. En 1784 il fut nommé Conseiller de Cour et en 1787 Me. la Princesse Daschkof le fit recevoir au nombre de Académiciens ordinaires. Sa santé s'étant dérangée par les travaux chymiques, auxquels son état l'appelloit, il se vit obligé de demander sa dimission en 1792. L'Académie le plaça au nombre de ses associés libres regnicoles et lui assûra l'expectative à la premiere pension académique qui viendroit à vaquer; mais il ne vecut pas assez pour en obtenir la jouissance. Il alla d'abord fixer sa demeure à Kalouga et de là il se rendit à Moscou, où il termina ses jours agé de 48 ans.

Mr. *Basile Krestinin*, Citoyen d'Archangel et Correspondent de l'Académie Impériale des Sciences, décéda dans cette ville le 5 Mai 1795 dans un äge fort avancé. Il étoit l'auteur de divers ouvrages approuvés par l'Académie et imprimés séparément, ainsi que de plusieurs articles intéressans insérés dans

les calendries historiques et géographiques et dans l'ouvrage périodique intitulé: Новыя Ежемѣсячныя Сочиненія. Reçu au nombre des Correspondans en 1786 et gratifié à différentes reprises de récompenses pécuniaires, il obtint enfin en 1791 la pension académique de 200 Roubles, dont il a joui jusqu'à sa mort.

Mr. *Chrétien Théophile Kratzenstein*, ancien Académicien de St. Pétersbourg, Doyen de la faculté de Médecine à l'Université de Copenhague et Conseiller de Justice de S. M. le Roy de Danemark, mourût le 6 Juillet 1795, probablement des suites de la frayeur que lui avoit causé le grand incendie qui du 7 au 9 Juin de la même année a consumé, avec toute la partie occidentale de la ville de Copenhague, sa maison, ses instrumens et sa Bibliothèque. Le défunt étoit né à Wernigerode en 1723. Il fut reçut Académicien ordinaire pour la Mécanique en 1748 et arriva à St. Pétersbourg au mois de Juillet de cette année. Il quitta l'Académie au mois d'Août 1753, après avoir enrichi les premiers volumes des *Novi Commentarii* de plusieurs mémoires aussi ingénieux qu'intéressans. En lui accordant la dimission demandée l'Académie le plaça au nombre de ses membres externes. Aussi en cette qualité il lui envoya de tems en tems des mémoires estimables et remporta en 1780 le prix pour la question concernant l'imitation des voyelles et en dernier lieu (en 1794) le prix proposé pour la question sur l'état magnétique de la terre.

Mr. *Alexis Kononof*, Professeur extraordinaire de Mathématique de l'Académie Impériale des Sciences, mourût à St. Pétersbourg le 9 Octobre 1795, agé de 29 ans. Elevé au Gymnase académique au fraix de la couronne, il s'y distingua par sa conduite reglée et par son appliquation à l'étude, que des succès rapides couronnérent, au point que l'Académie le choisit en 1785, avec trois autres étudians, égalément élèves du Gymnasie, pour l'envoyer achever ses études à l'Université de Göttingue, d'où il revint en 1789, à la fuite d'un rappel de

l'Académie et muni des témoignages les plus favorables de ses professeurs. Après avoir subi un examen rigoureux, dont il se tira avec honneur, l'Académie le jugea digne de place d'Adjoint pour les Mathématiques, qui lui fut conférée encore la même année. En 1794 il fut employé à donner un cours public de physique expérimentale, dont il s'acquitta à la satisfaction de l'Académie et de son Chef qui, au commencement de l'année suivante (1795), l'avança au grade de Professeur extraordinaire. La même année il donna un second cours de Physique et mourût peu de tems après l'avoir achevé, dans la 29me année de son âge. Il se trouve un mémoire de Physico-Mathématique de sa composition dans le VII. Volume des nouveaux Actes de l'Académie.

Mr. *Jean George Zimmermann*, Docteur en Médécine, Conseiller de Cour et Médécin de corps de S. M. Britannique, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir de la 3me classe et membre de plusieurs Académies, mourût à Hanovre le 7 Oct. 1795 dans sa 67me année. Il étoit né à Brugg en Suisse et fut reçu au nombre des Associés externes de l'Académie le 9 Janvier 1787.

Mr. *Jean Chrétien Hebenstreit*, Docteur en Médécine et Professeur de Botanique à Leipzik, ancien Académicien de St. Pétersbourg, décéda à Leipzik le 27 Septembre 1795 agé de 75 ans et 2 mois. L'Académie l'avait engagé en 1749 comme Académicien ordinaire pour la Botanique, et il arriva à St. Pétersbourg au mois d'Août de la même année. En 1753 il fit avec le Président de l'Académie, le Feld-Marechal et Hetmann Comte de Razoumovski un voyage en Ukraine, d'où il se rendit à Leipzik. Il retourna à St. Pétersbourg en 1756 et y occupa pour la seconde fois sa place d'Académicien ordinaire pour la Botanique qu'il remplit sans interruption jusqu'en 1759. En cette année il quitta entièrement l'Académie pour retourner à Leipzik, où il resta jusqu'à sa mort. Les Tomes V.

et VIII. des nouveaux Commentaires renferment trois mémoires de Botanique de cet Académicien.

Mr. *Eric Laxmann*, Conseiller de Collège, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir, ancien Académicien de St. Pétersbourg et membre de plusieurs Académies et Sociétés savantes, mourût le 5 Janvier 1796 dans sa 59me année. Il étoit né le 24 Juillet 1737 à Abo en Finnlande, où il fit ses premieres études. Il se voua d'abord à l'état ecclesiastique et obtint, après avoir fini sa Théologie, une place de Pasteur adjoint dans sa patrie. En 1762 il fut appellé à St. Pétersbourg, pour être Régent à la grande école Luthérienne de St Pierre. En 1764 il fut nommé Pasteur de la communeauté Luthérienne à Barnaul, aux mines de Kolyvan, où il eut l'occasion de suivre le penchant naturel qui le portoit à l'étude de l'Histoire naturelle, en s'appliquant d'abord à la Minéralogie et puis aussi à toutes les autres branches, Zoologie, Botanique, etc. De retour à St. Pétersbourg, l'Académie des Sciences l'engagea le 26 Février 1770 en qualité de Professeur de Chymie et d'Economie, place qu'il quitta le 18 Janvier 1781, en conservant le titre d'Académicien, pour se rendre à Nertchinsk, où il occupa pendant quelque tems la place de membre de la Chancellerie des mines, avec le rang et le titre de Conseiller de Cour. Quelque tems après il fut attaché au Cabinet de S. M. I. avec 600 Roubles d'appointemens et la fonction de faire des voyages minéralogiques, tendant à découvrir les thrésors cachés de la vaste et riche Sibérie. Fidèle à ses anciennes liaisons avec l'Académie, Mr. Laxmann ne négligea pas les occasions que ces fréquens voyages lui fournissoient, de ramasser pour l'Académie, et de lui envoyer de tems en tems des curiosités naturelles et des notices intéressantes, ce qui engagea le Chef à la gratifier en 1784 de la pension académique. D'Irkoutzk où il s'étoit domicilié avec sa famille, il revint à différentes reprises à St Pétersbourg, où il fut décoré en 1794 de l'ordre de St. Vladimir de la 4me Classe et avancé en 1795 au rang de Conseiller de Collège. Il quitta de nou-

veau St. Pétersbourg, vers la fin de la dite année, pour s'en retourner à Irkoutzk, et mourût en route, à 118 Verstes au delà de Tobolsk. Il a publié divers ouvrages, et les Tomes XIV., XV., XVI., XVII., XVIII. et XIX. des nouveaux Commentaires, de même que les Tomes III. et VII. des nouveaux Actes, renferment plusieurs mémoires d'Histoire naturelle de cet infatigable naturaliste.

Mr. *Alexis Protassof*, Docteur en Médecine, Conseiller de Cour, Professeur d'Anatomie, membre de l'Académie Impériale des Sciences et de l'Académie Russe, mourût à St Pétersbourg le 5 Mai 1796 dans sa 72me année. Elevé dans le Gymnasie académique il fut nommé étudiant en 1743 et envoyé ensuite au dépens de l'Académie à Strasbourg et à Leyde, pour y achever ses études. En 1751 il fut reçu au nombre des Adjoints de l'Académie qui le nomma en 1763 Professeur extraordinaire d'Anatomie. En 1771 il fut plaçé au nombre des Académiciens effectifs et avancé en 1779 au rang de Conseiller de Cour. Chargé pendant plusieurs années des fonctions de Secrétaire de la Commission administrative de l'Académie et dans la suite de la Sur-Intendance de l'attelier des graveurs et des artistes, et en dernier lieu de la rédaction de l'ouvrage périodique que l'Académie publioit depuis plusieurs années sous le tître de Ежемѣсячныя Сочиненія il vaqua à tous ces différens employs avec autant d'activité que de ponctualité et finit sa carriére le jour mentionné ci-dessus, aprés avoir assisté encore à une séance de l'Académie Russe.

II. Nouvelles receptions.

Pour reparer ces pertes, en partie très sensibles, l'Académie s'est associé dans le courant des deux années 1795 et 1796 plusieurs Seigneurs de la nation encore plus distingués par leur amour pour les Sciences que par leur naissance et leur

rang; ainsi que quelques Savans estimables et avantageusement connus, tant externes que regnicoles. En voici la liste:

Reçu parmi les Associés honoraires regnicoles

S. E. Mr. Jacques de *Boulgakof*, Conseiller privé, et Chevalier grand-croix de l'ordre de St. Vladimir de la 2de Classe. Reçu le 5 Mais 1795.

S. E. Mr. Pierre de *Soimonof*, Lieutenant Général, Sénateur, Chevalier grand-croix de l'ordre de St. Vladimir de la 1re Classe. Reçu le 27 Août 1795.

S. E. Mr. Alexis de *Vasilief*, Conseiller privé et Directeur en Chef du Collége Impérial de Médecine, Chevalier grand-croix de l'ordre de St. Vladimir de la 2de Classe. Reçu le 20 Octobre 1796.

Mr. Gharles de *Hablitzl*, Conseiller d'Etat, Vice-Gouverneur de la Tauride et Chevalier de l'ordre de St. Vladimir de la 3me Classe. Rayé de la liste des Correspondans pensionnaires et reçu Associé honoraire le 28 Nov. 1796.

S. E. Mr. André de *Nartof*, Conseilleur privé, Président du Collège des mines et Chevalier de l'ordre Royal Danois du Daneborg. Reçu le 15 Décemare 1796.

S. E. Mr. le Comte Apollos *Mousin-Pouchkin*, Chambellan actuel de S. M. I. et Vice-Président du Collège des mines. Reçu le 15 Décembre 1796.

De plus l'Académie aggrègea comme membres honoraires, à la recommendation du Chef et à la suite de l'approbation qu'elle avoit donné à quelques mémoires qui lui avoient été présentés de la part des récipiendaires:

Mr. l'Abbé Maurice *Henry*, Astronome de S. A. S. Electorale Bavaro-Palatine. Reçu le 26 Octobre 1795.

Mr. Joseph *Sarti*, Maître de Chapelle de S. M. I. Reçu le 26 Mai 1796.

Le nombre des membres effectifs de la Conférence académique fut augmente dans le période dont nous rapportons içi les principaux évènemens:

1°) par Mr. Benoît François Jean *Hermann*, Conseiller de Cour, qui après avoir été depuis 1790 membre honoraire pensionné de l'Académie, à son retour de Pychminsk, ou il avoit été Directeur d'une fabrique d'acier, vent prendre possession le 10 de Mars 1796 de sa place d'Académicien effectif qui lui avoit été assûrée, avec mille Roubles d'appointemens, dès l'année 1790

2°) par Mr. l'Abbé Maurice *Henry*, ci-devant Astronome de S. A. Electorale Bavaro-Palatine et Membre honoraire de l'Académie Impériale des Sciences depuis la mois d'Octobre de l'année passée, lequel fut reçu le 7 Juillet 1796 membre ordinaire pour la Classe d'Astronomie

3°) par Mr. Simeon Gourief, Capitain d'Artillerie et Lecteur de Physico-Mathématiques du Corps des officiers de la flotte à rames. Il fut nommé Adjoint effectif pour la Classe de Mathématique le 26 Mai 1796

4°) per Mr. Jean Henry *Busse*, Sous-Bibliothécaire de l'Académie et Conrecteur de son Gymnase, qui fut reçu Adjoint pour l'histoire le 29 Janvier 1795.

Reçu au nombre des Associés étrangers:

Mr. John *Churchman*, Physicien Américain. Reçu le 8 Janvier 1795, à la recommendation de Mad. la Princesse Daschkof.

Mr. Guillaume Théophile Fréderic *Beitler*, Professeur de Mathématique et d'Astronomie au Gymnase illustre de Mitau. Reçu le 26 Octbre 1795.

Mr. Dougald *Stewart*, Professeur à l'Université d'Edinbourgh. Reçu le 29 1795.

Reçu au nombre des Correspondans :

Mr. Jean *Sievers*, cy-devant Apothicaire à Irkoutzk, déstiné, lors de sa réception, à faire un voyage au Thibet. Reçu le 5 Mars 1795.

Mr. Laurent Daniel *Ljungberg*, cy-devant Officier du Génie au Service de S. M. le Roy de Suède, actuellement à St. Pétersbourg et à la veille de faire un voyage en Amérique.

Mr. Alexandre *Fomin*, citoyen d'Archangel et membre de la Société libre économique de St. Pétersbourg. Reçu le 11 Juin 1795.

Mr. Pierre *Schanguine*, Sur-Intendant des mines de Kolyvan à Barnaül. Reçu le 31 Août 1795.

Mr. Alexandre *Razderischin*, Conseiller de Cour et Chevalier de l'ordre de St. Vladimir de la 4me Classe. Reçu le 2 Novembre 1795.

Mr. Jean *Böber*, Conseiller de Cour, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir de la 4me Classe, et membre de la Société libre économique de St. Pétersbourg, établi à Ekathérinoslav. Reçu le 22 Février 1796.

Mr. Henry *Storch*, Assesseur de Collège et membre de la Société libre économique de St. Pétersbourg. Reçu le 7 Avril 1796.

Mr. Maurice de *Prasse*, Mathématicien à Leipzik. Reçu le 19 Septembre 1796.

III. Promotion.

Outre les promotions de Mrs. Henry et Busse que nous avons déjà rapportées dans l'article précédent, en parlant des nouvelles réceptions faites par l'Académie, il y eut encore deux promotions proprement dites au commencement de l'année 1795. Mrs. les Adjoints Kononof et Zacarof furent nommés Professeurs extraordinaires, le premier pour les Mathématiques dans la séance du 26 Janvier, le second pour la Chymie dans la séance du 29 Janvier.

III.

Gratifications et recompenses.

Pour récompenser les longs et nombreux services de Mr. le Conseiller d'Etat et Chevalier Pallas SA MAJESTÉ IMPÉRIALE lui a très-gracieusement donné, au mois de Mars 1795, des possessions en Tauride, avec la permission de s'y établir et d'y continuer ses savantes occupations, et avec la jouissance des mêmes appointemens qu'il avoit tiré jusqu'à présent de la caisse académique. En conséquence de quoi Mr. Pallas a quitté St. Pétersbourg le 12 Août 1795, pour aller s'établir en Tauride.

En Juillet 1795 Mr. l'Académicien et Chevalier Krafft, en recompense des leçons de Physique qu'il avoit données jusqu'alors à LEURS ALTESSES IMPÉRIALES, Monseigneur le Grand-Duc ALEXANDRE PAVLOVITSCH et Monseigneur le Grand-Duc CONSTANTIN PAVLOVITSCH, a été gratifié d'une pension viagère de 600 Roubles.

Le 17 Septembre 1795 Mr. Pierre *Schanguine*, Sur-Intendant des mines de Kolyvan à Barnaul et Correspondent de

l'Académie, a été gratifié de la pension académique de 200 Roubles.

Mr. le Conseiller de Collèges Roumovski ayant été appellé à Zarskoe-Sélo au mois de Juillet 1796, pour expliquer à SA MAJESTÉ IMPÉRIALE l'usage d'un télescope de Herschel de 10 pieds, dont S. M. le Roi d'Angleterre avoit fait présent à la Souveraine: il a eu l'honneur de faire voir à SA MAJESTÉ la Lune et plusieurs autres objets célestes pendant sept soirées consécutives, et de s'entretenir avec cette auguste Princesse sur plusieurs sujets d'Astronomie et de Géographie. A son départ il a reçu de la part de SA MAJESTÉ une montre d'or garnie de Brillans avec une chaine de la même richesse. Le Mécanicien Koulibin, que Mr. Roumovski avoit pris avec lui, pour soigner le transport de l'instrument, reçut une tabatière d'or.

IV.

Présens faits à l'Académie.

I. *Pour la Bibliothèque.*

De la part de Mr. Conseiller de Cour *Gouthrie*:

Recherches sur les antiquités de la Russie etc. St. Pétersbourg 1794. in 8vo.

De la part de S. E. Mr. le Comte de *Brühl* Ministre de Saxe à Londres:

On the investigation of astronomical circles. London 1794.

A registre of one of Mr. Mudge's time keepers. London 1794.

De la part de Mr. *Romano*, Officier du Génie au Service de la République de Venise:

Nova Analyseos elementa, auctore I. B. *Nicolai*, Tom. I. Pars 2. Patavii 1793. in 4to.

Nuovo metodo di applicare alla sintesi la soluzione analitica di qualunque problema geometrico, di Ant. *Romano*. Venezia 1793. in 8vo.

De la part de Mr. *Storr*, Professeur à Tubingue:

Investigandae crystallifodinarum oeconomiae quaedam pericula, in 4to.

Dissertatio inauguralis medica, de sale alpino. in 4to.

Dissertatio inauguralis de moscho. in 4to.

Sciagraphia methodi materiae medicae qualitatum aestimationi superstructae. Pars I et II. in 8vo.

De la Part de Mr. le Conseiller d'Etat *Pallas*:

Краткое Физическое и Топографическое описаніе Таврической Области. in 4to.

De la part du Gymnase illustre à Anspach:

Einige Gedanken über die Methode bey dem Religionsunterrichte in den obern Klassen der Schulen, von Inspector *Rothe*.

Von den Vorzügen der öffentlichen, und besonders wissenschaftlichen, vor der häuslichen Erziehuug, von Mag. *Martini*.

Eusebianae de Jacobi fratris Jesu vita et morte narrationis partes quaedam explicantur — a Professore et Rectore *Faber*.

Wie soll man auf Schulen übersetzen? von Mag. *Schaefer*.

De la part de Mr. *Tychsen*, Professeur à Butzov:

Physiologus Syrus, seu historia animalium XXXII in S. S. memoratorum syriace e codice bibliothecae Vaticanae nunc primum edidit, vertit et illustravit *O. G. Tychsen*. Rostochii 1794. in 8vo.

Fortgesetzter Mecklenburg-Sicilianischer Briefwechsel. Der neuen Monatsschrift von und für Mecklenburg. 14ter Jahrgang, 2tes Stück. Februar 1794.

De la part de Mr. l'Académicien *Bode* à Berlin :

Astronomisches Jahrbuch, für das Jahr 1797. Berlin 1794. in 8vo.

Claudius Ptolemäus Beobachtung und Beschreibung der Gestirne und der Bewegung der himmlischen Sphäre. Berlin 1795. in 8vo.

De la part de Mr. le Docteur *Scherer* à Jena :

Versuch einer populären Chemie. Mühlhausen 1795. in 8vo.

Ueber das Leuchten des Phosphors im atmosphärischen Stick-Gase ; nebst D. Pfaffs Bemerkungen zu Hrn. Professor Göttlings Schrift : Beytrag zur Berichtigung der antiphlogistischen Chemie. Weimar 1795.

De la part de l'Auteur :

Orphica, ein musikalisches Instrument, erfunden von C. L. *Röllig*. Wien 1795. in 8vo.

De la part de l'Académie Américaine des arts et sciences de Boston:

Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. II. Part. I. Boston 1793. in 4to.

De la part des Auteurs :

Xenocratis de alimento ex aquatilibus. Auct. Cajetano de *Ancora*. Neapoli 1794.

Guide de Voyageurs pour les antiquités et curiosités naturelles de Pozzuoli et des environs ; ouvrage de Mr. C. d'*Ancora*, traduit de l'Italien par Mr. *Manvilles*. Naples 1792.

Opuscoli di vario argomento di Guiseppe Cassella, Regio Astronomo alla Marina. Opuscolo I. Saggio d'un tentativo per risolvere l'equazioni di tutt i gradi. Napoli 1788.

Memoria sull' eruzione del Vesuvio, accaduta la sera de 15 Giugno 1794, di Scipione Breislak et d'Antonio Winspeare. Napoli 1794.

De la part de l'Académie Royale de Stockholm:

Königl. Vetenskaps Académiens Nya Handlingar, années 1792 — 1798.

De la part de l'Auteur:

Dissertazione sulla trisezione del angolo, ossia del arco, colla piana Geométria etc. dal Abbate Gius. Mar. Pizzati, in Venetia 1795 in 8vo.

De la part de Mr. l'Académicien *Bode* à Berlin:

Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1798. Berlin 1795, in 8vo.

Sammmlung astronomischer Abhandlungen, Beobachtungen und Nachrichten u. s. w. zweyter Supplement-Band zum astronomischen Jahrbuch. Berlin 1795, in 8vo.

Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1799. Berlin 1796, in 8vo.

Astronomische Tafeln, zur Bestimmung der Zeit aus den beobachteten gleichen, obwohl unbekannten Höhen zweyer Fixsterne, von Jul. Aug. *Koch*. Berlin und Strahlsund 1797, in 8vo.

De la part de Mr. le Docteur *Schröter:*

New observations, in further proof of the mountainous inequalities, rotation, atmosphere and twilight of the planet Venus.

De la part de Mr. le Major *Vega:*

Thesaurus logarithmorum completus ex arithmetica logarithmica et ex trigonometria artificiali Adriani Vlacci collectus etc. a Georgio *Vega*. Lipsiae 1794, in fol.

Beyträge zum 3ten Bande der Vorlesungen über die Mathematik des Georg *Vega*. Wien 1794, in 8vo.

De la part de Mr. le Baron de *Meidinger:*

Icones piscium Austriae indigenorum, quos collegit, vivis-

que coloribus expressos edidit Carolus liber Baro a Meidinger. Decuria I — V. Viennae Austriae 1785 — 95, in fol.

De la part de Mr. l'Assesseur *Storch:*

Statistische Uebersicht der Statthalterschaften des Russischen Reichs, nach ihren merkwürdigsten Kultur-Verhältnissen, in Tabellen; von Heinr. *Storch.* Riga 1795, in fol.

De la part de l'Auteur, Mr. *Entner* d'Entnersfeld:

Plan, in sich enthaltend viele so leichte als untrügliche Mittel, die gesammten österreichischen Erblande auf die höchste Stufe der Grösse zu erheben, u. s. w. Wien 1781, in 8vo.

Unmaasgebliche Vorschläge der Theurung sowohl für das Gegenwärtige als für das Zukünftige abzuhelfen u. s. w. Wien 1791, in 8vo.

Lehrbuch der landwirthschaftlichen Oeconomie, zum Gebrauch derjenigen, welche sich dieser Wissenschaft entweder theoretisch oder practisch widmen wollen. 2 Theile. Wien 1796, in 8vo.

Almanach von 366 Tagen und eben so vielen Nächten, in einer Auswahl von lehrreichen, wahrhaften vorzüglichen Geschicten, Sprüchen und Reden. Wien 1796, in 8vo.

Trauerrede über das allerbetrübteste Hinscheiden Kayser Joseph II. Wien 1790.

Trauerrede über den bedauerlichen Hintritt Ihro Königl. Hoheit der durchl. Frauen Erzherzogin von Oesterreich, Maria Anna. Wien.

De la part du Bureau des longitudes à Londres:

The nautical Almanac and astronomical Ephemeris, for the Years 1797 — 1800. London, in 8vo.

De la part de Mr. le Docteur *Walter* à Berlin:

Anatomisches Museum, gesammelt von Johann Gottlieb

Walter, beschrieben von seinem Sohne Friedrich August Walter. Berlin 1796, in 4to.

De la part de Mr. le Docteur *Böttcher:*

Auswahl des chirurgischen Verbandes, für angehende Wundärzte. Berlin 1795, in 8vo.

Vermischte medicinisch-chirurgische Schriften, Königsberg 1792, in 8vo.

Abhandlung von den Krankheiten der Knochen, Knorpeln und Sehnen, 1ter Theil. Königsberg 1795, in 8vo.

De la part de Mr. le Docteur *Crome:*

Die Staatsverwaltung von Toscana, unter der Regierung S. K. H. Leopold des II., aus dem Italienischen übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von Dr. A. F. W. Crome, 2 Bände. Gotha 1795, in 4to.

De la part de Mr. de *Prasse* à Leipzik:

Usus Logarithmorum infinitinomii in theoria aequationum. Lipsiae 1796, in 4to.

De la part de la Société électorale météorologique à Manheim:

Ephemerides Societatis meteorologicae Palatinae. Observationes anni 1791. Manheimii 1794, in 4to.

Ephemerides Societatis meteorologicae Palatinae. Observationes anni 1792. Manheimii 1795, in 4to.

Additamentum observationum annorum antecedentium. Manheimii 1795.

De la part de Mr. le Docteur *Scherer* à Jena:

Grundzüge der neuern chemischen Theorie, Jena 1795, in 8vo.

De la part de Mr. l'Adjoint *Gourief:*

Навигаціонныя и Мореходныя Изслѣдованія, сочинены Г. Безу, съ Французскаго подлинника на Россійской языкъ переведены и дополнены С. Гурьевымъ. С. Петербургъ 1790, in 4to.

De la part de la Société Royale des Sciences de Göttingue:

Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis. Volumen XII. ad annos 1793 et 1794, in 4to.

De la part de Mr. *Seyffer*, Professeur à Göttingue:

Bestimmung der Länge von Göttingen, Gotha, Dantzig, Berlin und Herefield, aus der Sonnenfinsterniss vom 5. September 1793. Göttingen 1794.

De la part de Mr. *Tychsen*, Professeur à Butzov:

O. G. Tychsen introductionis in rem numariam Muhamedanorum. Additamentum I. Rostochii 1796, in 8vo.

Fossilia Aegyptica Musei Borgiani Velitris, descripsit Greg. *Wad*, Danus. Velitris 1794, in 4to.

De la part de Mr. le Docteur de *Careno* à Vienne:

Observationes de epidemica constitutione anni 1789 in civico nosocomio Viennensi. Accedit tentamen de morbo Pellagra. Vindobonae 1794, in 8vo.

Dieta patologica, ossia metodo di vivere per gli ammalati, del Dottore Giorgio Reyher. Tradotto dal tedesco, dall' Dottore Luigi Careno. Firenze 1795, in 8vo.

P. Moscati, über eine convulsivische Krankheit im Waysenhause zu Mayland, an Hrn. Aloïs von Careno. Aus dem Italienischen. Wien 1796, in 8vo.

De la part de Mr. *Beitler*, Professeur à Mitau:

Un ouvrage d'Astronomie en Langue Chinoise.

De la part de Mr. *Creve*, Professeur à Mayence:

Vom Baue des weiblichen Beckens, 1ter Theil, Leipzig 1794, in 4to.

II. Pour le cabinet d'Histoire naturelle.

De la part de Mr. le Conseiller de Cour et Chevalier *Razdérischin*:

Une collection de cent soixante neuf pièces de minéraux et autres fossiles indigènes, faisant suite à la collection de quatre vingt dix pièces, dont le même donateur avoit enrichi le

cabinet de Minéraux en 1788 (V. Histoire de cette année, à la tête du Tome VI. des Nova Acta). Mr. de Razdérischin a ajouté à cette collection un Catalogue raisonné très détaillé.

De la part de Mr. le Conseiller de Cour *Hermann:*

Une Collection de vingt pièces de Minéraux et autres fossiles de la Sibérie, en partie entièrement inconnus jusqu'ici aux minéralogistes et découverts tout récemment dant les nouvelles minières, accompagnée d'une Catalogue raisonné du donateur.

De la part de Mr. le Conseiller de Cour *Loder* à Jena:

Un très beau tableau de végétaux squélétés, supérieurement bien exécuté par Mr. le Docteur *Biber* à Gotha, avec un Catalogue des fleurs et feuilles dont les squélétes se trouvent dans cette collection, classifiés selon le système de *Linné.*

De la part de S. E. Mr. Lieutenant Général de *Levandinof:*

L'Os maxillaire inférieur, avec une dent molaire, à demi-petrifiés, d'un animal inconnu de taille énorme, qui a été trouvé aux bords de la mer d'Azof, par un négociant de Charkof nommé *Boutenkof.*

De la part?

Un morceau de bois *Lagetto*, ou bois dantelle (Lacebark-tree) des Indes occidentales, avec un petit gobelet fait de ce bois.

Envoyé de la nouvelle Russie:

Un monstre humain, savoir un enfant mûr à deux corps, deux têtes, quatre bras et trois pied, ou plutôt deux enfans tenans l'un à l'autre par les côtés, et de manière que le bras et le pied gauche de l'un, et le bras et le pied droit de l'autre se trouvent à leur place naturelle, tantisque les deux

autres pieds n'en font qu'un, qui se trouve placé au dos de l'un des deux corps, et que les deux autres bras, quoique distinctément prononcés, tiennent l'un à l'autre dans presque toute leur longueur.

Envoyé du Gouvernement de Smolensk:

Un monstre humain, savoir un foetus de six mois, pareillement à deux corps, deux têtes, quatre bras et quatre jambes, ou plutôt deux foetus tenans l'un à l'autre par la région hypogastrique.

III. Pour le Cabinet de curiosités.

De la part de SA MAJESTÉ IMPÉRIALE:

Une collection de curiosités Japonoises, envoyées de l'isle de Ceylon à *Sa Majesté l'Impératrice* par Mr. le Docteur Stutzer, Suèdois de nation, qui avoit fait quelque sejour au Japon. Cette collection dont *Sa Majesté Impériale* a fait présent au musée académique, consiste en divers ouvrages en lac noir très fin, garnis d'or, de perles et de nacre, comme assiettes, boites etc.; en fabres; en modèles de palanquins; en monnoyes Japonoises d'or, d'argent et de cuivre; en papier de *miroir* de différentes couleurs, fabriqué d'une plante marine, et employé par les Japonois à faire des éventails et de jalousies tant pour les chambres que pour les palanquins; en peintures et cartes géographiques Japonoises; en plans des villes et temples du pays; en livres traduits en Japonois d'après des traductions Hollandoises, tels que les tables anatomiques de *Culmus*, la Chirurgie de *Heister*, *Rosenstein* sur les maladies des enfans etc.; enfin en trois cassettes remplies d'insectes très bien imités en cuivre d'après nature.

De la part de Mr. Conseiller d'Etât et Chevalier *Pallas:*

Une helebarde trouvée aux environs des anciennes habitations des Mordouans entre la Soura et la Maksha, dans le Gouvernement de Penza, où l'on en a déterré depuis peu plusieurs de la même forme et matière.

De la part de Mr. le Conseiller de Cour et Chevalier *Razdérischin:*

Quelques antiquités Tchoudes trouvées à 40 Verstes de Ekathérinbourg. En creusant à une profondeur de 14 toises la minière de Goumashevsk, on a découvert une des anciennes miniéres des Tchoudes, dans laquelle on a trouvé le corps d'un ouvrier Tchoude, muni d'un de ce sacs de cuir, dans lesquels les fossoyeurs des métaux de ce peuple avoient coûtume des transporter les mines de cuivre; la pique de cuivre de cette ouvrier avec un reste de la manche de bois; un clou de cuivre et trois pièces de talc qu'ils employoient comme des moules, pour y fondre leurs clous de cuivre. Toutes ces pièces furent déposées au musée académique.

VI. Pour le jardin botanique.

De la part de Mr. le Conseiller d'Etât et Chevalier *Pallas:*

Plusieurs paquets de semences cueillies par cet Académicien sur les bords du Don et en Tauride, dans le courant des années 1795 et 1796 et envoyé à l'Académie.

V. Pour le médailler.

Une médaille d'or, en forme de croix, frappée en mémoire de la prise d'Ismail et déstinée à être portée à la boutonniere par les Officiers qui ont assisté à l'assaut de cette ville.

Une médaille en argent, de forme ovale, frappée à la même occasion, pour être distribuée aux bas-officiers et aux

Soldats qui ont eu part à l'action de cette journée glorieuse, et pour être portée pareillement à la boutonniere, comme une marque de distinction militaire.

V.

Mémoires et autres ouvrages manuscrits présentés à l'Académie.

1795

Le 12 Janvier. Extrait d'un Journal tenu pendant un voyage à la cour de Jédo; par Mr le Docteur *Stutzer.*

— — — Déscription du Moxa et de la cure des épingles, très usitée au Japon; par le même.

Le 26 Janvier. Mémoire sur la différence en longitude des observatoires de Paris et Greenvich, avec les observations, d'où elle a été déduite, et une critique raisonnée de celle que le Général Roy a conclue de ses opérations géodésiques; par Mr. le Comte de *Brühl.*

Le 16 Mars. Extrait succinct des observations météorologiques faites en 1794 à Nertchinsk, Schilkinsk et Klischginsk; par Mr. le Conseiller de Collège *Barbot de Marny.*

Le 9 Avril. Recherches sur les équations linéaires aux différences partielles du second degré; par Mr. Jean *Trembley.*

Le 4 Mai. Observations météorologiques faites à Kiachta; par Mr. Jean *Sievers.*

Le 13 Août. Описание Бѣлаго Моря; par Mr. *Phomin.*

Le 31 Août. Observationes meteorologicae per annum 1794 in urbe Saratovia institutae; par Mr. Conseiller de Cour *Meyer.*

Le 7 Septembre. Описаніе махины для подъему въ карабельныхъ пристанахъ на большую высоту великихъ тяжестей; par Mr. le Major *Polef.*

Le 5 Octobre. Abrégé de Trigonometrie sphérique; par Mr. l'Abbé *Henry.*

— — — Astronomie sphérique; par le même.

— — — Mémoire sur l'éclipse du soleil du 5 Sept. 1793, observée á Manheim; par le même.

— — — Observation de l'occultation d'Aldebaran par la lune, faite à l'observatoire électoral de Manheim le 10 Août 1792; par le même.

— — — Beschreibung eines neuen Telegraphs; par Mr. le Professeur *Parrot.*

— — — Mémoire amélioré sur la méthode de séparer l'or et l'argent par le départ, fondée sur les affinités des corps; par Mr. le Baron de *Meidinger.*

Le 8 Octobre. De progressionibus arcuum circularium, quorum tangentes secundum datam legem procedunt; par Mr. le Professeur *Pfaff* à Helmstedt.

Le 12 Octobre. Sur le calcul des variations des étoiles; par Mr. le Professeur *Beitler.*

Le 23 Novembre. Observation de l'occultation de Jupiter et de ses satellites par la lune, faite à l'observatoire de Mitau le 23 Septembre 1795; par Mr. *Beitler.*

— — — Observation de l'occultation de l'étoile μ de la baleine par la lune, faite à Mitau le 30 Septembre 1795; par le même.

Le 3 Décembre. Observation de l'Eclipse partiale de la lune arrivée dans la nuit du 11 au 12 d'Octobre 1791, faite à l'observatoire de Mitau; par le même

— — — Eclipses des Satellites des Jupiter et occultations d'étoiles par la lune, observées à Mitau en 1792 et 1793; par le même.

1796

Le 25 Janvier. Beobachtung einer neuen merkwürdigen sehr entfernten Licht Erscheinung im Schlangenträger, vom 18ten Juni 1795; par Mr. le Grand Bailif *Schröter.*

Le 21 Mars. Abhandlung über die mancherley Gifte in den Küchen und über die Art, wie die kupfernen kochgefässe statt der ungesunden, unhaltbaren, kostbaren Verzinnung, sowohl durch eine Glasur, als auch durch einen andern äusserst wolfeilen und dauerhaften Ueberzug, der Gesundheit unschädlich gemacht werden können; par Mr. le Baron de *Meidinger.*

Le 28 Avril. Addition au mémoire sur les équations linéaires aux différences partielles du seconde degré; par Mr. *Trembley.*

Le 2 Mai. Erläuterung der Strabonischen Topographie des Cimmerischen Bosphorus, nach den neuesten Russischen Karten von Taurien und Taman; par Mr. le Lieutenant *Marchal de Bieberstein.*

— — — Примѣчанія о встрѣчающихся около Таврическаго пролива древнихъ Греческихъ надгробныхъ камняхъ; par le même.

Le 5 Mai. Witterungs-Beobachtungen vom 16ten Mai 1786 bis Ausgang des Mai 1787; von dem Naturforscher bei der Billing'schen Expedition, Hrn. Doctor *Merk.*

— — — Thermometrical and meteorological observations; par Mr *Sauer*, Secretaire de l'expédition du Cap. Billings, faites pendant le voyage depuis Moscou le 25 Nov. 1785, jusqu'à Seredin-Koroma-Ostrog le 16 Septembre 1787.

— — — Wetterbeobachtungen, die von dem Amanuensis *Krebs* auf der Reise vom Tschuktschischen Vorgebirge nach den Aleutischen Inseln, und von dort wieder zurück nach Kamtschatka, vom 22sten September 1789 bis zum 31sten December 1792, und dazwischen in Petri Pauli

Hafen, vom 13ten December 1789 bis zum 30sten April 1790 angestellt worden sind.

Le 5 Mai. Ebendesselben Witterungs-Beobachtungen, die im Petri Pauli Hafen, auf Kamtschatka vom 1sten Januar bis zum 31sten Julius 1793 aufgezeichnet worden.

Le 12 Mai. Moyen de compter les vibrations des sons et d'en comparer la célérité avec la mesure du tems; par Mr. *Sarti*, Maitre de Chapelle de S. M. I.

Le 16 Mai. Mémoires sur la réspiration, offerts à l'Académie Impériale de St. Pétersbourg; par A. *Ypey*. A. L. M. Docteur en Philosophie et Médecine à Amsterdam. Ir Mémoire.

Le 19 Mai. Selbst-Beweg-Maschine, nebst Bemerkungen; von Johann Friedr. *Heinle*.

Le 26 Mai. Начала Геометріи трансценденшной и исчисленія дифференціяльнаго, извлеченныя изъ истинной натуры ихъ предметовъ; par Mr. *Gourief*.

Le 19 Septembre. Вновь изобрѣтенной способъ дѣлить Геометрическимъ черченіемъ уголъ на три равныя части; par Mr. le Lieutenant *Tyschkévitsch*.

Le 10 Novembre. Versuch einer Philosophie der Mineralogie; von Joh. Christ. v. *Lehmann*.

Le 19 Décembre. Déscription d'un globe de feu en Allemagne, le 8 Mars 1796; par Mr. le Major de *Zach*.

Mr. le Conseiller de Collège et Chevalier *Stritter* a envoyé régulierement chaque mois les observations météorologiques faites à Moscou, et par feuilles détachées, ses Mémoires historiques pour la Bibliothèque ancienne Russe.

Quant aux mémoires présentés de la part des Académiciens et lus dans les séances académiques, leur nombre monte à 57.

VI.

Observations, expériences et notices intéressantes, faites et communiquées à l'Académie.

I. Sur une terre inconnue dans le Spath pesant.

Le 19 Janvier 1795 Mr. l'Académicien Lowitz rapporta à la Conférence ce qui suit: J'ai découvert, il y a plus de deux ans, dans le Spath pesant, outre la terre pondereuse (baryte), une autre terre qui lui est particuliére et tout-à-fait inconnue. Cependant, pour ne rien précipiter, je n'ai voulu communiquer cette observation à l'Académie que lorsque j'aurois fait une provision suffisante de cette terre, pour être en état de l'examiner à fond. Or dépuis peu j'ai eu la satisfaction de voir, par un exelleut mémoire de Mr. Klaproth sur la terre du Strontianite, inséré dans les Annales de Chymie de Crell que la nouvelle terre, trouvée tout récemment dans le Strontianite si rare d'Ecosse, est parfaitement analogue, dans toutes ses propriétés, avec celle que j'ai trouvée dans le Spath pesant Dès que j'aurai fini mes recherches et expériences sur ce sujet, j'aurai l'honneur d'en présenter le résultat à l'Académie Impériale, dans un mémoire particulier plus circonstancié.

II. Sur deux manuscrits de la Bibliothèque de Zaluski.

Le 2 Mars 1795 Mr. de Bakounin exposa deux manuscrits de la Bibliothèque de Zaluski que S. M. l'Impératrice lui avoit ordonné de faire examiner par l'Académie. Le premier est écrit en langue Tamule sur de feuilles oblongues de bambou. Le second est un volume in 8vo, fort endomagé, d'une vingtaine de feuilles d'un papier de coton, dont les premieres contiennent une lettre écrite en langue Chaldéenne et les sept dernieres la

traduction latine de cette même lettre écrite en caractères difficiles à déchifrer dont la feuille ci jointe représente un échantillon (Tab. I.), et contient ce qui suit:

Exemplum infra scripte epistole rabi Ismael magistri Sinagoge coloc ut missa Jerusalem cuidam moisi legis mosaice peritissimo anni ab initio M III. C *VII. LXXXIII. preside pontio pilato judeae Tiberii caesaris imperio que epistola ex caldea lingua in latinam per beatum jheronimum apud betheelem palestine translata fuit.*

III. Sur la dépuration de l'éther sulfurique.

Le 8 Juin 1795 Mr. l'Académicien Lowitz anonça à la Conférence d'avoir trouvé une méthode très simple de purifier parfaitement, par le moyen du muriate de chaux, l'éther sulphurique, et de le dégager de l'esprit de vin qui s'y trouve lié intimément, et que par ce moyen il a poussé la dépuration beaucoup plus loin qu'on n'a pu faire jusqu'ici. Mr. Lowitz promit de communiquer son procédé en détail à l'Académie, avec les expériences qu'il a faites sur ce sujet.

IV. Sur la décomposition du tartre par le muriate de chaux.

Le 6 Octobre 1796 le même Académicien anonça préalablement d'avoir découvert, par des expériences, un moyen très profitable de décomposer le tartre par le moyen du muriate de chaux, en sorte que le contenu de l'acide tartreux en soit complettement séparé. Il se propose de communiquer quelque jour son procédé dans un mémoire particulier.

V. Sur la vitesse des vibrations du son.

Mr. *Sarti*, Maître de Chapelle de S. M. I. ayant présenté à l'Académie le 12 Mai 1796 un mémoire *sur le moyen de compter les vibrations des sons et d'en comparer la célérité avec la mesure du tems*: le sentiment des Mrs. les Académiciens, nommés pour examiner ce mémoire, avoit été en substance: que le moyen que Mr. Sarti y propose pour déterminer le nombre de vibrations que produit un ton quelconque est ingénieux, et que l'instument qu'il a imaginé pour cet effet paroît être fort propre aux expériences à instituer pour cet effet; que l'idée de Mr. Sarti est analogue à celle que *Sauveur* avoit proposé autrefois à l'Académie de Paris; mais que, les expériences de ce Savant n'ayant pas réussi, tandisque Mr. Sarti assûre en avoir fait en Italie avec un succès décidé: il seroit à souhaiter que Mr. Sarti voulût communiquer à l'Académie les résultats de ces expériences, ou bien les repéter en présence de l'Académie, afin de pouvoir en comparer les résultats avec ceux qu'on a tirés autrefois des expériences faites sur les cordes, en calculant le nombre des vibrations par seconde, au moyen de la longueur, du poids et de la tension connues.

Mr. Sarti ayant été informé de ce désir de l'Académie, il s'offrit obligeamment de repéter ses expériences devant la Conférence, aussitôt que ses occupations le lui permettroient, et il se rendit à l'invitation de l'Académie le 8 Octobre, où il exposa, dans une assemblée extraordinaire, son appareil de tuyaux d'orgue et en démontra l'usage, en faisant diverses expériences tendant à déterminer la vitesse absolue des vibrations. Ces expériences réussirent parfaitement à la satisfaction de toute l'Assemblée. L'appareil imaginé par Mr. Sarti est composé de deux tuyaux d'orgue de 5 pieds, posés sur leur sommier, avec deux souflets et deux touches, afin de pouvoir faire resonner chaque tuyau séparement, ou tous les deux à la fois, et puis d'un monocorde et d'un pendule à secondes. Le ton de chaque

tuyau peut être haussé ou baissé au moyen d'une ouverture latériale pratiquée en haut, qu'on peut fermer plus ou moins, au moyen d'une lame mobile dans une coulisse. En commençant l'expérience les deux touyaux sont mis à l'unison; peu-à-peu on remonte la lame baissée de l'un des tuyaux, ce qui en fait hausser le ton et produit une dissonance qui est accompagnée de secousses ou battemens faciles à saisir. Ces battemens produisent, lorsqu'ils sont assez fréquens, un troisième ton qui résulte de la combinaison des deux autres, rendus par les deux tuyaux à la fois, et sont l'effet des coïncidences des vibrations des deux autres tons simultanés. Ils sont d'autant plus lents et d'autant plus faciles à compter que l'intervalle qui se trouve entre le rapport des vibrations des deux tons simultanés est plus petit. On trouve par le monocorde que l'orsque les battemens répondent aux oscillations du pendule à secondes, les tons des deux tuyaux sont dans le rapport de 100 à 99; et que par conséquant le plus grave fait 99 vibrations et l'autre 100 vibrations par seconde, ce qui détermine la vitesse absolue d'un tuyau d'orgue de 5 pieds. Il résulte de la comparaison de ce ton, faite par le moyen du monocorde, que le ton, sur lequel on monte la corde $\bar{a}$ des violons de la chapelle de S. M. I. fait 436 vibrations par seconde, ce qui étant connu il est facile de trouver le nombre des vibrations des tous les tons.

VI. Sur les ossemens d'un animal inconnu trouvés près d'Azof.

Le 15 Décembre 1796 la Conférence reçut de la part de S. E. Mr. le Lieutenant Général de Levandinof la notice suivante: Le marchand de Charkof Ivan Boutenkof, en faisaut un voyage de commerce de le Gouvernement de Ekatherinoslav, aperçut à une distance de 70 Verstes de la forteresse d'Azof, et à deux verstes du banc de sable rond, une partie du terrein de la côte escarpée emportée par l'agitation des pots de la mer qui a laissé à découvert les restes d'un animal inconnu d'une taille énorme, dont la tête git vers l'orient, à deux archines

de l'eau. L'os maxillaire inférieur du poids de 30 livres, et quelques côtes qui ont plus d'¼ d'archine de largeur, à demi petrifiés, se sont détachés du reste. On a trouvé au même endroit des fragmens de cornes aussi pétrifiées et d'une grandeur démésurée, ce qui lui a fait présumer que les ossemens mentionnés sont de quelque bête à corne.

VII.

Rapports présentés et lus dans les Conférences académiques.

I. Sur un télégraphe nouveau.

Mr. le Professeur *Parrot* ayant envoyé à l'Académie sa déscription d'une nouveau télégraphe, Mr. l'Académicien et Chevalier Krafft fut chargé de la lire et d'en dire son sentiment, c'est ce qu'il fit dans un rapport présenté le 8 Octobre 1795 et contenant ce qui suit: „L'auteur de ce mémoire donne de bons conseils qui pourroient être utiles dans la construction d'un télégraphe; mais quant à l'ésprit de la télégraphie je ne trouve rien de neuf dans son projet, si j'en excepte quelques modifications des principes connus, qui pareillement pourroient être avantageuses. Il seroit possible que moyennant ces modifications le télégraphe de Mr. Parrot signalât plus vite que le télégraphe françois, mais aux dépens de la sûreté, bien autrement importante que la célérité. Les raisons qui me portent à croire le télégraphe de Mr. Parrot moins sûr que le télégraphe françois, sont: 1°) que ses signaux sont sujets à être mésentendus de celui qui doit les lire et transmettre; 2°) que pour chaque consonne il lui faut deux signes consécutifs qui, rendus seuls, signifient chacun une voyelle, et que pour marquer cette liaison il a besoin d'un troisième signe qui suit les deux premiers. Sa maniere d'éclairer les signaux est aussi fort compliquée: il lui

faut des lampes d'argand, des réverbères et même de l'air déphlogistiqué, lorsque le tems est obscur et nebuleux. Je remarque ceci, sans en faire un point d'objection, et en ajoutant qne cette maniere d'éclairer étant catoptrique, elle est nécessairement plus foible que ne seroit l'illumination dioptrique des signaux. Quoiqu'aux reste une combinaison des moyens télégraphiques de l'auteur avec la télégraphie française pourroit être avantageuse, je ne vois pas que dans les points essentiels sa machine ait une prérogative marquée sur le télégraphe connu, à moins que, renonçant à la sûreté des signaux, on n'ait en vue de signaler plus vite, ce qui paroît davoir être rarement le cas."

II. Sur un projet de diriger les ballons aërostatiques.

Mr. le Docteur ayant demandé le 9 Mars 1795 l'avis de la Conférence sur un écrit anonyme reçu de Grodno, relatif à un moyen de diriger les ballons aërostatiques, à l'aide d'une plaque de fer adaptée à la carcasse et d'un gros aiment placé au bout d'un timon mobile autour d'un pivot. Comme une projet de cette nature n'exigeoit pas un examen profond et appuyé de calculs: la Conférence expédia tout de suite son avis conçu en ces termes: „Messieurs les Académiciens ayant lu le projet d'un anonyme pour diriger à volonté le mouvement progressif des ballons aërostatiques par le moyen d'un gros aimant, ils ont trouvé que quand même il en résulteroit un petit balancement du ballon autour de son axe, ce qui suivante l'arrangement que l'anonyme propose, est encore fort douteux, le mouvement progressif du ballon suivant la direction des courans d'air n'en sauroit en aucune façon être altéré, vu que le mécanisme projetté ne produit aucune force latérale capable de changer la direction du mouvement à volonté.

III. Sur le projet d'une écluse au pas de Trollhätta et d'un pont sur la riviere Götha-Elf.

Mr. de *Ljungberg*, ci-devant Officier du Génie au service de S. M. le Roy de Suède, s'étant présenté à la Conférence, avec la permission de Mr. le Directeur, le 16 Avril 1795, il fit à Mrs les Académiciens assemblés un exposé détaillé et raisonné de quelques plans hydrotechniques relatifs à deux projets de construction; l'un d'une écluse de 42 pieds de hauteur au pas de Trollhätta, pour élever les batteaux à la hauteur du torrent; l'autre d'une pont à trois arches, chacune des 15 toises d'ouverture, à construire sur la riviere Götha-Elf, à Konghel dans la province de Bohus. Les mémoires et les dessins de Mr. Ljungberg furent remis à Mr. l'Académicien Fuss qui, le 20 Avril suivant en fit son rapport, (auquel les autres Académiciens de la Classe accèderent) de la maniere suivante: „J'ai lu le projet de construction d'une écluse au pas de Trollhätta et d'un pont à trois arches sur le Gotha-Elf, présenté à l'Académie par Mr. de Ljungberg. Ces projets sont hardis et leur exécution pourroit trouver des grandes difficultés que je ne crois pourtant ni insurmontables, ni même supérieures aux ressources d'un Ingénieur habile tel que Mr. de Ljungberg, dont les connoissances théorétiques et practiques sont très propres à inspirer de la confiance à tous ceux qui, faute de connoître le local, ne sont pas mieux que moi en état de porter un jugement décisif sur toutes les parties de ces projets, et qui sont obligés de s'en tenir uniquement aux principes généraux exposés dans le mémoire, principes qui me paroissent très solides et dignes de l'attention du gouvernement, en faveur duquel ces projets ont été conçus."

IV. Sur une machine pour mâter les vaisseaux.

Mr. le Major Polef, Quartier-maître de l'Etât-Major, ayant fait présenter le 7 Septembre 1795 la description d'une

machine pour élever de grands fardeaux à une hauteur considérable, et particulierement propre à mâter les vaisseaux, en priant l'Académie de lui en dire son sentiment: Mrs les Académiciens Kotelnikof et Roumovski furent chargés d'examiner le mémoire de Mr. Polef, et le rapport qu'ils en firent à la Conférence contenoit en substance ce qui suit: „L'auteur tâche de démontrer par des calculs numériques qu'au moyen de sa machine on peut mâter un vaisseau en moins de tems et avec moins de bras qu'on ne fait au moyen de la machine usitée; car d'après son comput 12 hommes peuvent mâter un vaisseau en 8 heures, tandis que moyennant la machine ordinaire 250 hommes employent 24 heures à ce travail A travers l'obscurité qui regne dans l'exposé de ce calcul on n'entrevoit que des principes en partié faux, en partie dubieux, qui le rendent erroné d'un bout à l'autre. Cependant comme la machine de Mr. Polef est une combinaison de plus de machines simples que celle dont on se sert ordinairement dans la mâture, il peut en résulter un avantage du côté de la force, mais cet avantage ne compense pas l'extrême lenteur, avec laquelle, contre l'opinion de l'auteur, le fardeau seroit élevé.“

V. Sur la trisection de l'angle de Mr. Pizzati.

Le 10 Décembre 1795 l'Académie reçut, de la part de Mr. l'Abbé *Pizzati* à Venise, un mémoire imprimé dédié à l'Académie, sous le titre: *Dissertazione sulla trisezione dell' angolo, ossia del arco, colla piana Geometria* etc. Comme l'auteur soumet sa solution de ce problème à l'approbation de l'Académie, Mr. l'Académicien Fuss fut chargé de l'examiner et d'en dire son sentiment à la séance suivante, c'est-ce qu'il fit par la lecture d'un rapport conçu en ces termes: „D'après la construction géométrique, par laquelle Mr. l'Abbé Pizzati prétend avoir rigoureusement résolu le problème de la Trisection de l'angle il faudroit que $\cos \frac{1}{3}\Phi = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})\cos\Phi$, où Φ marque l'angle à triséquer. Cette expression est vraye

lorsque $\Phi = 0$ et $\Phi = 90°$. Dans tous les autres cas elle se s'écarte sensiblement de la vérité; car

Pour	$\Phi = 15°$	on auroit	$\frac{1}{3}\Phi =$	5°,	29
—	$\Phi = 30$	— —	$\frac{1}{3}\Phi =$	10,	52
—	$\Phi = 45$	— —	$\frac{1}{3}\Phi =$	16,	6
—	$\Phi = 60$	— —	$\frac{1}{3}\Phi =$	21,	5
—	$\Phi = 75$	— —	$\frac{1}{3}\Phi =$	25,	45

D'où l'on voit que la construction de Mr. Pizzati, loin d'être rigoureusement vraye, comme il s'imagine, n'approche pas même autant de la vérité que plusieurs constructions empiriques connues et assez simples de ce problème. J'en connois une, où la faute pour l'arc de 45°, qui est ici de 1°, 6′, ne monte qu'à 29 secondes.

Les deux démonstrations que l'auteur donne de sa construction sont donc nécessairement vicieuses. Aussi quiconque se donnera la peine de les examiner, y découvrira sans peine, dans l'une et l'autre, une petition de principe rien moins que subtile. Outre ce vice de raisonnement les deux démonstrations ont encore le défaut de ne tenir aucune compte du pointe d'où l'on tire la ligne trisécante, ce qui est pourtant le point essentiel de la construction."

VI. Sur un mouvement prétendu perpétuel.

Le 19 Mai 1796 l'Académie reçut de la part de S. E. Mr. le Général-Major *Popof* un écrit intitulé: *Selbst-Beweg-Maschine, von Joh. Friedr. Heinle, nebst Bemerkungen*, envoyé par ordre de SA MAJESTÉ IMPÉRIALE, pour être examiné par l'Académie. Quoique l'invention d'un mouvement perpétuel implique déjà par sa nature une impossibilité, la Conférence chargea Mrs. les Académiciens Krafft et Fuss d'en donner leur sentiment par écrit, pour être communiqué à Mr. le

Général de Popof. L'essentiel du sentiment, porté par ces deux Académiciens, est: 1°) Que la machine de Mr. Heinle ne diffère en rien d'essentiel de celle dont le Journal des Sçavans de 1695 a fait mention et qui a déjà été refusée par Jean Bernoulli; 2°) que le projet de Mr. Heinle ne sauroit soutenir un examen rigoureux d'après les principes les plus solidement établis de la Statique et de la Dynamique des corps solides et fluides; vu qu'en appliquant ces principes à la machine en question, ils conduisent aux résultats suivans:

a) Que la machine, envisagée comme isolée et sans en faire le principe moteur pour d'autres mécanismes, dans la supposition d'un concours des circonstances les plus favorables, qui n'a jamais lieu dans la pratique, pourroit tourner autour de son axe et conserver pendant un petit espace de tems un mouvement de rotation; mais

b) Que cette rotation, supposé qu'elle eut lieu, se convertiroit bientôt, et sans que des obstacles *externes* s'en melassent, en un simple mouvement oscillatoire de peu de durée.

c) Que dans des suppositions moins favorables mais plus conformes à la nature et à l'expérience, le mouvement de la machine se reduit, dès le commencement, à de simples balancemens de peu de durée.

d) Que par conséquent, la machine n'étant, dans aucun cas possible, capable de se mouvoir d'elle même pendant un intervalle de tems tant-soit-peu considérable, elle ne sçauroit être employée comme force motrice, ni produire aucun des effets étonnans que l'auteur en promet avec une emphase qui prouve bien plus la vivacité de son imagination que la solidité de ses connoissances mécaniques.

VII. Sur un enduit pour la vaisselle de cuisine.

Mr. le Baron de *Meidinger* ayant envoyé, avec le mémoire manuscrit présenté de sa part le 21 Mars 1796, une petite casserole de cuivre couverte en dedans, au lieu de l'étamure, d'un enduit ou vernis de son invention: la Conférence remit la casserole et le mémoire à Mr. l'Académicien Lowitz et le chargea d'examiner si cet enduit est aussi durable et aussi peu nuisible à la santè que l'auteur le prétend. Voici le rapport que Mr. Lowitz en a fait:

„L'enduit de couleur d'imprimérie de la casserole de Mr. Baron de Meidinger a tenu si mal qu'après avoir laissé bouillir du vinaigre dans sa casserole pendant une demi-heure seulement, les parois en étoient presqu'entierement à découvert. Le vinaigre avoit pris, des particules détâchées du vernis, une couleur noirâtre et montroit des indices d'une dissolution de cuivre. Comme le vernis s'étoit mieux conservé au fond du vase, j'y fis bouillir de l'huile d'olive, et aussitôt que celle-ci commença à jetter des vapeurs, le vernis se détâcha aussi en partie au fond de la casserole.

J'essayai moi-même d'enduire de ce vernis deux casseroles de cuivre, selon les préceptes de Mr. de Meidinger, mais malgré plusieurs tentatives et toutes les précautions imaginables, je ne pus jamais réussir à éviter les boursouflures que la cuite faisoit naître dans ce vernis. Ayant enfin vernissé mes casseroles le moins mal que possible, j'y fis bouillir successivement du vinaigre, du lait et de l'huile, et malgré les boursouflures mon enduit se trouva être plus durable que celui de Mr. de Meidinger; car il ne s'en détacha qu'aux endroits où s'étoit formé des enlevures. Même en écurant mes vases avec du sable et de la potasse, l'enduit n'en parût point avoir souffert sensiblement. J'attribue cette grande différence entre la durée du vernis de Mr. de Meidinger et du mien au différent degré de la

cuite. Or comme il est très difficile d'observer exactement le degré convenable de cette cuite et d'éviter entièrement les enlevures de ce vernis: je crois que son introduction et son usage sont sujets à beaucoup de difficultés.

VIII. Sur la trisection de l'angle de Mr. Tyschkévitsch.

Le 19 Septembre 1796 l'Académie reçut une seconde prétendue solution de ce problème autrefois si fameux, de la part de Mr. le Lieutenant Tyschkévitsch, avec une représentation, par laquelle l'auteur prétend au prix proposé, selon son opinion, sur la découverte de la trisection. L'Académie lui fit répondre qu'un tel prix n'existoit pas, qu'elle fera cependant examiner son mémoire et qu'elle lui communiquera sous peu le jugement qui en aura été porté.

Un rapport de Mr. l'Adjoint Gourief qui avoit été chargé de cet examen, fit voir que cette trisection ne mérite aucune attention, parcequ'elle est fondée sur une supposition absolument fausse et contraire aux premieres notitions de la Géométrie élémentaire.

IX. Premier rapport de Mr. Pallas.

Mr. le Conseiller d'Etat et Chevalier Pallas ayant quitté St. Pétersbourg le 12 Août 1795, pour aller s'établir en Tauride, comme il a été dit plus haut: il envoya à l'Académie son premier rapport daté de Symphéropol le 22 Décembre. Ce rapport, écrit en allemand, contient ce qui suit:

„Je puis enfin anoncer à la Conférence académique mon heureuse arrivé en Tauride, après plusieurs empêchemens occasionnés d'abord par les courses nécessaires pour me mettre en possession des terres qui m'ont été très gracieusement accordées et pour y arranger mon économie, et dans la suite par des accès violens nephritico-haemorrhoïdaux.

J'arrivai de Moscou à Ekathérinoslav par un chemin nouveau très commode, très agréable et de plus de cent verstes plus court que le chemin de poste menant par Koursk et Toula. Ce nouveau chemin passe par Kolomna, Michaïlof, Voronesh, Ostrogoshsk et Izoum, le long de la Samara jusqu'à Ekathérinoslav. De là j'arrivai en Tauride par Nicopol et Pérécop.

Dans les belles et fertiles plaines du Gouvernement de Voronesh, surtout le long de l'Oscoll, dont je suivis le cours, je trouvai encore de jolis restes de la belle végétation de ces contrées, parmis lesquels se rencontra mainte plante inattendue de Sibérie, comme entres autres *Scutellaria lupulina*, *Polygala Sibirica*, *Onosma simplex*, *Pedicularis incarnata*, *Campanula lilifolia*, etc. Je découvris aussi le long du ruisseau Biryoutch une nouvelle espèce de *Salsola*, fort approchante de la *Salsola muricata*, qui n'a encore été observée d'aucun de nos voyageurs botanistes. La rive droite de l'Oskoll (dans les bois de laquelle croît en abondance le rosier sauvage pomifere que je n'ai vu nulle part en Russie) est la plus élevée et consiste en collines calcareomarneuses qui s'étendent jusqu'au Donetz. La rive gauche est une plaine souvent très sablonneuse. Le long du Donetz, dont les rives au dessus de l'Oskoll sont aussi montagneuses, on voit au dessous de l'embouchure de cette riviere alternativement des mantagnes de craye qui accompagnent la rive droit méridionale du Donetz jusqu'au Don, et il s'y présente le monastère de Sviätogorsk taillé dans la craye. La rive gauche du Donetz depuis l'Oskoll jusqu'au Don est une plaine sablonneuse non-interrompue.

Outre les charbons de terre déjà découverts et les mines de fer sur la riviere Lugan, où l'on se propose d'établir une fonderie de canon, les pays montagneux le long du Donetzk et de Slavensk semblent promettre encore beaucoup de découvertes minéralogiques. Mais les mines d'argent qu'on s'y étoit promis, seduit par de fausses épreuves faites sur du plomb, n'ont été

que de la manganèse, et on ne peut s'attendre dans ces contrées qu'à de pauvres mines à couche. Les couches les plus communes sont de la craye, du marne calcaire et du schiste argilleux, et rarement du grès.

Ces couches se coupent à la Samara qui se jette dans le Dnepr. Entre ces deux rivières le pays est plat et consiste en partie en terrain salé. Ici, comme dans tout le cercle de Donetzk on trouve abondamment ces monceaux de terre garnis de statues qui couvrent les tombes d'une nation encore indéterminée. A en juger d'après le costume des deux sexes et la physigonomie souvent très reconoissable de ces statues on pourroit les attribuer à une nation Mongale, peutêtre aux Huns; leurs façes sont toutes tournées vers l'Orient. Depuis une douzaine d'années on a emmené celles de ces statues, qui étoient les mieux travaillées et conservées, pour les placer aux coins des rues, dans les jardins des Slobodes et même dans Ekathérinoslav.

Sur le Dnepr, aux environs de Ekathérinoslav, suit un terrain sablonneux, et l'on voit clairement que ce sable doit son origine au granite en couches, rougeâtre et gris qui traverse le Dnepr en couches inclinées et perpendiculaires et qui cause les cataractes de ce fleuve, et tient la même direction avec les roches granitiques de la plaine élevée entre la Berda et Moloshnye Wody, de même qu'avec celles qu'on trouve sur l'Ingoul et le Boug, vers Elisabeth, qui font voir les mêmes caractères, la même alternation des couches et la même disposition à se décomposer en gravier et à la fin en sable.

Sur les roches granitiques qui forment la rive du fleuve auprès des cataractes on trouve quelques jolies plantes alpestres et bien d'autres qui sont propres à ces contrées. A la fertilité en bleds et en pâturage que j'avois trouvé cette année dans tout le gouvernement de Ekathérinoslav, je vis succéder, dans les déserts de Pérékop et dans toute la Tauride, un sol

brulé et une stérilité complette, occasionnée par la sêcheresse et les vents d'Est. Mais l'hyver pluvieux, doux et humide de cette année nous promet un riche dédommagement pour l'année prochaine.

N'ayant jusqu'aprésent rien reçu de mes effets et manuscrits, partis de St. Pétersburg au mois d'Août, pas même de leurs nouvelles: je ne puis, dans ce moment, rien envoyer pour les Actes; mais dès que je les aurai reçu, je ne différerai pas de m'acquitter de ma promesse et d'être à l'avenir un collaborateur assidu.

Symphéropol le 22 Décembre 1795.

P. S. Pallas.

VIII.

Leçons publiques.

Les Leçons publiques en langue Russe, que l'Académie s'est engagée à faire donner regulierement tous les ans pendant les quatre mois d'été, selon une institution qui date des premieres années de la direction de Me le Pincesse Daschkof, furent aussi données dans les deux années dont nous venons de rapporter les principaux évènemens.

En 1795. Les mêmes Académiciens et Adjoints qui s'étoient chargés l'année passée de cette tâche, s'en acquittérent aussi cette année-ci. Mr. le Conseiller de Cour Kotelnikof donna un cours de Mathématique; Mr. le Conseiller de Cour et Chevalier Ozeretskovski un cours d'Histoire naturelle; Mrs. les Adjoints Kononof et Zacarof le premier un cour de Physique expérimentale et le second un Cours de Chymie expérimentale d'après Lavoisier.

En 1796. Mrs. les Conseillers de Cour Kotelnikof et Chevalier Ozeretskovski donnérent leurs cours de Mathématique et d'Histoire naturelle; Mr. l'Académicien Severguine un cours de Minéralogie générale et Mr. Adjoint Gourief un cours de Physique expérimentale.

IX.

Ouvrages publiés par l'Académie.

Sans faire ici une énumération de plusieurs traductions des livres utiles, ni des ouvrages périodiques et de différens recueils dont l'Académie avoit à publier les continuations, comme par exemple celle de la Bibliothèque ancienne Russe (Продолженіе древней Россійской Библіоѳики); des Ежемѣсячныя сочиненія; des Calendriers géographiques et historiques etc., il a paru en ouvrages proprement académiques

1°) Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae Tomus IX. Petropoli 1795.

Ce volume contient, outre l'Histoire de l'année 1791 et un supplément de quatre mémoires de savant étrangers, dix-sept mémoires de Mathématique et de Physico-Mathématique, cinq mémoires de Physique et quatre mémoires d'Astronomie et de Météorologie.

2°) Tableau physique et topographique de la Tauride, tiré du Journal d'un voyage fait en 1794. Par *P. S. Pallas*. St. Pétersbourg 1795.

Ce mémoire, lu en Conférence le 29 Janvier 1795, avoit d'abord été déstiné pour les Actes; mais comme l'auteur avoit souhaité de le voir imprimé encore avant son départ, afin de

pouvoir en soigner lui-même la correction: l'Académie le fit publier séparément, se reservant de le faire insérer aussi dans le volume prochain des *Nova Acta*, pour ne pas touttraire à cette collection un pièce si propre à en faire un ornemens.

X.

Prix adjugés.

Nous avons rendu compte, dans l'Histoire de l'année 1794, page 53, du jugement que l'Académie avoit porté sur le seul mémoire qu'elle avoit reçu sur la question concernant l'état magnétique de la terre. L'auteur de ce mémoire après avoir été averti par le programme publié au commencement de l'année 1795, qu'on lui eut adjugé la moitié du prix, avoit demandé par une lettre anonyme du 28 Avril une prolongation du terme jusqu'au 31 Décembre, afin de pouvoir envoyer un supplément à ce mémoire, par lequel il comptoit de pouvoir satisfaire pleinement les désirs de l'Académie et aspirer au prix entier. Cette prolongation lui ayant été accordée, le Secrétaire reçut peu de tems après une lettre de Mr. Kratzenstein, datée de Friedrichsberg près de Copenhague le 9 Juin, lequel, après s'être anoncé comme auteur du mémoire couronné, rapporte les détails du terrible incendie qui a consumé avec une grande partie de la ville, sa maison, sa bibliothèque, ses manuscrits et ses instrumens. Dans cette triste position il prie l'Académie 1°) de lui envoyer, soit la moitié du prix, soit le prix entier, comme elle le jugera apropos après les explications qu'il lui avoit données dans sa lettre précédente anonyme; 2°) de différer l'impression de son mémoire, jusqu'à ce qu'il ait eu le tems de lui faire parvenir les additions qu'il se propose d'y faire. La mort qui termina peu après la carrière de ce savant estimable, a privé l'Académie de ces additions qui devoient suppléer à ce qu'elle avoit trouvé d'imparfait dans le mémoire en question.

Sur la question indéterminée de Mécanique proposée pour l'an 1795 et rapportée dans l'histoire de l'année 1794, page 54, l'Académie a reçu, dans le courant de cette année, huit mémoires, dont aucun n'a répondu entierement à son attente, mais dont trois ont mérité préférablement son attention, ce qui a déterminé la Conférence à partager le prix entre deux de ces mémoires et à accorder au troisième les honneurs de *l'accessit.*

Le premier de ces trois mémoires, côté N°. 2, avec la dévise: *Quam pulchra experientiae et rationis harmonia!* sous le titre: *Abhandlung vom geraden und schiefen Stosse oder Widerstand flüssiger Körper, nach welcher die Versuche mit den theoretischen Grundsätzen richtig übereinstimmen*, contient des recherches neuves et estimables. L'auteur a trouvé pour le choc directe et oblique, soit que le plan repose ou qu'il se meuve, des formules dont l'accord avec les résultats de plusieurs expériences judicieusement instituées prévient en faveur de sa théorie. Il a ajouté à ces recherches la solution de plusieurs problèmes relatifs à ce sujet, et finit son mémoire par l'application de ses principes à la théorie des moulins à l'eau et au mouvement des corps mus dans l'air.

Pour encourager l'auteur à continuer et à perfectionner ses recherches l'Académie lui a adjugé, dans sa séance du 24 Mars 1796, la moitié du prix stipulé. Le billet décacheté a nommé Mr. *Fréderic Guillaume Gerlach*, Professeur de Philosophie et Mathématique à l'Académie Impériale et Royale des Ingénieurs à Vienne en Autriche.

Le seconde mémoire, côté N°. 8, a pour titre: *Abhandlung und Angebung, wie mit neuerfundenen Luftwechsel-Machinen die auf Bergwerken seyende böse Wetter überall weg-*

zuräumen sind: aufgesetzt von Karl Wilhelm Böbert, Obersteiger auf dem Königlich Preussischen Bergwerk zu Rothenburg an der Saale. Quoique l'auteur de ce mémoire se soit nommé, contre la regle que l'usage préscrit, afin d'éviter tout soupçon de partialité, et quoique Mr. Boebert ne soit pas le premier inventeur de cette machine; en considérant que le nom de l'auteur a été jusqu'ici parfaitement inconnu et qu'il a perfectionné la machine déjà connue dans plusieurs de ses parties: l'Académie lui a adjugé l'autre moitié du prix en guise d'encouragement.

Quant au troisième mémoire, côté N°. 4, avec la dévise: *Semper plus ultra*, et le titre: *Beschreibung einer neuen Maschine, vermittelst welcher man die grössesten Provinzen in sehr kurzer Zeit und mit sehr wenigen Kosten messen, und welche am schicklichsten mit dem Namen eines geometrischen Wagens belegt werden kann*, l'Académie, en rendant justice aux connoissances de l'inventeur de la machine ingénieuse et théorétiquement juste, dont la construction et l'usage sont décrits d'une maniere claire et précise dans ce mémoire, a trouvé à son regret: que cette machine qui, pour remplir entierement le but de l'auteur, ne sauroit être de beaucoup simplifiée, est tellement compliquée, et composée de parties si délicates, qu'elle coûteroit une somme considérable et ne résisteroit que peu de tems aux secousses violentes et inévitables de la voiture cahottée sur des chemins rudes et difficiles; que l'exécution n'en sauroit être recommandée; mais que l'auteur mérite qu'on fasse de son mémoire une mention honorable.

Les autres mémoires côtés N°. 1, 3, 5, 6, 7 furent mis au rebut et les billets cachetés brulés selon l'usage.

Sur la seconde question, concernant les parties constituantes de la lessive du sang, l'Académie n'a reçu aucun mémoire.

EXTRAITS
DES MEMOIRES
CONTENUS
DANS CE VOLUME.

CLASSE MATHEMATIQUE
ET
PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

I.

Exempla quarundam memorabilium aequationum differentialium, quas adeo algebraice integrare licet, etiamsi nulla via pateat variabiles a se invicem separandi.

Auctore *L. Eulero*, pag. 3.

On conçoit bien, et le nom de l'auteur en est garant, qu'il n'est point question ici de ces équations difficiles à séparer, dont on peut, pour ainsi dire, déviner les intégrales, ni des intégrales particulieres de pareilles équations. Ce seroit à la verité un sujet second, mais peu utile, que d'imaginer d'équations inséparables dont on pût déviner l'intégrale algébrique complette, ou trouver quelque intégrale particuliere. On sçait, par exemple que si M, N, P, Q, S et V désignent des fonctions de x et y, et que $\partial V = M\partial x + N\partial y$, l'équation finie $V = o$ satisfait à l'équation différentielle $\partial x\,(PV + MS) + \partial y\,(QV + NS) = o$, mais que cette fonction V, qu'il seroit facile de trouver pour

chaque équation proposée, n'en seroit qu'une intégrale particuliere.

L'intention de feu Mr. Euler a été de produire dans ce mémoire des équations différentielles qui se refusent à toutes les méthodes d'intégration connues, et dont néanmoins on peut donner les intégrales complettes et même algébriques. Il déduit de pareilles équations, avec leurs intégrales algébriques, de l'équation différentielle connue $\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{\partial y}{\sqrt{Y}}$ où $X = \alpha + 2\beta x + \gamma x x + 2\delta x^3 + \varepsilon x^4$ et $Y = \alpha + 2\beta y + \gamma y y + 2\delta y^3 + \varepsilon y^4$, dont l'intégrale complette, qu'on peut encore représenter de différentes autres manieres, est

$$\frac{\sqrt{X} + \sqrt{Y}}{x - y} = \sqrt{2\lambda + \gamma + 2\delta(x+y) + \varepsilon(x+y)^2},$$

λ étant la constante arbitraire introduite par l'intégration. Cette même équation est donc aussi l'intégrale complette de l'équation différentielle

$$\partial x(\alpha + 2\beta y + \gamma y y + 2\delta y^3 + \varepsilon y^4) + \partial y(\alpha + \beta(x+y) + \gamma x y + \delta x y(x+y) + \varepsilon x x y y) = \lambda \partial y (x-y)^2$$

transformée de $\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{\partial y}{\sqrt{Y}}$, qui donne $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\sqrt{X}}{\sqrt{Y}}$, et d'où résulte la précédente, en mettant à la place de X et Y leurs valeurs. C'est cette intégration qui sert de fondement à ce mémoire et qui a fourni à feu Mr. Euler les exemples qui en font le sujet.

II.

De variis modis numeros praegrandes examinandi, utrum sint primi nec ne?

Auctore *L. Eulero*, pag. 14.

Les diverses méthodes que l'auteur donne dans ce mémoire, pour examiner de très-grands nombres, s'ils sont pre-

miers ou non, sont fondées sur la propriété: que si un nombre N est de deux manières de la forme $\alpha xx + \beta yy$, il n'est pas premier. L'examen qui fait proprement le sujet de ce mémoire est précédé de la démonstration de différens théorèmes sur la nature des nombres, qui, sans être d'un usage immédiat, ne laissent pas d'être dans une étroite liaison avec cette matière. Ces théorèmes sont:

$$\text{Si } N = \alpha a^2 + \beta b^2 \text{ et } N = \alpha A^2 + \beta B^2.$$

1°) Les nombres $aB + Ab$ et $aB - Ab$, après les avoir divisé par les nombres qui ne peuvent pas être facteurs de N, donneront les deux facteurs de ce nombre N.

2°) Les nombres $\alpha aA + \beta bB$ et $\alpha aA - \beta bB$ auront avec le nombre N un commun diviseur.

3°) Le nombre $\alpha p^2 + \beta q^2$, après avoir été divisé ou par α, ou par β, ou par $\alpha\beta$, ou par une puissance quelconque de 2, contiendra toujours un facteur du nombre N, où $p = a \pm A$ et $q = b \pm B$.

4°) Le produit de deux nombres de la même forme $\alpha xx + \beta yy$ est toujours de la forme $\alpha\beta xx + yy$.

5°) Le produit de deux nombres, dont l'un est de la forme $\alpha x^2 + \beta y^2$ et l'autre de la forme $\alpha\beta x^2 + y^2$, sera toujours de la forme $\alpha x^2 + \beta y^2$.

6°) Si un nombre non-premier est d'une seule façon de la forme $\alpha x^2 + \beta y^2$, on pourra assigner d'autres nombres non-premiers plus petits, qui seront aussi d'une seule façon de la forme $\alpha x^2 + \beta y^2$.

7°) Si un nombre non-premier, quelque grand qu'il soit, est d'une seule façon de la forme $\alpha\beta x^2 + y^2$, on pourra assigner

d'autres nombres composés plus petits qui seront aussi d'une seule façon de cette forme $\alpha\beta x^2 + y^2$.

De la derniere proposition résulte : que si aucun nombre non-premier, moindre que $4\alpha\beta$, n'est contenu dans la forme $\alpha\beta x + y$, aucun nombre non-premier plus grand que $4\alpha\beta$ ne sera contenu non plus dans cette forme. Desorte que tout nombre qui est d'une seule façon de la forme $\alpha\beta x^2 + y^2$ sera premier. La même chose n'est pas vraye de la forme $\alpha x^2 + \beta y^2$, à moins qu'on ne donne à α et β certaines valeurs que l'auteur appelle nombres convenables (*numeri idonei*) et c'est à la recherche de ces nombres qu'il s'occupe dans le reste de ce mémoire. Il en trouve, par des raisonnemens, qu'il seroit trop long de suivre, 65 pareils nombres convenables qui le mettent en état d'examiner tout nombre, quelque grand qu'il soit, s'il est premier ou non.

III.

Resolutio formulae Diophanteae $ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$ per numeros rationales.

Auctore *L. Eulero*, pag. 45.

Dans le Tome XVII. des nouveaux Commentaires feu Mr. Euler s'étoit occupé du problème de trouver quatre nombres A, B, C, D tels que $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$, ce qui se reduisoit facilement à trouver quatre nombres a, b, c, d tels que $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$, mais quoiqu'il eut trouvé alors deux solutions de ce probleme, les nombres en étoient devenus si immenses, qu'on ne sera pas étonné de voir qu'il ait repris dans la suite ce même problème, et que, selon sa coûtume, il

en ait rendu la solution plus parfaite et qu'il ait généralisé ses recherches sur cette matiere.

La résolution de l'équation exposée dans le titre de ce mémoire, où m et n sont des nombres donnés, consiste : à prendre à volonté un nombre q, à en déduire deux valeurs $\alpha = \frac{nqq}{nqq-m}$ et $\beta = \frac{m}{nqq-m}$, ensuite une valeur $z = \frac{-3}{4\alpha+\beta(4\alpha-1)^2}$ et $s = \frac{4\alpha-1}{2}$, d'où l'on tire $p = q(1+z)$ et $\frac{a}{c} = 1 + sz$, desorte que a et c seront trouvés en entiers. Enfin on aura $b = cp$ et $d = aq$, et les quatre nombres a, b, c, d, ainsi trouvés seront tels que $ab(maa+nbb) = cd(mcc+ndd)$.

Moyennant cette solution, en prenant $m = 1$ et $n = 1$ et $q = 3$, on trouve quatre nombres $a = 25$, $b = 291$, $c = 193$ et $d = 75$, qui satisfont à l'équation $ab(aa+bb) = cd(cc+dd)$; et comme, en mettant $a = p+q$, $b = p-q$, $c = r+s$, $d = r-s$, l'équation devient $p^4+q^4 = r^4+s^4$ on obtient quatre nombres $p = 158$, $q = 133$, $r = 134$, $s = 59$ qui sont incomparablement plus petits que ceux que feu Mr. Euler avoit trouvés dans le XVII. Tome des nouveaux Commentaires.

Ajoutons une propriété remarquable de l'équation $ab(aa+bb) = cd(cc+dd)$, c'est qu'en faisant $A = (a+b)+(c+d)$; $B = (a+b)-(c+d)$; $C = (a-b)+(c-d)$; $D = (a-b)-(c-d)$, il y aura $AB(AA+BB) = CD(CC+DD)$.

IV.

Solutio problematis mechanici.

Auctore *L. Eulero*, p. 64.

Un fil de longueur indéterminée est passé plusieurs fois et tout entier autour d'un disque circulaire; son extrèmité est attâchée dans un point, et plus bas, à une distance égale au rayon du disque, se trouve un plan incliné, sur lequel on pose le disque, de manière que lors qu'il descend en vertu de sa pésanteur, il déroule par le bas le fil dont il est enveloppé. On demande son mouvement. Voici le problème dont ce mémoire contient la solution.

V.

De motu baculi super plano inclinato, cui insistit, descendentis.

Auctore *Nicolao Fuss*, pag. 70.

Le bout d'un bâton insiste à un plan incliné, sous un angle quelconque, mais dans un plan vertical passant par l'angle d'inclinaison du plan incliné et du plan horisontal, et glisse, toujours dans le même plan vertical le long du plan incliné. On demande son mouvement. C'est le problème dont Mr. Fuss donne ici la solution, en déterminant, pour une position quelconque du bâton, le tems écoulé, l'espace parcouru et la pression. Ce problème fait suite de celui qu'il a traité autrefois dans le VIme Vol. des *Nova Acta*, où les deux extrémités d'un bâton glissent l'une le long d'un plan horisontal, l'autre le long d'un plan vertical, dans un plan perpendiculaire aux deux plans mentionnés.

VI.

Examen théorétique des revêtemens à dos incliné et des revêtemens à assises inclinées, proposées par quelques auteurs de fortification

par Mr. *N. Fuss*, pag. 80.

La dépense énorme qu'exige la construction des places fortes dont les ouvrages sont revêtus de maçonnerie, a donné naissance à différens projets d'épargne. Quelques Ingénieurs, soutenant que les revêtemens de Vauban étoient beaucoup plus forts que ne l'exige la poussée des terres qu'ils doivent contenir, ont proposé de faire les revêtemens moins épais que cet auteur classique prétend qu'ils dussent l'être ; d'autres ont proposé d'incliner ou les assises, ou le dos du revêtement, moyennant quoi on seroit en état d'en diminuer l'épaisseur encore d'avantage. Dans ce mémoire Mr. Fuss examine ces trois idées selon les regles de la Statique. Il soumet premièrement les profils de Vauban à la décision de la Théorie et trouve que pour les hauteurs au dessous de $47\frac{2}{3}$ pieds les revêtemens de ce grand Ingénieur sont trop forts, et trop foibles pour les hauteurs au dessus de $47\frac{2}{3}$ pieds. Il détermine l'épaisseur au cordon et le talud que les loix de l'équilibre prescrivent. Passant ensuite aux deux autres projets de construction, il établit le point au delà duquel l'inclinaison ou des assises ou du dos du revêtement ne sauroit aller ; il en détermine l'épaisseur et l'épargne qui en résulteroit dans la quantité des matériaux et dans la main d'oeuvre. Ces déterminations sont fondées sur la supposition que les pierres soyent posées simplement l'une sur l'autre sans mortier, et qu'elles résistent par le seul frottement, desorte qu'une maçonnerie à mortier médiocrement bonne, faite selon les dimensions de l'au-

teur, aura une force de beaucoup supérieure à celle qu'demande strictement la condition de l'équilibre, et suffisante pour résister à la poussée des terres qu'elle doit contenir.

VII.

Recherches sur les équations linéaires aux différences partielles du troisième degré.

Par Mr. *Jean Trembley*, pag. 101.

Le dessein du celèbre auteur de ce mémoire est de faire voir jusqu'à quel point il possible d'appliquer aux équations du troisième degré la méthode qu'il a exposée dans le mémoire inséré dans l'Histoire de l'Académie pour l'an 1791, et de rechercher les différences qu'entraîne la nature particulière des équations du troisième degré.

Il considère l'équation $\Pi\, F : \Phi$, Π et Φ étant des fouctions quelconques de x et y et F le signe d'une fonction arbitraire. Il cherche par la différentiation $(\frac{\partial z}{\partial x})$, $(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2})$, $(\frac{\partial\, \partial z}{\partial x \partial y})$, $(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2})$, $(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3})$, $(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y})$, $(\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2})$, $(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3})$ et multipliant réspectivement les dix équations qui en résultent par T, S, R, Q, P, N, M, L, K, F, et égalant séparément à zéro les coëfficiens de $F : \Phi$, $F' : \Phi$, $F'' : \Phi$, $F''' : \Phi$, il obtient une équation du troisième degré et quatre équations de condition, trois en Φ et la IVe en Π, qui, en y substituant Φ', Φ'', Φ''', à la place de Φ dans les trois premieres, donneront dix équations, au moyen desquelles on détermine les qnantités $\frac{T}{F}$, $\frac{S}{F}$, $\frac{R}{F}$, $\frac{Q}{F}$, $\frac{P}{F}$, $\frac{N}{F}$, $\frac{M}{F}$, $\frac{L}{F}$, $\frac{K}{F}$, et il restera une équation de condition à remplir, après quoi l'intégrale de l'équation du troisième degré sera $z = \pi\, (F : \Phi' + \int : \Phi''$

$+ \Sigma : \Phi'''$). Cette équation de condition détermine la relation entre Φ', Φ'', Φ''', pour que l'équation différentielle soit du troisième degré, ayant pour l'intégrale

$$z = \Pi\,(F : \Phi' + f : \Phi'' + \Sigma : (\sigma : \Phi' + \varrho : \Phi'').$$

Le même résultat est confirmé par une autre procédé fondé sur la voye un peu longue des éliminations.

L'auteur éclaircit sa méthode, en l'appliquant à une équation traitée autrefois par Mr. le Marquis de Condorçet dans les Mémoires de l'Académie de Paris, et il parvient au même résultat. Après quoi Mr. Trembley fait voir *a priori et a posteriori* que l'équation $z = y\,F : (b\,x - y) + y\,y\,\Sigma : (x + y)$, que Mr. Monge propose dans les Mémoires de Turin, comme l'intégrale d'une équation différentielle du second degré, ne l'est pas réellement, mais qu'elle est une intégrale incomplette d'une équation différentielle du troisième degré, et que pour la rendre complette il faut y ajouter de terme $y \cdot f : (x + y)$.

Mr. Trembley fait ensuite l'application de ses recherches à une équation traitée autrefois par feu Mr. Euler, dans le 3e Vol. de son calcul intégral, et à quelques autres cas particuliers.

VIII.

Essai de démontrer rigoureusement une théorème fondamental des équations de condition de la différentielle des fonctions à plusieurs variables et du calcul de variations.

Par Mr. *S. Gourief.* page 154.

L'auteur de ce mémoire ayant entrepris de démontrer le calcul différentiel dans toute la rigueur mathématique, sans le secours de quantités infiniment-grandes et infiniment-petites, en ne faisant usage que d'accroissemens et décroissemens indéfinis, tels que les admettoient les anciens Géomètres, il a porté son attention aussi sur les équations de condition de la différentielle exacte des fonctions à deux et plusieurs variables et au calcul de variation. Et ayant remarqué, dans les livres nouvellement mis au jour, que les Géomètres du premier rang commencent à éluder les infinis, il a cru que par le présent mémoire il pourroit contribuer à son tour quelque chose à dégager les mathématiques de plus en plus de l'employ de l'infini.

IX.

De polygonis symmetrice irregularibus circulo simul inscriptis et circumscriptis.

Auctore *N. Fuss.* pag. 166.

Dans un mémoire antérieur à celui-ci, qui se trouve dans le Tome X. des *Nova Acta*, l'auteur avoit résolu le pro-

blème d'inscrire à un cercle donné un quatrilatère, auquel on pût inscrire un cercle, de même que le problème de trouver la distance des centres du cercle circonscrit et inscrit. Ici il revient à cette matière et donne la solution des mêmes problèmes pour le Pentagone, l'Hexagone, l'Heptagone et l'Octogone. Mais n'ayant pu réussir avec les polygones irréguliers quelconques, il s'est borné à ceux qu'il appelle *symmétriquement* irréguliers, et qui sont doués d'un diamètre passant par les deux centres et divisant le polygone en deux figures semblables et égales.

X.

De evolutione sectionum Cylindri.

Auctore *F. T. Schubert.* pag. 190.

Une section quelconque du cylindre est une *ellipse*, à l'exception des cas, où le plan de la section est parallèle ou perpendiculaire à la base. Mais le cylindre étant roulé, ou bien sa surface étant développée sur un plan parallèle à son axe, le développement d'une section elliptique du cylindre, produit une courbe remarquable à plusieurs égards. Les propriétés de cette courbe, sa quadrature qui convient avec celle d'un morceau du cylindre, et sa rectification qui est égale à celle de l'ellipse, sont démontrées dans ce mémoire.

XI.

Solution de quelques problèmes remarquables de l'Analyse indéterminée.

Par *C. F. Kausler.* pag. 207.

Les problèmes d'Analyse indéterminée dont Mr. Kausler donne ici la solution sont au nombre de deux

1°) K étant un nombre entier quelconque trouver les valeurs x et y qui rendent carré l'expression $x^4 + K x^2 y^2 + y^4$.

2°) Trouver tous les nombres entiers contenus dans la formule $(N^2 - 4) Z^2 + n$, n et Z étant des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires.

Les amateurs de l'Analyse de Diophante qui seront curieux de savoir de quelle manière ces problèmes sont résolus, ne manqueront pas de lire le mémoire même, auquel nous sommes obligés de renvoyer.

XII.

Nova demonstratio theorematis, nec summam, nec differentiam duorum biquadratorum biquadratum esse posse.

Auctore *C. F. Kausler.* pag. 287.

Avant de démontrer le théorème qui fait le sujet de ce mémoire, l'auteur prouve l'impossibilité de trouver deux nombres entiers x et y tels que $x^2 + y^2$ et $x^2 - y^2$ soyent à la fois des nombres carrés, après quoi il fait voir par un raisonnement, auquel on pourroit peutêtre désirer plus de développement, que jamais $x^4 \pm y^4 = z^4$. Voici son raisonnement: Si $x^4 + y^4 = z^4$, il y a $x^4 = (z^2 + y^2)(z^2 - y^2)$. Ainsi ce bicarré de x est un produit de deux facteurs et partant nécessairement un produit de deux facteurs, bicarrés $m^4 n^4$. Il y a en tout 19 suppositions qui rendroient $(z^2 + y^2)(z^2 - y^2) = m^4 n^4$, mais qui toutes sont ou absurdes par elles mêmes ou impossibles en vertu du théorème précédent.

XIII.

Nova demonstratio theorematis, nec summam, nec différentiam duorum cuborum cubum esse posse.

Auctore *C. F. Kausler.* pag. 245.

L'auteur commence par démontrer que $x - y$ et $x^2 + xy + y^2$ ne sauroient être des cubes à la fois. Ensuite il démontre que si T et W sont des nombres entiers positifs, $9\,W^3 + 9\,W^2 + 3\,W$ ne sauroit jamais être de la forme $T\,(T + 1)$. Ensuite, comme dans le cas $x^3 - y^3 = z^3$, il y auroit $z^3 = (x - y)\,(x^2 + xy + y^2)$, l'auteur fait voir que toutes les suppositions qu'on pourroit faire pour rendre le produit de ces deux facteurs un cube, ou mènent à une absurdité, ou sont impossibles en vertu des deux théorémes préliminaires.

CLASSE DE PHYSIQUE.

I.

Methodus nova potassinum carbonicum plene saturatum obtinendi, adjectis novis observationibus potassini acido carbonico imperfecte saturati naturam spectantibus.

Auctore *T. Lowitz.* pag. 257.

On connoît plusieurs moyens d'obtenir le carbonate de potasse parfaitement saturé d'acide carbonique: toutes se reduisent à mettre en état de saturation parfaite la partie libre du carbonate de potasse imparfaitement saturé d'acide carbonique, par l'addition d'une plus grande portion de cet acide; par exemple par l'exposition d'une solution de carbonate de potasse à l'air libre, ou dans un endroit où ce trouvent des matieres en fermentation; ou bien par la saturation immédiate avec le gaz acide carbonique tiré de la craye au moyen de l'acide sulfurique; ou bien enfin par la destillation du carbonate d'ammoniaque sur de la potasse dépurée etc.

La nouvelle méthode que Mr. Lowitz décrit ici consiste au contraire à séparer du carbonate de potasse dépuré et in-

complettement saturé, son excédent libre, ce qui peut se faire de deux manières.

1°) En versant petit-à-petit dans une solution de potasse purifiée, pendant qu'on la remüe fortement moyennant une spatule, du vinaigre destillé, jusqu'à ce que le melange commence à montrer par l'effervescence que l'excédent du carbonate de potasse est saturé; on obtient de cette manière, aptès l'évaporation et le refroidissement du fluide, une carnate de potasse parfaitement saturé d'acide carbonique, qu'on peut délivrer de l'acétite de potasse qu'il contient encore, par la répétition de la solution et de la cristallisation.

2°) La seconde méthode consiste à dissoudre une quantité suffisante de soufre dans une solution de potasse dépurée doucement brouillante; à crystalliser ensuite le fluide passé au filtre; et à délivrer enfin, par une cristallisation réitérée, les cristaux obtenus, du sulfure de potasse qui leur adhère encore.

Les solutions de ce sel employés pour la dépuration doivent être instituées toujours avec de l'eau froide, et l'évaporation effectuée au moyen d'une chaleur aussi douce que possible, parcequ'une trop grande chaleur volatiliseroit une portion de l'acide carbonique.

II.

Déscription de la célèbre mine d'argent de Zméof aux monts d'Altaï en Sibérie.

Par Mr. *B. F. I. Hermann.* page 275.

L'auteur de ce mémoire observe d'abord que la nature même a divisé les mines de Sibérie en trois grands départemens

placés à de grandes distances l'un de l'autre. Le plus voisin de l'Europe est celui de Cathérinebourg qui s'étend sur toute la grande chaine des monts d'Oural; le second, plus éloigné vers l'est, est celui de Kolyvan, auquel appartiennent toutes les mines montagnes altaïques, séparées des monts d'Oural par des plaines immenses; le troisième enfin et le plus oriental est celui de Nertchinsk, dans la Daourie.

C'est dans le second de ces départemens, celui de Kolyvan, que se trouve la celèbre mine de Zméof, connüe aux allemands sous le nom de Schlangenberg. Elle est située dans les montagnes qui forment les premiers grandins occidentaux de cette grande grouppe connüe sous le nom de monts d'Altaï, sous la latitude de 51°, 9′ et la longitude de 79°, 49′, à compter du méridien de Paris.

Pour faire connaître cette riche mine de Zméof mieux qu'elle ne l'étoit jusqu'à présent, Mr. l'Académicien Herrmann donne ici cinq planches: savoir le profil perpendiculaire et les profils horizontaux, tant à la surface qu'à la profondeur de 29, 37, 76 et 86 toises, et enfin la vüe de la mine, accompagnées d'une déscription détaillée des roches, gangues et mines que cette celèbre montagne métallifère contient.

III.

Mirabil. Jalaparum hybridarum ulterius continuata descriptio.

Auctore *J. T. Koelreuter.* pag. 305.

Le celèbre auteur de ce mémoire continue à décrire ici les résultats des expériences qu'il a faites en différens tems sur la production des plantes mulets, par le mélange de diverses espèces d'une même plante. C'est la troisième suite et la continuation des expériences faites sur l'accouplemens de plusieurs espèces du Jalap, depuis la 23me jusqu'à la 44e, comprenant la déscription exacte et détaillée de toutes les variétés qu'ont produit ces accouplemens diversifiés.

IV.

Cheirantus Tauricus

descriptus ab *Joanne Lepechin.* pag. 336.

Mr. Lepechin donne ici la déscription d'une plante tirée de l'herbier de feu Mr. l'Académicien Zoujef, trouvée en Crimée et appartenant au genre du Cheiranthus.

V.

Déscription d'une nouvelle mine de cuivre nommée Achirite.

Par Mr. *B. F. J. Hermann.* pag. 339.

Il y a quinze ans qu'on a vu en Sibérie pour la premiere fois une pierre verte que feu Mr. l'Académicien Ferber qui en avoit vu des échantillons, avoit pris d'abord pour une émeraude orientale et une autrefois pour un fluor. Mr. Hermann ayant tâché, pendant son séjour aux mines altaïques de se procurer de cette prétendue émeraude, il apprit qu'un marchand Boukharien, nommé *Achir Mekhmed,* demeurant à Semipalatnaya, avoit apporté un jour des Kirgises un sac rempli de ces pierres vertes qui, à la suite de essais faits dans un des laboratoires des minieres d'Altaï, se trouvèrent contenir une assez grande quantité de cuivre. La rareté extrême de ces pierres ne permettant pas de continuer les recherches, on se contenta d'avoir trouvé qu'au lieu d'être une véritable émeraude cette pierre n'étoit qu'une espèce de mine de cuivre, à laquelle en attendant on avoit donné le nom d'*Achirite.*

Ici Mr. Hermann donne la déscription détaillée de cette mine de cuivre, en la faisant connoître par rapport à sa couleur, transparence, pesanteur, cristallisation, forme, lueur, cassure, dureté, parties constituantes, propriétés au feu, usage et lieu natal.

VI.

Déscription d'une nouvelle espèce de canard et d'une variété de l'huitrier.

Par Mr. l'Adjoint *Sevastianof.* pag. 346.

La nouvelle espèce de canard dont Mr. Sebastianof donne ici la déscription et le dessin, a été faire d'après un exemplaire de la collection d'oiseaux apportée par le Capitaine de la Flotte Billings de son voyage fait dans l'archipel situé entre le Kamtchatka et les côtès occidentales de l'Amérique. Comme ce Canard porte, dans le catalogue qui a été remis à l'Académie avec cette collection, le nom de *Anas Canagica*, l'auteur présume que cette nouvelle espèce a été trouvée sur l'île Canaga ou Kyktak, l'une des Aléoutes.

L'huitrier dont il est question dans ce mémoire ressemble parfaitement à l'huitrier commun, connû dans le systeme sous le nom de *Haematopus Ostralega*, mais il en diffère par la couleur du bec, des pieds et de tous le corps. Il diffère de même de la variété que Bougainville a rencontrée en très grande quantité aux isles Malouines.

VII.

Rémarques sur les différentes méthodes de rendre le fer malléable.

Par Mr. *B. F. J. Herrmann.* pag. 352.

Le but de ce petit mémoire, qui doit son origine à quelques observations qui ont été communiquées à l'auteur, lors de son dernier voyage à Olonetz, est de faire voir que le fer

devient malléable par des agens d'une nature toute différente, c'est-à-dire non seulement par l'action du feu, dont l'application à cet effet souffre pourtant une quantité de modifications, mais aussi par l'air, et même par l'eau de mer.

VIII.

Déscription de l'Acarauna longirostris, nouveau genre de poisson, appartenant à l'ordre des torachiques.

Par Mr. l'Adjoint *Sevastianof.* pag. 357.

Dans une collection d'animaux du Brésil, envoyés en 1791 du Portugal à feue l'Impératrice CATHERINE II. de glorieuse mémoire, et remise par ordre de cette Souveraine à l'Académie, pour être conservée dans son musée, Mr. Sevastianof a trouvé le poisson, remarquable par la forme singuliere de son corps, dont il donne ici la déscription et le dessin. Ni Artedi, ni Linné, ni Bloch le plus moderne de tous les Ichtyologues, n'en ayant fait aucune mention, Mr. Sevastianof croit ne s'être point trompé, en faisant de ce poisson non seulement une nouvelle espèce mais même un nouveau genre, dont il établit ici les signes distinctifs.

IX.

De Ossibus ligno inclusis.

Auctore *N. Ozeretskovski.* pag. 367.

L'histoire du bois, comment et où il a été trouvé. Déscription des os qui y sont enfermés et représentés sur la planche XII. Conjecture et raisonnemens sur ce rare phénomène.

X.

De speciebus systematicum genus Trichechi constituentibus.

Auctore *N. Ozeretskovski.* pag. 371.

Déscription des espèces rapportées à ce genre par les auteurs des systèmes. La différence des espèces les fait séparer en deux genres. La belle figure du Lamantin est ajoutée à ce mémoire, pour faire voire la différence entre celui-ci et la vache marine ou Morge.

XI.

Distribution méthodique des pierres de roche agrégées.

Par Mr. *Basile Severguine.* page 376.

L'auteur de ce mémoire avoit déjà promis, dans un mémoire antérieur qui se trouve dans le VIIe Tome des *Nova Acta*, une distribution méthodique des pierres de roche agrégées, en exposant en même tems les raisons qui l'ont engagé à prendre une route un peu différente de celle qui a été adoptée jusqu'ici. S'étant occupé depuis de l'examen ultérieur de ces pierres aggrégées, en les contemplant sous tous les différens points de vue qui ont pu se présenter, il a étudié en même tems avec attention les travaux des plus célèbres Minralogistes qui se sont occupés du même sujet, et il a taché d'accorder les différences qu'il a trouvé chez plusieurs savans distingués, par la manière de distribuer les roches aggregées qu'il propose dans ce mémoire.

Mr. Severguine divise les pierres de roche aggregées tout comme on divise les minéraux simples, en roches pierreuses, salines, bitumineuses et métalliques, ce qui forme ses classes, auxquelles il ajoute encore les terres aggrégées.

Les roches aggrégées pierreuses se subdivisent en roches silicieuses, argilleuses, talcqueuses et calcaires, ce qui forme les genres de l'auteur. Chacun de ces genres se subdivise en cristallines, schisteuses, empatées, amygdaliques, brèches, sablonneuses. C'est d'après cette division qu'il donne la classification entiere.

XII. et XIII.

1) Notice sur une nouvelle variété de Spath de plomb blanc. 2) Notice sur l'oxide de fer en forme d'aiguilles qui se trouve sur les améthystes de l'isle de Kija en Onega.

Par Mr. *Basile Severguine.* page 392.

Mr. l'Académicien Severguine décrit dans ces deux notices l'apparence extérieure et intérieure, la transparence, l'attouchement, la dureté, la pesanteur, les qualités chimiques, la gangue et le lieu natal d'une nouvelle variété de Spath de plomb blanc des minières de Salairskoy, de même de celle de l'oxide de fer, ou des aiguilles ferrugineuses, dont se touvent recouvertes les améthystes trouvées dernierement sur une isle du lac d'Ouega, améthystes dont Mr. l'Académicien Hermaun a présenté, il n'y a pas long tems, des echantillons a l'Académie.

CLASSE
D'ASTRONOMIE ET DE MÉTÉOROLOGIE.

I.

Observations de Venus, faites à l'observatoire de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, vers le tems de la plus grande digression occidentale de cette planète, qui a eu lieu en Mai 1798.

Par Mr. l'Abbé *Henry*, pag. 399.

C'est une suite d'observations faites depuis le 22 jusqu'au 27 Mai de l'année mentionnée, que Mr. l'Abbé Henry présente ici. Elles sont faites sur la planète de Venus, dans la vüe de les comparer aux tables, vu que ces sortes de comparaisons sont toujours utiles au progrés de l'Astronomie en fournissant les moyens de rectifier les élémens des orbites planétaires.

Les passages au méridien de Venus et des étoiles auxquelles elle a été comparée, ont été observées en même tems à la lunette méridienne et au quart-de-cercle mural; et comme

ces passages ne diffèrent pas sensiblement, Mr. Henry auroit pu se servir indifféremment des uns et des autres, pour en conclure l'ascension droite de la planète; cependant il a préféré pour cet effet les observations faites à la lunette méridienne, parcequ'il la croit plus exactement dans le plan du méridien que le quart-de-cercle.

De toutes les observations rapportées dans ce mémoire il résulte une erreur moyenne des tables en longitude de — 16″, 6 et en latitude de — 9″, 9.

II.

Meditatio de figura telluris exactius cognoscenda.

Auctore *Steph. Rumovsky*, pag. 407.

En examinant les recherches des auteurs sur la grandeur et la figure de la terre on s'apperçoit bientôt qu'ils diffèrent tant soit peu dans le rapport entre l'axe de la terre et le diamètre de l'équateur quoique déduit des mêmes données. La source de cette petite différence vient de ce qu'ils déduisent ce rapport de formules qui sont seulement approchamment vrayes. Ceci a engagé le célèbre auteur du présent mémoire à comparer tous les dégrès mesurés jusqu'ici avec le degré du Pérou et avec celui de Laponie, et de déduire de la formule rigoureusement vraye la différence entre l'axe de la terre et le diamètre de l'équateur. Pour cet effet Mr. Roumovski debute par la solution du problème suivant:

„Considérant la terre comme Ellipsoïde, déterminer le „rapport entre le diamètre de l'équateur et l'axe de la „terre, en connoissant la grandeur d'un degré du meridien „sous une latitude donnée.“

et il en fait l'application à tous les degrés mesurés jusqu'à présent, ce qui lui donne des résultats qui varient depuis $\frac{1}{102}$ jusqu'à $\frac{1}{666}$.

Cette différence, que quelques auteurs mettent sur le compte de la conformation différente des méridiens, tandisque d'autres l'attribuent à des erreurs commises dans l'observation de la hauteur des astres, l'auteur panche aussi à l'attribuer aux erreurs inévitables des distances au zénith qui peuvent monter à 2 et 3 secondes, et produire dans la longueur du degré mesuré une faute de 100 toises. Ceci remarqué l'auteur observe qu'en faisant certaines corrections qui ne surpassent pas ce terme de 100 toises, aux différens degrés mesurés, il résulte de toutes les mesures à très peu près le même rapport que donne la loix de la gravitation. Cela non obstant l'auteur est du sentiment de feu l'Abbé Boscovich: que la question sur la grandeur et la figure de la terre, loin d'être décidée, est à peine entamée. Pour la résoudre d'une maniere plus satisfaisante l'auteur propose de mesurer, moyennant de bons chronomètres, 6 à 8 degrés de deux parallèles pas trop proches l'un de l'autre et il fait voir de quelle maniere la comparaison de ces arcs de parallèles peut conduire à un rapport plus juste entre le diamètre de l'équateur et l'axe de la terre.

III.

Supplementum ad Theoriam Lunae Eulerianam.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 418.

La méthode employée par le célèbre Euler, dans sa nouvelle *théorie de la lune*, en déterminant le lieu de la lune par trois coordonnées, quoiqu'à la verité elle ne soit pas trop convenable au calcul, a toujours été regardée comme la théorie la plus complète des perturbations du mouvement de ce satellite,

qui représente les moindres corrections avec la plus grande exactitude, quoique sous une forme un peu compliquée. Il étoit donc bien étonnant, que ce grand Géomètre n'ait pu expliquer par sa méthode la fameuse équation séculaire de la lune, si bien constatée par les observations anciennes et modernes. Depuis que Mr. de la Place eut démontré que cette équation dépend du quarré de l'excentricité du soleil, quantité négligée par feu Mr. Euler dans ses calculs, il étoit à présumer, que s'il eût tenu compte du quarré de cette excentricité, l'équation séculaire se trouveroit confondue avec les autres équations. Mr. l'Académicien Schubert voulant bien s'occuper de ces recherches, dut les commencer par étendre l'analyse dont s'étoit servi Mr. Euler, jusqu'au quarré de l'excentricité du soleil. Quoiqu'il se fut bientôt assûré que, même en tenant compte de ce quarré, il ne résulteroit, par la méthode d'Euler, que des équations périodiques, il crut devoir mener ce calcul jusqu'à la fin, ce qui a fourni plusieurs nouvelles équations périodiques de la longitude de la lune, qui peuvent monter à 20″, savoir:

$$x = -0,0000029 + 0,0000063 \cos 2p + 0,0000047 \cos 2t - 0,0000246 \cos 2(p-t),$$

$$y = -0,0000097 \sin 2p - 0,0000322 \sin 2t + 0,0000371 \sin 2(p-t);$$

x étant l'abscisse du lieu de la lune, y l'ordonnée prise dans le plan de l'Ecliptique, p l'élongation moyenne de la lune au soleil, t l'anomalie moyenne du soleil. Mr. Schubert développe les raïsons par lesquelles la méthode d'Euler, bien qu'elle représente toutes les équations périodiques d'une maniere si exacte, ne peut pas conduire à une équation séculaire de la longitude moyenne: la principale cause en est, que Mr. Euler a pris pour axe des abscises une ligne qui n'est pas fixe, mais qui suit le moyen mouvement de la lune supposé connu, en se dirigeant toujours au lieu moyen de la lune. Pour trouver l'équation séculaire, il faut donc recourir aux formules primitives contenues dans l'ouvrage de Mr. Euler. Par ce moyen, Mr. l'Académicien

Schubert, en transformant ces formules suivant la méthode du célèbre de la Place, trouve l'équation séculaire de la longitude de la lune =

$$+ \tau^2 \cdot 11'', 908 + \tau^3 \cdot 0'', 05757;$$

τ étant le nombre des siècles écoulés depuis 1750; valeur fort peu différente de celle qui a été trouvée par Mr. de la Place. En traitant de la même maniere le quarré de l'excentricité de la lune, sujette à des variations periodiques dans l'espace de six mois, Mr. Schubert trouve une nouvelle équation périodique de la lune =

$$+ 23'', 3 \sin 2 (p - q) + 0'', 6 \sin 4 (p - q),$$

q étant l'anomalie moyenne de la lune.

IV.

Passage de Mercure sur le soleil du 7 Mai 1799.

Par Mr. l'Abbé *Henry*. pag. 463.

Quoique le ciel, qui avoit été entièrement couvert plusieurs jours, s'éclaircit heuresement le jour même du phénomène, environ une demi-heure avant l'entrée de Mercure: l'atmosphère étoit neanmoins remplie de vapeurs qui faisoient paroître les bords du soleil dans un mouvement d'ondulation, surtout vers le tems de la sortie. Cette circonstance rendant les limites du disque solaire incertaines et y produisant des échancrures assez sensibles, empêchoit de saisir avec précision les instans des contacts, desorte que l'observation n'a pas toute l'exactitude qu'elle auroit pu avoir dans de circonstances plus favorables. Généralement cette sorte d'observations n'est pas susceptible, selon Mr. Henry, d'une grande précision, parcequ'en jettant les yeux sur celles des précédens passages de Mercure, on voit que des observateurs habiles ont différé entr'eux, dans la même observation, de près d'une minute sur le tems de la même

phase. Quoiqu'il en soit, il a calculé son observation, ainsi que celle de Mr. Bode, par la méthode de Mr. Du Séjour et il présente ici les équations de condition entre les élémens du passage, sans en tirer, quant à présent, aucun résultat.

L'entrée de Mercure ayant précédé midi, Mr. Henry a aussi observé les passages au méridien du soleil et de la planète, ainsi que leurs distances au zénith, et il en a conclu les ascensions droites et les déclinaisons des deux astres et ensuite leurs longitudes et latitudes qui, comparées avec les tables, lui ont fait connoître l'erreur des tables du soleil en longitude $= + 9''$, 1, l'erreur des tables de Mercure nulle en latitude et de $+ 27''$, 8 en longitude.

V.

Essai sur la méthode de trouver la latitude sur mer par les hauteurs simultanées des deux astres.

Par Mr. *Krafft*. pag. 477.

La théorie des mouvemens des astres offre, pour déterminer sur mer la latitude du vaisseau, une quantité des méthodes; la marine, qui en a un besoin continuel, n'en a long-tems pu mettre en pratique qu'une seule. La raison de l'abandon de toutes les autres se trouve dans le peu de perfection des instrumens astronomiques, dont la marine devoit se servir pour cet effet. La méthode des hauteurs méridiennes a seule l'avantage, de donner, par le calcul, la latitude avec une précision exactement égale à celle des observations; dans toutes les autres l'erreur du résultat du calcul peut considérablement surpasser celle qui a été commise dans les observations; d'où il s'ensuit qu'on ne sauroit les mettre en pratique qu'à l'aide des instrumens, avec lesquels on est en droit de s'attendre à une précision suffisante dans les observations. Dès que le marin, pour prendre

hauteur, se vit en possession des secteurs à reflexion, à la place des anciens quartiers anglois, il ne tarda pas de joindre à la méthode des hauteurs méridiennes aussi celle des hauteurs successives d'un même astre prises hors du méridien. Ce même instrument étant porté aujourd'hui à un degré éminent de perfection, il pourroit bien y avoir parmi les méthodes que la théorie offre, encore d'autres qui fussent dignes d'être tirées de l'oubli, où elles n'ont été condamnées qu'à cause de l'imperfection des instrumens. C'est sous ce point de vüe, que l'auteur de ce mémoire a fait une espèce de révision de plusieurs pareilles méthodes; et dans ce nombre celle des hauteurs simultanées de deux astres lui a paru se distinguer avantageusement des autres à cet égard. Le calcul que la solution de ce problème demande d'après les principes ordinaires de la Trigonométrie sphérique, est sans doute trop embarrassant pour la pratique de la marine; l'auteur en donne une autre, qui est beaucoup plus simple et également rigoureuse, et encore susceptible d'être réduite facilement en tables bien compendieuses, et dont l'application paroît très-propre à la pratique de tout Pilote hauturier. Pour en donner un échantillon, l'auteur a construit une pareille table pour le couple des étoiles brillantes Aldebaran et Rigel, et en éclaircit l'usage par des exemples. A la fin du mémoire il fait un exposé succinct des avantages de cette méthode, qui consistent en ce qu'elle est indépentante de toute mesure du tems; qu'elle ne demande aucune correction en raison du sillage, ni du rhumb de vent que le vaiseau a courru dans l'intervalle du tems qui sépare les hanteurs successives d'un même astre; et qu'elle est practicable même dans le tems le moins favorable, où le ciel n'accorderoit au navigateur que l'apparition courte et passagère de deux étoiles connues.

VI.

Sur l'occultation de ε des gémaux du 8 Août 1798.

Par Mr. l'Abbé *Henry*, page 494.

L'auteur de ce mémoire commence par exposer l'observation de cette occultation, avec le détail des circonstances qui l'ont accompagnées. Il y ajoute ensuite les observations du même phénomène faites à Leipzik, Dantzik, Ofen et Celle, et après avoir calculé chacune séparément, il en compare les résultats et en déduit les différences de méridiens de ces villes avec celui de St. Petersbourg, qu'il trouve

Ofen	$0^h, 45', 14'', 5$
Dantzik	0, 46, 49, 5
Leipzik	1, 11, 50, 1
Celle	1, 21, 20, 3

Toutes les observations s'accordent au reste à donner environ 30 secondes pour erreur des tables de la lune en longitude et 7, 8 secondes en latitude.

VII.

Résultats de l'observation de la lune au méridien et de l'occultation de Φ du sagittaire, du 21 Août 1798.

Par Mr. l'Abbé *Henry*, pag. 508.

Après avoir exposé le détail de son observation et les résultats qu'il en a tiré, l'auteur y joint le calcul de la même occultation, d'après les observations qui ont été faites à Mire-

poix et à Paris, et il en compare les résultats avec les siens, à l'effet d'en déduire la différence des méridiens de ces deux villes avec celui de St. Pétersbourg qu'il trouve de 1^{h}, $53'$, $3''$ entre Paris et Mirepoix et de 1^{h}, $51'$, $58''$, 7 entre Paris et St Pétersbourg, avec une erreur des tables de $13''$ 7.

VIII.

Supplément au mémoire sur la reduction des distances lunaires.

Par Mr. *Krafft*, page 517.

Le mémoire de l'auteur, auquel ce supplement se rapporte, se trouve dans le Tome VII. des nouveaux Actes de l'Académie sous le titre: Méthode à la portée des navigateurs, pour réduire en distance vraie la distance apparente de la lune au soleil ou à une étoile fixe. Le célèbre Capitaine de vaisseau de la marine Royale d Espagne, Mr. de Mendoza y Rios, ayant donné ensuite, pour le meme problème de l'Astronomie nautique, une solution qui, quoique semblable à celle-ci, en diffère cependant en quelques points intéressans; Mr. Krafft a trouvé utile, de présenter dans ce supplement l'une et l'autre méthode dans leur rapprochement, et de faire voir les avantages que la méthode de Mr. Mendoza offre sur la sienne. L'une et l'autre est exempte de toute calcul logarithmique. Mais comme il y a des Pilotes hauturiers bien versés dans ce genre de calcul: Mr. Krafft ajoute pour leur usage, à la fin de ce supplement, encore une autre méthode de résoudre le même problème, bien facile et expéditive surtout depuis que la marine est en possession des tables complettes de sinusverses et des sus-sinusverses des angles, dont elle est redevable au zèle de Mr. de Mendoza.

IX.

Sur les passages de Mercure sur le soleil, dans le dixneuvieme siècle.

Par Mr. *F. T. Schubert*, pag 529.

Avant de donner le calcul des treize passages de Mercure, qui auront lieu dans ce siècle, Mr. Schubert a cru devoir rendre compte des méthodes et des formules qu'il a employées dans ce calcul: ce qu'il a fait dans ce premier mémoire qui contient une théorie complète des passages en général, et qui est divisé en trois sections, savoir, le calcul pour le centre de la terre, pour les différens points de la surface, et pour un lieu déterminé. En donnant aux différentes quantités qui entrent dans les formules générales, les limites des valeurs qu'elles peuvent prendre, tant au mois de Mai, qu'à celui de Novembre, l'auteur trouve: 1) que la plus grande valeur de la *durée totale* d'un passage du centre de Mercure est, au mois de Mai = 8 heures, au mois de Novembre = $5\frac{1}{2}$ heures; 2) que la *durée de l'immersion* ou de *l'émersion*, c'est-à-dire, l'intervalle entre le contact extérieur et intérieur, peut varier depuis 1 min. 43 sec. jusqu'à 38 min. 33 sec. 3) que la *durée de l'entrée* ou de la sortie apparente du centre de Mercure, pour les différens lieux de la terre, peut varier depuis 1 min. 22 sec. jusqu'à 28 min. 36 sec.

Dans la troisième section, après avoir trouvé une formule rigoureuse et fort simple pour convertir la distance géocentrique de deux astres, quelque grande qu'elle soit, en leur distance apparente ou parallactique, l'auteur donne des formules générales, pour touver la conjonction vraie, la longitude et la latitude géocentrique de Mercure, par les observations, c'est-à-dire, pour corriger les élémens de Mercure, et les longitudes des lieux où l'immersion et l'émersion ont été observées, enfin, pour déterminer la position des points apparens de l'immersion,

de l'émersion, et de la plus grande phase, par rapport au vertical, dans chaque lieu de la terre.

X.

De relativa nonnullorum locorum elevatione, in quibus observationes barometricae ac thermometricae sunt institutae.

Auctore *Petro Inochodzof*, pag. 555.

Après avoir exposé brièvement les principales causes qui font varier le poids ou la pression de l'atmosphère dans le Baromètre, et les précautions qu'il faut observer en déterminant l'élévation des lieux au moyen de cet instrument, eû égard aux différens degrés de chaleur, d'humidité, d'élasticité de l'air, d'électricité et aux directions du vent, l'auteur de ce mémoire exprime par une formule la regle donnée par Mr. de Luc et la transforme en une autre, dans laquelle, au lieu du thermomètre de Réaumur il introduit le thermomètre de Délisle plus usité chez nous, et la toise Russe composée de sept pieds anglois. Il déduit les hauteurs moyennes du baromètre d'abord des extrêmes de chaque mois et ensuite du *maximum* et *minimum* de toute l'année. Il en résulte que Moscou est plus élevé que Pétersbourg de 128 sagènes; Riga de $17\frac{1}{2}$ sagènes; Nertchinsk de 368 sagènes et Kola de $35\frac{1}{2}$ sagènes, à peu près.

XI.

Extrait des observations météorologiques, faites à St. Pétersbourg en l'année 1795, suiv. le nouv. st.

Par Mr. *I. A. Euler*, pag. 565.

La plus grande hauteur du Baromètre 28, 92 pouces de Paris, le 17 Février à 6 heures du soir; la plus petite 27, 17,

le 5 Janvier à 7 heures du soir. Ainsi la variation totale 1, 85; le milieu arithmétique 27, 995 et la hauteur moyenne 28, 125.

Le plus grand froid — 23½ degré de Réaumur a été observé le 14 Mars au matin; la plus grande chaleur + 23 le 8 Juin après midi; ainsi la différence 46½ degrés.

La derniere gelée a été le 16 Mai, et la premiere le 11 Octobre, après un intervalle de 148 jours.

Les mois de Novembre et de Mai ont été les plus venteux, et ceux d'Octobre et de Décembre les plus calmes; l'été a été plus venteux que l'hyver précédent.

Le nombre des jours entièrement séreins a été 83, et celui des jours entièrement couverts 111; il y a eu 33 brouillards. Il a pluie en 122 jours et il a neigé en 72 jours. La derniere neige est tombée le 14 Mai, et la premiere le 16 Octobre, après un intervalle de 155 jours.

Il est tombé de la grèle en 5 jours.

Le nombre des orages ne monte qu'à six, et il tonnoit de loin en 3 jours. L'aurore boréale a été observée en deux jours.

La Néva debâcla le 20 Avril, et fut entièrement prise le 11 Décembre, après avoir été ouverte pendant 235 jours.

XII.

Extrait des observations météorologiques, faites à Moscou en 1795, d'après le nouv. st.

Par Mr. *Stritter*, page 583.

La plus grande hauteur du Baromètre 27, 75 pouces de France le 8 Décembre après midi; la plus petite 26, 42

le 6 Janvier toute la journée; ainsi la variation totale 1, 33, le milieu arithmétique 27, 085 et la hauteur moyenne 27, 20. *).

Le plus grand froid — 24 degrés de Réaumur le 21 Janvier à 6 heures du matin; la plus grande chaleur + 25, le 9 et 22 Juin à 2 heures de l'après midi; ainsi la différence 49.

La derniere gelée eut lieu le 17 Avril, et il recommença à geler le 17 Septembre, après un intervalle de 153 jours d'été.

Les mois de Mai et de Juin ont été les plus venteux, et ceux de Mars et de Janvier les plus calmes. Le vent dominant a été celui du Nord pour toute l'année.

Le nombre des jours entièrement séreins étoit 27, des jours couverts 246, les brouillards au nombre de 19. Il a plû en 106 jours, et il a neigé en 87 jours. Il neiga pour la derniere fois le 12 Mai et il recommença à neiger le 17 Septembre, après un intervalle de 128 jours.

Il est tombé de la grèle en 128 jours.

Trois parhélies, 3 paraselènes, et 11 orages ont été observés.

---

*) Mr. Euler a calculé l'élévation de Moscou au dessus de St. Pétersbourg et la trouvée 127 Sagènes où toises de Russie, ce qui est très-bien d'accord avec les calculs de Mr. Inochodzof.

XIII.

Extrait des observations météorologiques, faites à St. Pétersbourg en 1796, d'après le nouv. stile.

Par Mr. *I. A. Euler*, page 593.

La plus grande hauteur du Baromètre 28, 99 pouces de Paris, le 11 Mars à midi; la plus petite 27, 15, le 28 Novembre à 2 heures après midi. La variation totale 1, 84, et la hauteur moyenne 28, 107.

Le plus grand froid 184° Dél. ou — 18, 1 Réaum. le 13 Février à 7 heures du matin.

La plus grande chaleur 108 Dél. ou + 22, 24 Réaum. le 4 Juin à 2 heures après midi.

La différence 76 Dél. où 40, 5 Réaumur.

La derniere gelée a été le 3 Mai et il a recommencé à geler le 25 Septembre; ce qui donne pour l'intervalle de l'été 145 jours.

Calme 94 jours, vent doux 169, fort 84, très fort 19. Le mois de Mai se trouve avoir été le plus venteux, après lui suivent les mois de Juin et de Janvier; ceux d'Avril et d'Août ont été les plus calmes.

Nombre des jours séreins 84; des jours couverts 109; des brouillards 47; des pluies 120; des neiges 76. La derniere neige tomba le 18 Avril, et il a recommencé à neiger le 23 Sept. après un intervalle de 159 jours.

Il a grelé en 5 jours; le nombre des orages monte à 12; le premier a été le 1 Juin et le dernier le 9 Octobre.

Une foible lumiere boréale a été observée le 6 Février et un parasélène le 20 du même mois.

La Néva debâcla le 23 Avril et fut prise le 25 Nov. après un intervale de 216 jours.

XIV.

Extrait des observations météorologiques, faites à Moscou en 1796, d'après le nouv. stile.

Par Mr. *Stritter*, page 609.

La plus grande hauteur du Baromètre 28, 08 pouces de Paris, le 22 Novembre depuis 2 heures après midi jusqu'à 10 heures du soir. La plus petite 26, 25 du 21 à 10 heures du soir jusqu'au 22 matin du mois de Mars.

La variation totale 1, 83 et la hauteur moyenne 27, 18.

Le plus grand froid 183° Dél. ou — 17°, 6 Réaum. le 16 Févr. à 6 heures du matin.

La plus grande chaleur 105 Dél. ou + 24 Réaum. le 4 Juin à 2 heures après midi.

La différence 78 Dél. ou 41. 6 Réaumur.

La derniere gelée fut le 21 Avril et la premiere le 13 Septembre, après un intervalle des 145 jours.

Calme 10 jours, vent médiocre 61, fort 227, très fort 68 jours. Le vent le plus fréquent a été celui du Nord, il a surtout dominé au mois de Juin.

Nombre des jours séreins 16; des jours couverts 259; des brouillards 22; des pluies 132; des neiges 98. La derniere neige tomba le 11 Mai et la premiere le 1 Octobre, après un intervalle de 143 jours. Il a grélé en 2 jours.

Le nombre des orages monte à 14, et il a fait des éclairs en 5 jours.

Il y eut 5 parhélies et 2 parasélènes.

L'élévation de Moscou au dessus de St. Pétersbourg se reduit à 121 sagènes de Russie.

MATHEMATICA

ET

PHYSICO-MATHEMATICA.

EXEMPLA
QUARUNDAM
MEMORABILIUM AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM,

QUAS ADEO ALGEBRAICE INTEGRARE LICET, ETIAMSI NULLA VIA PATEAT VARIABILES A SE INVICEM SEPARANDI.

Auctore
L. EULERO.

Conventui exhibita die 19 Jan. 1778.

§. 1.

Facile quidem est hujusmodi aequationes, quotquot lubuerit, exhibere, quarum integralia assignari queant. Si enim pro V accipiatur quaecunque functio binarum variabilium x et y, ita ut sit $\partial V = M\partial x + N\partial y$, evidens est huic aequationi differentiali $\partial x\,(PV + MS) + \partial y\,(QV + NS) = 0$ semper satisfacere aequationem finitam $V = 0$. Verum hoc integrale tantum est particulare. Praeterea vero si ejusmodi aequatio proponatur, plerumque haud difficulter ista functio V vel divinando inveniri potest, ita ut hujusmodi aequationes parum in recessu habere sunt censendae. Hic autem tales aequationes in medium

sum allaturus, quarum integratio omnes methodos adhuc cognitas respuere videatur, cum tamen nihilominus earum integralia completa, atque adeo algebraica, exhiberi queant.

§. 2. Hujusmodi scilicet aequationes differentiales deducere licet ex hac aequatione differentiali hactenus plurimum tractata: $\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{\partial y}{\sqrt{Y}}$, in qua est $X = \alpha + 2\beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \varepsilon x^4$ et $Y = \alpha + 2\beta y + \gamma yy + 2\delta y^3 + \varepsilon y^4$, cujus integrale completum hac aeqnatione finita exprimitur:

I. $\frac{\sqrt{X}+\sqrt{Y}}{x-y} = \sqrt{2\lambda + \gamma + 2\delta(x+y) + \varepsilon(x+y)^2}$, ubi λ denotat constantem arbitrariam integratione ingressam, quod ergo integrale etiam hoc modo exhiberi potest:

II. $\sqrt{XY} = \lambda(x-y)^2 - \alpha - \beta(x+y) - \gamma xy - \delta xy(x+y) - \varepsilon xxyy$. Quin etiam irrationalitatem penitus tollendo hoc integrale sequentem induet formam:

III. $0 = \lambda\lambda(x-y)^2 - 2\lambda(\alpha+\beta(x+y) + \gamma xy + \delta xy(x+y) + \varepsilon xxyy) + (\beta\beta - \alpha\gamma) - 2\alpha\delta(x+y) - \alpha\varepsilon(x+y)^2 - 2\beta\delta xy - 2\beta\varepsilon xy(x+y) + (\delta\delta - \gamma\varepsilon)xxyy$.

Hinc jam sequentia exempla evolvamus.

Exemplum I.

§. 3. Cum ex aequatione $\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{\partial y}{\sqrt{Y}}$ sit $\frac{\partial x}{\partial y} = \sqrt{\frac{X}{Y}}$, habebimus $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\sqrt{XY}}{Y}$, ubi, si valores pro Y et $\sqrt{XY}$ ex forma integralis secunda substituamus, prodibit

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\lambda(x-y)^2 - \alpha - \beta(x+y) - \gamma xy - \delta xy(x+y) - \varepsilon xxyy}{\alpha + 2\beta\gamma + \gamma yy + 2\delta y^3 + \varepsilon y^4}$$

quae more solito in ordinem redacta hanc induet formam:

$$\partial x\,(\alpha + 2\beta y + \gamma yy + 2\delta y^3 + \varepsilon y^4) + \partial y\,(\alpha + \beta\,(x+y) + \gamma xy + \delta xy\,(x+y) + \varepsilon xxyy) = \lambda\,\partial y\,(x-y)^2.$$

cujus aequationis ergo integrale est aequatio finita, quam sub triplici forma exhibuimus. Quoniam autem in hoc integrali nulla nova constans occurrit, quae in differentiali non insit, hoc integrale tantum pro particulari est habendum.

§. 4. Interim tamen haec aequatio differentialis jam ita est comparata, ut nemo certe ejus integrale divinando elicere potuerit, cum sex quantitates diversae ibi occurrant. Quin etiam si quatuor adeo litterae evanescant, tamen integrale adhuc satis absconditum deprehenditur. Veluti si sumamus $\beta = \gamma = \delta = \varepsilon = 0$, oritur haec aequatio differentialis $\alpha\,\partial x + \alpha\,\partial y = \lambda\,\partial y\,(x-y)^2$, cujus ergo integrale ex prima forma erit $\frac{2\sqrt{\alpha}}{x-y} = \sqrt{2\lambda}$, sive $x - y = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\lambda}$, sive $x = y + \frac{\sqrt{2\alpha}}{\lambda}$, qui valor utique satisfacit, sed tantum particulariter. Pro integrali autem completo inveniendo statuatur $x - y = v$, sive $x = y + v$, unde aequatio differentialis evadet $\partial y = \frac{\alpha\,\partial v}{\lambda vv - 2\alpha}$, cujus ergo integrale completum sive a logarithmis, sive ab arcubus circularibus pendet.

§. 5. Ponamus nunc esse $\alpha = \gamma = \delta = \varepsilon = 0$, et aequatio nostra differentialis erit

$$2\beta y\,\partial x + \beta\,(x+y)\,\partial y = \lambda\,\partial y\,(x-y)^2,$$

cui ergo satisfacit hoc integrale ex I. forma

$$\frac{\sqrt{2\beta}x + \sqrt{2\beta}y}{x-y} = \sqrt{2\lambda},$$ vel ex II. forma

$$2\beta\sqrt{xy} = \lambda\,(x-y)^2 - \beta\,(x+y).$$

Illa autem forma praebet $\sqrt{x} + \sqrt{y} = (x-y)\,\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}$, quae divisa per $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ dat $1 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})\,\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}$, sive $\sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{\frac{\beta}{\lambda}}$, hincque $x = y + 2\sqrt{\frac{\beta}{\lambda}y} + \frac{\beta}{\lambda}$, ideoque $\partial x = \partial y + \frac{\partial y\sqrt{\beta}}{\sqrt{\lambda y}}$, qui valores substituti aequationem identicam producunt.

§. 6. Cum igitur isti casus simplicissimi jam profundiorem indagationem requirant, hinc evidentissime elucet, si omnes sex litterae in calculo relinquantur, tum neminem certe unquam ejus integrale saltem particulare esse eruturum; unde haec ipsa aequatio generalis:

$$\left.\begin{array}{l}\partial x\,(\alpha + 2\beta y + \gamma yy + 2\delta y^3 + \varepsilon y^4) + \\ +\partial y(\alpha+\beta(x+y)+\gamma xy+\delta xy(x+y)+\varepsilon xxyy)\end{array}\right\} = \lambda\partial y\,(x-y)^2$$

omni attentione maxime digna videtur, cum ejus integrale, licet particulare, sit ipsa aequatio supra §. 2. assignata sub triplici forma. In sequentibus autem exemplis hujusmodi aequationes differentiales proferemus, quarum adeo integralia completa algebraice exhiberi queant.

Exemplum II.

§. 7. Cum sit $\partial x : \partial y = \sqrt{X} : \sqrt{Y}$, erit $\frac{\partial x+\partial y}{\partial x-\partial y} = \frac{\sqrt{X}+\sqrt{Y}}{\sqrt{X}-\sqrt{Y}}$. Jam haec fractio supra et infra multiplicetur per $\sqrt{X}+\sqrt{Y}$ fietque $\frac{\partial x+\partial y}{\partial x-\partial y} = \frac{(\sqrt{X}+\sqrt{Y})^2}{X-Y}$, cujus numerator ex prima forma integralis est

$$(x-y)^2\,(2\lambda+\gamma+2\delta\,(x+yy)+\varepsilon\,(x+y)^2$$

denominator vero erit

$$2\beta\,(x-y)+\gamma\,(xx-yy)+2\delta\,(x^3-y^3)+\varepsilon\,(x^4-y^4)$$

sicque haec fractio per $x-y$ deprimi potest, ita ut habeamus

$$\frac{\partial x+\partial y}{\partial x-\partial y} = \frac{(x-y)\,(2\lambda+\gamma+2\delta\,(x+y)+\varepsilon\,(x+y)^2)}{2\beta+\gamma\,(x+y)+2\delta\,(xx+xy+yy)+\varepsilon\,(x+y)\,(xx+yy)}$$

cujus ergo integrale pariter erit ipsa aequatio finita supra assignata, quae cum praeter quantitates constantes, in ipsam aequationem differentialem ingredientes, quae sunt β, γ, δ, ε et λ, insuper litteram α contineat, utique pro integrali completo est habenda.

§. 8. Quo hanc aequationem in ordinem redigamus, primo eam in hanc formam convertamus:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\beta+\lambda\,(x-y)+\gamma x+\delta x\,(2x+y)+\varepsilon xx\,(x+y)}{\lambda\,(x-y)-\beta-\gamma y-\delta y\,(2y+x)-\varepsilon yy\,(x+y)}.$$

Nunc igitur fractionibus sublatis prodibit haec aequatio:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\,\partial x\,(x-y) - \beta\,\partial x - \gamma\,y\,\partial x - \delta\,y\,\partial x\,(2y+x) - \varepsilon\,y\,y\,\partial x\,(x+y)\\ -\lambda\,\partial y\,(x-y) - \beta\,\partial y - \gamma\,x\,\partial y - \delta\,x\,\partial y\,(2x+y) - \varepsilon\,x\,x\,\partial y\,(x+y)\end{array}\right\} = 0.$$

Hujus ergo aequationis integrale completum est ipsa illa aequatio finita, quam supra sub triplici forma repraesentavimus, in qua littera α est constans arbitraria per integrationem ingressa, unde ex tertia forma integrale ita referri poterit

$$\alpha\,(2\lambda+\gamma+2\delta\,(x+y)+\varepsilon\,(x+y)^2) = \lambda\lambda\,(x-y)^2 - 2\lambda\beta\,(x+y) - 2\lambda\gamma\,x\,y - 2\lambda\delta\,x\,y\,(x+y) - 2\lambda\varepsilon\,x\,x\,y\,y + \beta\beta - 2\beta\delta\,x\,y - 2\beta\varepsilon\,x\,y\,(x+y) + (\delta\delta-\gamma\varepsilon)\,x\,x\,y\,y.$$

sive

$$\alpha = \frac{\lambda\lambda\,(x-y)^2 - 2\lambda\beta\,(x+y) - 2\lambda\gamma\,x\,y - 2\lambda\delta\,x\,y\,(x+y) - 2\lambda\varepsilon\,x\,x\,y\,y + \beta\beta - 2\beta\delta\,x\,y - 2\beta\varepsilon\,x\,y\,(x+y) + (\delta\delta-\gamma\varepsilon)\,x\,x\,y\,y}{2\lambda+\gamma+2\delta\,(x+y)+\varepsilon\,(x+y)^2}.$$

§. 9. Quia in hac aequatione plures occurrunt litterae, scilicet λ, β, γ, δ, ε, contemplemur primo casus speciales, quibus duae tantum litterae occurrunt, reliquis ad nihilum redactis.

Casus I.

quo $\gamma = \delta = \varepsilon = 0$.

§. 10. Aequatio ergo differentialis erit

$$\lambda\,\partial x\,(x-y) - \lambda\,\partial y\,(x-y) - \beta\,\partial x - \beta\,\partial y = 0$$

sive $\lambda\,(x-y)\,(\partial x - \partial y) - \beta\,(\partial x + \partial y) = 0$

cujus integrale sponte se prodit

$$\lambda\,(x-y)^2 - 2\beta\,(x+y) = \text{const.}$$

Generalis vero integralis forma hoc casu praebet

$$\alpha = \frac{\lambda\lambda\,(x-y)^2 - 2\lambda\beta\,(x+y) + \beta\beta}{2\lambda}$$

Casus II.

quo $\beta = \delta = \varepsilon = 0$.

Hoc casu aequatio differentialis erit
$\lambda \partial x\,(x-y) - \lambda \partial y\,(x-y) - \gamma\,(y\partial x + x\partial y) = 0$,
cujus integrale pariter sponte se offert, quandoquidem erit

$$\lambda\,(x-y)^2 - 2\gamma xy = \text{const.}$$

Ex forma generali integrale fit $\alpha = \frac{\lambda\lambda\,(x-y)^2 - 2\lambda\gamma xy}{2\lambda+\gamma}$.
Quin etiam si fuerit tantum $\delta = \varepsilon = 0$, qui fit

Casus III.

Aequatio differentialis erit
$\lambda\,(x-y)\,(\partial x - \partial y) - \beta\,(\partial x + \partial y) - \gamma(y\partial x + x\partial y) = 0$;
cujus integrale est manifesto

$$\lambda\,(x-y)^2 - 2\beta\,(x+y) - 2\gamma xy = \text{const.}$$

Forma generalis autem praebet

$$\alpha = \frac{\lambda\lambda(x-y)^2 - 2\lambda\beta\,(x+y) - 2\lambda\gamma xy + \beta\beta}{2\lambda+\gamma},$$

ubi consensus est manifestus, sicque quoties ambae litterae δ et ε evanescunt, res nihil plane habet in recessu; verum si litterarum δ et ε, vel altera tantum, vel ambae affuerint, ejusmodi oriuntur aequationes differentiales, quarum integratio per methodos usitatas non parum difficultatis involvit; hujusmodi igitur casus hic data opera evolvamus.

Casus IV.

quo $\beta = \gamma = \varepsilon = 0$.

§. 11. Hoc ergo casu aequatio differentialis erit
$\lambda\,(x-y)\,(\partial x - \partial y) - \delta y\,\partial x\,(2y+x) - \delta x\,\partial y\,(2x+y) = 0$,
cujus integrale ex forma generali resultat

$$\alpha = \frac{\lambda\lambda(x-y)^2 - 2\lambda\delta xy(x+y) + \delta\delta xxyy}{2\lambda + 2\delta(x+y)},$$

cujus veritas neutiquam tam clare perspicitur, quam casibus praecedentibus; namque posito brevitatis gratia $\lambda = n\delta$, ut habeatur haec aequatio:
$n(x-y)(\partial x - \partial y) = y\partial x(2y + x) + x\partial y(2x + y)$, ejus prius membrum sponte est integrabile, hincque etiam si multiplicetur per functionem quamcunque $x - y$. Verum nulla hujusmodi functio datur, qua etiam posterius membrum integrabile reddatur. Ut autem more solito in ejus integrale inquiramus, ponamus $x + y = p$ et $x - y = q$, ut sit $x = \frac{p+q}{2}$ et $y = \frac{p-q}{2}$, atque aequatio nostra induet hanc formam: $nq\partial q = \frac{1}{4}\partial p(3pp + qq) - pq\partial q$. Ponamus hic $qq = v$, ut sit $2q\partial q = \partial v$, et aequatio nostra erit: $2n\partial v + 2p\partial v - v\partial p = 3pp\partial p$. In qua aequatione quia v unicam tantum habet dimensionem, ea methodo consueta resolvi poterit: divisa enim per $2n + 2p$, praebet $\partial v - \frac{v\partial p}{2n+2p} = \frac{3pp\partial p}{2n+2p}$.

§. 12. Constat autem hanc aequationem generalem: $\partial v + Pv\partial p = Q\partial p$, ubi P et Q sint functiones quaecunque ipsius p, integrabilem reddi, si ducatur in $e^{\int P\partial p}$; tum enim integrale fit $e^{\int P\partial p} v = \int e^{\int P\partial p} Q\partial p$. Hinc autem pro nostro casu habebimus $P = -\frac{1}{2n+2p}$ et $Q = \frac{3pp}{2n+2p}$; quamobrem fiet $\int P\partial p = -\frac{1}{2}l(2n+2p) + \frac{1}{2}l2 = -\frac{1}{2}l(n+p)$, ideoque $e^{\int P\partial p} = \frac{1}{\sqrt{(n+p)}}$, ergo aequatio integralis erit $\frac{v}{\sqrt{(n+p)}} = \frac{3}{2}\int \frac{pp\partial p}{(n+p)^{\frac{3}{2}}}$. Pro postremo membro ponatur $n + p = zz$, sive $p = zz - n$ eritque $(n+p)^{\frac{3}{2}} = z^3$, tum vero fiet $\frac{pp\partial p}{(n+p)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\partial z(z^4 - 2nzz + nn)}{zz} = 2zz\partial z - 4n\partial z + \frac{2nn\partial z}{zz}$, cujus integrale est $\frac{2}{3}z^3 - 4nz - \frac{2nn}{z}$, consequenter nostra aequatio integralis erit

$$\frac{v}{\sqrt{(n+p)}} = z^3 - 6nz - \frac{3nn}{z} + \text{const.}$$

sive $\frac{v}{\sqrt{(n+p)}} = (n+p)^{\frac{3}{2}} - 6n\sqrt{(n+p)} - \frac{3nn}{\sqrt{(n+p)}} + C$, quae aequatio reducitur ad hanc formam:

$$v = (n+p)^2 - 6n(n+p) - 3nn + C\sqrt{(n+p)},$$

sive $v = pp - 4np - 8nn + C\sqrt{(n+p)}$.

§. 13. Erat autem $v = qq$, sicque integrale nostrum erit $qq = pp - 4np - 8nn + C\sqrt{(n+p)}$. At vero integrale supra datum, si pariter ad quantitates p et q reducatur, in hanc formam transmutatur:

$$\frac{2\alpha}{\delta} = \frac{nnqq - \frac{np(pp-qq)}{2} + \frac{(pp-qq)^2}{16}}{n+p}$$
$$= \frac{16nnqq - 8np(pp-qq) + (pp-qq)^2}{16(n+p)}.$$

Ex forma autem inventa constans arbitraria C hoc modo definitur:

$$-C = \frac{pp-qq-4np-8nn}{\sqrt{(n+p)}},$$

cujus quadratum praebet

$$CC = \frac{(pp-qq)^2 - 8np(pp-qq) - 16nn(pp-qq) + 16nnpp + 64n^3p + 64n^4}{n+p},$$

hincque jam elicitur $\frac{32\alpha}{\delta} - CC = 64n^3$. Unde patet ambo haec integralia perfecte inter se convenire, siquidem tantum quantitate costante a se invicem discrepant.

§. 14. Ob tantas ergo ambages, quibus usi sumus ad integrale eliciendum, iste casus tanto majore attentione dignus est censendus. Interim tamen, quoniam integrale denominatorem habet $n+p$, atque ipsa fractio differentiata nostram aequationem differentialem reproducere debet, necesse est ut ipsa nostra aequatio differentialis

$$4nq\partial q + 4pq\partial q - 3pp\partial p - qq\partial p = 0$$

integrabilis reddatur, si per certam fractionem, quae reperitur $\frac{pp-qq+4np+8nn}{(n+p)^2}$, multiplicetur, id quod calculum instituenti

per plures demum ambages patebit, si formulam pro $\frac{\S\, 2\, \alpha}{\delta}$ supra exhibitam differentiare voluerit, quem laborem autem hic suscipere non vacat, praesertim postquam consensum amborum integralium jam ostenderimus; quam ab causam iste casus maximam attentionem meretur.

Casus V.

quo $\beta = \gamma = \delta = 0$.

§. 15. Hoc ergo casu aequatio differentialis erit
$\lambda (x-y)(\partial x - \partial y) - \varepsilon (x+y)(yy\partial x + xx\partial y) = 0$,
cujus ergo integrale completum erit

$$\alpha = \frac{\lambda\lambda (x-y)^2 - 2\lambda\varepsilon xxyy}{2\lambda+\varepsilon (x+y)^2}.$$

Fiat nunc iterum $x+y = p$ et $x-y = q$, ponaturque $\lambda = n\varepsilon$, et aequatio differentialis prodibit

$$nq\partial q - \tfrac{1}{4} p\partial p (pp+qq) + \tfrac{1}{2} pp qq \partial q = 0.$$

Integrale vero erit $\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{nnqq - \frac{1}{8} n (pp-qq)^2}{2n+pp}$.

Ista autem aequatio pariter nulla laborat difficultate; posito enim $qq = v$, ut sit $2q\partial q = \partial v$, prodibit haec forma:

$$2n\partial v - pv\partial p + pp\partial v = p^3 \partial p,$$

hacque divisa per $2n+pp$, erit $\partial v - \frac{vp\partial p}{2n+pp} = \frac{p^3\partial p}{2n+pp}$, quae cum aequatione generali §. 12. comparata dat $P = \frac{-p}{2n+pp}$ et $Q = \frac{p^3}{2n+pp}$. Fiet ergo $\int P\partial p = -\frac{1}{2} l(2n+pp)$, ideoque $e^{\int P\partial p} = \frac{1}{\sqrt{(2n+pp)}}$, ergo aequatio integralis erit

$$\frac{v}{\sqrt{(2n+pp)}} = \int \frac{p^3\partial p}{(2n+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4n+pp}{\sqrt{(2n+pp)}} + \text{Const.}$$

Sicque integrale completum erit $qq = 4n+pp+C\sqrt{(2n+pp)}$, sive habebimus $C = \frac{qq-pp-4n}{\sqrt{(2n+pp)}}$, quae forma, ut cum supra assignata comparari possit, quadretur, fietque

$CC = \frac{q^4 - 2ppqq - 8nqq + p^4 + 8npp + 16nn}{2n + pp}$. Erat autem $-\frac{8\alpha}{n\varepsilon} = +\frac{(pp-qq)^2 - 8nqq}{2n+pp}$, quarum expressionum differentia est $CC + \frac{8\alpha}{n\varepsilon} = 8n$; unde patet constantem C ita definiri, ut sit $CC = 8n - \frac{8\alpha}{n\varepsilon}$.

Casus generalis,
ubi omnes litterae admittuntur.

§. 16. Posito nunc in genere $x + y = p$ et $x - y = q$, aequatio nostra differentialis erit

$$\lambda q\partial q - \beta\partial p - \tfrac{1}{2}\gamma(p\partial p - q\partial q) - \tfrac{1}{4}\delta\partial p(3pp + qq) + \delta pq\partial q - \tfrac{1}{4}\varepsilon p\partial p(pp + qq) + \tfrac{1}{2}\varepsilon ppq\partial q = 0,$$

cujus ergo integrale completum erit

$$\alpha = \frac{\left\{\begin{array}{l} +\lambda\lambda qq - 2\lambda\beta p - \frac{1}{2}\lambda\gamma(pp - qq) - \frac{1}{2}\lambda\partial p(pp - qq) \\ -\frac{1}{8}\lambda\varepsilon(pp-qq)^2 + \beta\beta - \frac{1}{2}\beta\varepsilon p(pp-qq) + \frac{1}{16}(\delta\delta - \gamma\varepsilon)(pp-qq)^2 \end{array}\right\}}{2\lambda + \gamma + 2\delta p + \varepsilon pp}.$$

§. 17. Postquam autem nostra aequatio ad hanc formam est reducta; ejus resolutio nulla amplius difficultate laborat; posito enim $qq = v$, et terminis sive v, sive ∂v continentibus in unam partem translatis, ista forma proveniet:

$$(2\lambda + \gamma + 2\delta p + \varepsilon pp)\,\partial v - v(\delta + \varepsilon p)\,\partial p = (4\beta + 2\gamma p + 3\delta pp + \varepsilon p^3)\,\partial p.$$

$$\partial v - \frac{v\partial p(\delta + \varepsilon p)}{2\lambda + \gamma + 2\delta p + \varepsilon pp} = \frac{\partial p(4\beta + 2\gamma p + 3\delta pp + \varepsilon p^3)}{2\lambda + \gamma + 2\delta p + \varepsilon pp};$$

haec forma cum generali §. 12. comparata dat

$$P = \frac{-\delta - \varepsilon p}{2\lambda + \gamma + 2\delta p + \varepsilon pp} \text{ et } Q = \frac{4\beta + 2\gamma p + 3\delta pp + \varepsilon p^3}{2\lambda + \gamma + 2\delta p + \varepsilon pp},$$

fiet ergo $\int P\partial p = -\frac{1}{2}l(2\lambda + \gamma + 2\delta p + \varepsilon pp)$,

ideoque $e^{\int P\partial p} = \frac{1}{\sqrt{(2\lambda + \gamma + 2\delta p + \varepsilon pp)}}$,

quocirca integratio dabit

$$\frac{v}{\sqrt{(2\lambda+\gamma+2\delta p+\varepsilon pp)}} = \int \frac{\partial p(4\beta+2\gamma p+3\delta pp+\varepsilon p^3)}{(2\lambda+\gamma+2\delta p+\varepsilon pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

§. 18. Ut nunc postremam formulam integralem facillime evolvamus, ponamus ejus integrale esse $\frac{A+Bp+Cpp}{\sqrt{(2\lambda+\gamma+2\delta p+\varepsilon pp)}}$, cujus formae differentiale debitum habebit denominatorem, at vero numerator ad hanc formam reducitur:

$$\partial p\,(2\lambda+\gamma)\,B-A\delta) + p\partial p\,(B\delta+2C\,(2\lambda+\gamma)-A\varepsilon) + pp\partial p.3\delta C+p^3\partial p.\varepsilon C,$$

hinc ergo obtinemus quatuor sequentes aequationes:

1. $4\beta = (2\lambda+\gamma)\,B - A\delta,$
2. $2\gamma = B\delta + 2C\,(2\lambda+\gamma) - A\varepsilon,$
3. $3\delta = 3\delta C,$
4. $\varepsilon = \varepsilon C,$

ubi binae postremae manifesto praebent $C = 1$, tum vero secunda fit $B\delta + 4\lambda - A\varepsilon = 0$, ex qua cum prima conjuncta elicitur $B = \frac{4\beta\varepsilon+4\lambda\delta}{(2\lambda+\gamma)\varepsilon-\delta\delta}$,

ac denique $A = \frac{4\beta\delta+4\lambda(2\lambda+\gamma)}{(2\lambda+\gamma)\varepsilon-\delta\delta}$, quibus valoribus inventis aequatio nostra integralis erit

$$\frac{qq}{\sqrt{(2\lambda+\gamma+2\delta p+\varepsilon pp)}} = \frac{A+Bp-Cpp}{\sqrt{(2\lambda+\gamma+2\delta p+\varepsilon pp)}} + \Delta,$$

sive $\Delta = \frac{qq-A-Bp-Cpp}{\sqrt{(2\lambda+\gamma+2\delta p+\varepsilon pp)}}$, sive $-\Delta = \frac{Cpp-qq+A+Bp}{\sqrt{(2\lambda+\gamma+2\delta p+\varepsilon pp)}}$,

cujus quadratum a valore ipsius $\frac{16\alpha}{\delta\delta-\gamma\varepsilon-2\lambda\varepsilon}$ subtractum relinquit quantitatem constantem.

DE
VARIIS MODIS
NUMEROS PRAEGRANDES
EXAMINANDI,
UTRUM SINT PRIMI NEC NE?

Auctore
L. EULERO.

Conventui exhibuit die 16 Mart. 1778.

§. 1.

Cum nimis molestum et operosum esset, hoc examen per principia vulgaria instituere, dum scilicet divisio tentetur per omnes numeros primos radice quadrata numeri propositi minoribus: plurimum intererit ejusmodi methodos tradere, quarum ope hoc negotium multo facilius et brevius expediri queat. Tales autem methodi innituntur potissimum sequenti propositioni: *Si numerus* N *duplici modo contineatur in tali formula:* $\alpha xx + \beta yy$, *ubi* α *et* β *sunt numeri dati quicunque, tum certum est, illum numerum* N *non esse primum, atque adeo ejus divisores facile investigari poterunt.*

§. 2. Ponamus igitur numerum quemcunque propositum N duplici modo in hac formula $\alpha xx + \beta yy$ contineri, ac primo quidem esse $N = \alpha aa + \beta bb$, tum vero etiam $N = \alpha AA + \beta BB$. Jam a priori aequatione per BB multiplicata auferatur altera per bb multiplicata, ut obtineatur haec aequatio: $N(B^2 - bb) = \alpha(aaB^2 - A^2bb)$, quae per factores ita referri potest:

$$N(B+b)(B-b) = \alpha(aB+Ab)(aB-Ab),$$

unde satis patet, numerum N primum esse non posse, sed certe communem factorem habere, tam cum formula $aB + Ab$ quam cum formula $aB - Ab$, quandoquidem istae formulae diversae sunt a prioribus $B + b$ et $B - b$.

§. 3. Quo haec conclusio clarius perspiciatur, eam aliquot exemplis illustremus. Sit scilicet $N = 77$, qui numerus duplici modo in forma $5xx + 2yy$ continetur; primo enim est $N = 5 \cdot 1^2 + 2 \cdot 6^2$, tum vero etiam $N = 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2$, sicque habebimus $a = 1$, $b = 6$, $A = 3$ et $B = 4$, hincque $aB + Ab = 22$; cum quo numero numerus propositus N factorem habet communem 11. Altera formula fit $aB - Ab = 14$, cum quo numero numerus N factorem communem habet 7. Sicque jam nacti sumus factores numeri propositi N, qui sunt 7 et 11.

§. 4. Sit numerus propositus 703, qui duplici modo in forma $7xx + 3yy$ continetur; primo enim est

$N = 7 \cdot 2^2 + 3 \cdot 15^2$, tum vero est etiam

$N = 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 1^2$.

Prior formula dat 152, cujus numeri cum 703 maximus communis divisor est 19; at vero numerus 703 cum altera formula 148 divisorem habet communem 37. Est vero utique $703 = 19 \cdot 37$. Hoc etiam inde facilius patet, quod sit $152 = 8 \cdot 19$, unde, quia 8 nullum factorem ipsius 703 continet, necesse est

ut 19 ejus sit factor. Simili modo cum $148 = 4 \cdot 37$; ob eandem rationem necesse est ut 37 sit factor numeri 703.

§. 5. Consideremus numerum majorem 12091 duplici modo in forma $7xx + 11yy$ contentum. Hic cum sit

$$1^{\circ}) \quad 12091 = 7 \cdot 40^2 + 11 \cdot 9^2,$$

tum vero etiam $2^{\circ}) \quad 12091 = 7 \cdot 4^2 + 11 \cdot 33^2,$

hinc forma examinanda $40 \cdot 33 \pm 4 \cdot 9$, quae per 12 divisa dat 110 ± 3. Nunc autem est 113 primus, ideoque factor numeri propositi; deinde etiam 107 pariter est primus, propterea etiam factor; revera autem est $12091 = 113 \cdot 107$.

Theorema I.

Si fuerit tam $N = \alpha a^2 + \beta b^2$ *quam* $N = \alpha A^2 + \beta B^2$, *tum formulae* $aB + Ab$, *et* $aB - Ab$ *praebent factores numeri* N, *postquam scilicet per numeros, qui factores esse nequeunt ipsius* N, *fuerint divisae.*

§. 6. Possunt vero etiam ex binis resolutionibus supra exhibitis numeri N aliis modis factores investigari, scilicet a priori ducta in αA^2 subtrahatur posterior ducta in $\beta b b$, ut prodeat

$$N(\alpha A^2 - \beta B^2) = (\alpha\alpha a^2 A^2 - \beta\beta b^2 B^2)$$
$$= (\alpha a A + \beta b B)(\alpha a A - \beta b B)$$

unde patet, ambas has formulas factores continere numeri N, id quod per superiora exempla etiam illustremus.

§. 7. In exemplo §. 3. erat

$$77 = 5 \cdot 1^2 + 2 \cdot 6^2,$$
et $$77 = 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2,$$

unde colligitur forma $5 \cdot 1 \cdot 3 \pm 2 \cdot 6 \cdot 4$, quae per 3 depres-

sa sit $5 \cdot 1 \pm 4 \cdot 4$. Hinc oriuntur isti duo numeri 21 et 11, quorum prior per 3 divisus dat 7.

Exemplum §. 4. allatum erat $703 = 7 \cdot 2^2 + 3 \cdot 15^2$, et $703 = 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 1^2$, unde forma oritur $7 \cdot 2 \cdot 10 \pm 3 \cdot 1 \cdot 15$, quae per 5 depressa dat 28 ± 9, ideoque tam 37 quam 19 sunt factores numeri propositi 703 supra inventi.

Tertium exemplum §. 5. erat $12091 = 7 \cdot 40^2 + 11 \cdot 9^2$, et $12091 = 7 \cdot 4^2 + 11 \cdot 33^2$, unde oritur haec formula: $7 \cdot 40 \cdot 4 \pm 11 \cdot 9 \cdot 33$, ex qua pro signo superiori oritur 4387, qui numerus cum numero proposito divisorem habet communem 107. Deinde pro signo inferiori fit 2147, qui cum numero proposito divisorem habet communem 113, ut ante.

Theorema II.

Si fuerit tam $N = \alpha a a + \beta b b$ *quam* $N = \alpha A^2 + \beta B^2$, *tum etiam tam ista formula* $\alpha a A + \beta b B$, *quam* $\alpha a A - \beta b B$, *cum numero proposito* N *communem habebit divisorem, unde ejus factores innotescent.*

§. 8. Hinc autem deducuntur aliae formulae imprimis memorabiles, quae cum ipso numero N communes habebunt factores. Additis enim binis illis formulis, ut habeatur $2N = \alpha(aa + A^2) + \beta(bb + B^2)$, huc addatur formula ante inventa bis sumpta $2\alpha a A \pm 2\beta b B$, vel etiam subtrahatur; quoniam enim cum ipso numero N communem habet factorem, idem factor communis in membro dextro contineri debebit. Hoc modo obtinebitur

$$2N \pm 2\alpha a A \pm 2\beta b B = \alpha(a \pm A)^2 + \beta(b \pm B)^2,$$

quae forma ideo est notabilis, quia ipsi formae propositae est similis, et quia quatuor variationes in illa locum habent, toti-

demque modis etiam factores numeri propositi assignari poterunt.

§. 9. Quodsi ambae formulae $a \pm A$ et $b \pm B$ habeant factorem communem, quoniam is in N contineri nequit, eum statim e medio tolli conveniet. Veluti si haec fractio $\frac{a \pm A}{b \pm B}$ reducatur ad hanc formam simplicissimam $\frac{p}{q}$, tum ista formula $\alpha pp + \beta qq$ factorem numeri propositi praebebit, quippe qui erit communis divisor hujus ipsius formulae cum numero proposito N.

§. 10. Illustremus etiam hanc methodum per exempla supra allata, in quorum primo erat

$77 = 5 \cdot 1^2 + 2 \cdot 6^2$ et
$77 = 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2$, unde formetur fractio

$\frac{p}{q} = \frac{3 \pm 1}{6 \pm 4}$, atque formula $5pp + 2qq$ dabit divisorem ipsius 77. Hinc autem erit

1°) $\frac{p}{q} = \frac{2}{5}$, tum vero formula $5 \cdot 4 + 2 \cdot 25$, per 10 depressa, dat $2 + 5 = 7$.

2°) fit $\frac{p}{q} = 2$, hincque $20 + 2 = 2 \cdot 11$.

3°) fit $\frac{p}{q} = \frac{1}{5}$, hincque formula $5 \cdot 1 + 2 \cdot 25$, per 5 depressa, dat $1 + 2 \cdot 5 = 11$. Tandem erit

4°) $\frac{p}{q} = 1$ et formula $5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 7$.

§. 11. Simili modo pro secundo exemplo, quo erat

$703 = 7 \cdot 2^2 + 3 \cdot 15^2$ et
$703 = 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 1^2$, habebimus

$\frac{p}{q} = \frac{10 \pm 2}{15 \pm 1}$, et formula $7pp + 3qq$ dabit factorem numeri 703. Hinc fit

1°) $\frac{p}{q} = \frac{3}{4}$ et factor $7 \cdot 9 + 3 \cdot 16$, per ternarium depressus, erit $7 \cdot 3 + 16 = 37$. Porro

2°) fit $\frac{p}{q} = \frac{6}{7}$ et formula $7 \cdot 36 + 3 \cdot 49$, per $7 \cdot 3$ depressa, dat factorem 19. Jam

3°) fit $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$, unde formula $7 \cdot 1 + 3 \cdot 4$ dat factorem 19. Tandem

4°) fiet $\frac{p}{q} = \frac{4}{7}$, unde formula $7 \cdot 16 + 3 \cdot 49$, per 7 depressa, praebet factorem 37.

§. 12. Tertium denique exemplum erat

$$12091 = 7 \cdot 40^2 + 11 \cdot 9^2 \text{ et}$$
$$12091 = 7 \cdot 4^2 + 11 \cdot 33^2, \text{ ex quo fit}$$

$\frac{p}{q} = \frac{40 \pm 4}{33 \pm 9}$ et formula $7pp + 11qq$ dabit:

1°) $\frac{p}{q} = \frac{22}{21}$; hinc formula $7 \cdot 22^2 + 11 \cdot 21^2$, per $7 \cdot 11$ depressa, dabit factorem 107. Erit

2°) $\frac{p}{q} = \frac{11}{6}$, hinc formula $7 \cdot 11^2 + 11 \cdot 6^2$, per 11 depressa, dat factorem 113. Porro fit

3°) $\frac{p}{q} = \frac{6}{7}$, hinc formula $7 \cdot 6^2 + 11 \cdot 7^2$, per 7 depressa, praebet factorem 113. Tandem erit

4°) $\frac{p}{q} = \frac{3}{2}$, unde formula $7 \cdot 3^2 + 11 \cdot 2^2$ statim dat factorem 107.

Theorema III.

Si fuerit tam $N = \alpha aa + \beta bb$ *quam* $N = \alpha A^2 + \beta B^2$, *hincque formetur fractio* $\frac{p}{q} = \frac{a \pm A}{b \pm B}$; *tum ista formula* $\alpha pp + \beta qq$ *semper continebit factorem numeri propositi* N, *qui scilicet vel ipse se prodit, vel facta divisione sive per* α, *sive per* β, *sive per* $\alpha\beta$, *quandoque etiam per alium numerum simplicissimum* 2, *ejusve potestatem.*

Demonstratio.

§. 13. Cum sit $\alpha aa + \beta bb = \alpha A^2 + \beta B^2$, erit $\alpha(aa - A^2) = \beta(BB - bb)$, hincque $\frac{a \pm A}{B \mp b} = \frac{\beta(B - b)}{\alpha(a - A)}$. Sit nunc $\frac{p}{q}$ fractio

simplicissima huic utrique formulae aequalis, ac pro priore ponatur $a + A = mp$ et $B + b = mq$, pro posteriore vero sit $\beta (B - b) = \alpha\beta np$ et $\alpha (a - A) = \alpha\beta nq$, unde ergo fiet $B - b = \alpha np$ et $a - A = \beta nq$. Ex his quatuor aequalitatibus definiantur numeri a, A et b, B, qui erunt $a = \frac{mp + \beta nq}{2}$; $A = \frac{mp - \beta nq}{2}$; $B = \frac{mq + \alpha np}{2}$ et $b = \frac{mq - \alpha np}{2}$. Cum nunc sit $N = \alpha aa + \beta bb$, reperietur facta substitutione

$$N = \tfrac{1}{4}\alpha (mp + \beta nq)^2 + \tfrac{1}{4}\beta (mq - \alpha np)^2$$

sive per factores

$$N = \tfrac{1}{4}\alpha (mmpp + \beta\beta nnqq) + \tfrac{1}{4}\beta (mmqq + \alpha\alpha nnpp),$$

quae forma reducitur ad hoc productum:

$$\tfrac{1}{4} (mm + \alpha\beta nn) (\alpha pp + \beta qq).$$

Unde patet formulam $\alpha pp + \beta qq$ continere divisorem numeri N, simul vero etiam patet quotum hinc ortum esse formae $mm + \alpha\beta nn$.

§. 14. Evidens autem est in hac demonstratione litteras α et β supponi positivas; si enim altera esset negativa, evenire posset, ut factor inventus $\alpha pp + \beta qq$ abiret in unitatem, id quod unico exemplo ostendisse sufficiet, quo est $7 = 2 . 8^2 - 1 . 11^2$ et $7 = 2 . 22^2 - 1 . 31^2$. Hic ergo est $N = 7$, ideoque numerus primus; tum vero $\alpha = 2$; $\beta = 1$; $a = 8$; $b = 11$; $A = 22$ et $B = 31$, unde fit

$\frac{p}{q} = \frac{22 \pm 8}{31 \pm 11}$, ita ut quatuor fractiones hinc ortae sint 1°) $\frac{p}{q} = \frac{5}{7}$; 2°) $\frac{p}{q} = \frac{3}{2}$; 3°) $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$; et 4°) $\frac{p}{q} = \frac{7}{10}$, ergo formulae $2pp - qq$ valores erunt 1°) . 1, 2°) . 14, qui postremus, per 2 depressus, dat 7; 3°) . 7. et 4°) . 2, qui postremus redigitur ad 1. Evidens autem est litteras a et A; b et B pro lubitu tam positive quam negative accipi posse.

Theorema IV.

Si duo numeri M *et* N *ejusdem formae* $\alpha xx + \beta yy$ *in se invicem multiplicentur, productum* MN *semper erit formae* $\alpha\beta xx + yy$, *idque duplici modo.*

Demonstratio.

§. 15. Si enim ponamus $M = \alpha pp + \beta qq$ et $N = \alpha rr + \beta ss$, tum facta multiplicatione reperitur $MN = \alpha\alpha pprr + \beta\beta qqss + \alpha\beta ppss + \alpha\beta qqrr$, quod productum manifesto reducitur ad hanc formam:

$MN = \alpha\beta (ps \pm qr)^2 + (\alpha pr \mp \beta qs)^2$, hoc est ad formam $\alpha\beta xx + yy$, existente $x = ps \pm qr$ et $y = \alpha pr \mp \beta qs$; unde simul patet, hanc resolutionem semper duplici modo fieri posse.

Theorema V.

Si duo numeri M *et* N, *quorum alter* M *sit formae* $\alpha xx + \beta yy$, *alter vero* N *formae* $\alpha\beta xx + yy$, *in se invicem ducantur, productum* MN *semper erit formae* $\alpha xx + \beta yy$, *idque duplici modo.*

Demonstratio.

§. 16. Si enim ponamus $M = \alpha pp + \beta qq$ et $N = \alpha\beta rr + ss$, facta multiplicatione reperitur $MN = \alpha\alpha\beta pprr + \beta qqss + \alpha\beta\beta qqrr + \alpha ppss$, quod productum manifesto reducitur ad hanc formam: $MN = \alpha (\beta qr \pm ps)^2 + \beta (\alpha pr \mp qs)^2$, ideoque est formae $\alpha xx + \beta yy$, existente $x = \beta qr \pm ps$ et $y = \alpha pr \mp qs$, quae ergo resolutio, ob signa ambigua, semper duplici modo institui potest.

§. 17. Hic animadvertisse juvabit, binas formulas $\alpha xx + \beta yy$ et $\alpha\beta xx + yy$ arctissimo vinculo inter se esse conjunctas; quod etiam inde patet, quod alteram in alteram facillime convertere liceat. Si enim in priore formula ponatur $x = \beta z$ ea abit in $\beta (\alpha\beta zz + yy)$; ac in altera si ponatur $y = \alpha v$, tum ea accipiet hanc formam: $\alpha (\beta xx + \alpha vv)$. Infra autem multo clarius patebit, ambas istas formulas paribus proprietatibus esse praeditas, ita ut, quod de una demonstrabitur, id etiam de altera locum habere queat.

§. 18. Cum igitur demonstratum sit, omnes numeros, qui duplici modo in tali forma $\alpha xx + \beta yy$ continentur, certe non esse primos, atque adeo eorum factores semper assignari posse: nunc quaestio maximi momenti se offert, num omnes numeri, qui unico tantum modo in tali formula continentur, etiam semper pro primis haberi queant? Hoc autem pendet a natura formulae $\alpha xx + \beta yy$, sive a numeris α et β, quorum duo genera constitui debent. Dantur enim ejusmodi valores pro his litteris, ut omnes numeri, qui unico modo in tal formula continentur, certe futuri sint primi; praeterea vero etiam dantur ejusmodi valores pro α et β, ubi talis conclusio falleret, cujusmodi est haec formula $7xx + 2yy$, quae sumpto $x = 1$ et $y = 2$ dat numerum compositum 15, qui tamen unico tantum modo in hac formula continetur.

§ 19. Cum igitur nobis sit propositum hinc methodum certam deducere, numeros praemagnos examinandi, utrum sint primi, nec ne: manifestum est ad hunc scopum formulas tantum prioris generis $\alpha xx + \beta yy$ adhiberi posse, de quibus scilicet certi sumus, omnes numeros, qui in iis unico tantum modo contineantur, etiam revera esse primos Hanc ob rem nobis ante omnia in certa criteria inquirere juvabit, quibus tales formulae dignosci queant a formulis posterioris generis, in quibus etiam numeri compositi unico tantum modo contineri possunt, quas ergo formulas ab hoc instituto penitus excludi oportet; quam ob rem accuratius discrimen inter has duplicis generis formulas perscrutari conveniet.

Theorema VI.

Si in formula $\alpha xx + \beta yy$ *unico modo contineatur numerus compositus* mp, *existente* $m > 2$, *tunc etiam innumerabiles alii ejusmodi numeri compositi exhiberi possunt, qui etiam unico tantum modo in hac formula contineantur.*

Demonstratio.

§. 20. Hic ante omnia probe tenendum est, non solum numeros α et β inter se primos esse debere, sed etiam numeros x et y inter se primos esse accipiendos, atque adeo ita, ut insuper numerus x primus sit ad β, et y ad α; quibus notatis patet etiam factores m et p ad quatuor numeros α, β, x et y primos esse futuros.

Ponamus igitur esse $mp = \alpha aa + \beta bb$, ac primum observo pluribus modis aliud productum mq exhiberi posse, quod unico modo in formula affini $\alpha\beta xx + yy$ contineatur. Sit enim $mq = \alpha\beta\partial\partial + cc$, ut hinc fiat

$$\beta\partial\partial mp - aamq = \beta\beta bb\partial\partial - aacc, \text{ ideoque}$$
$$m(\beta\partial\partial p - aaq) = (\beta b\partial + ac)(\beta b\partial - ac),$$

unde si numeri ∂ et c ita accipiantur, ut vel $\beta b\partial + ac$ vel $\beta b\partial - ac$ per m fiat divisibilis, tum hinc etiam valores idonei pro q reperientur. Sit enim $\beta b\partial + ac = \delta m$, erit $\beta\partial\partial p - aaq = \delta(\beta b\partial - ac)$, ideoque $q = \frac{\beta\partial\partial p - \delta(\beta b\partial - ac)}{aa}$, unde sufficiet minimum valorem ipsius q accipere, ita ut certi esse queamus numerum mq unico modo in formula $\alpha\beta xx + yy$ contineri; quod vel inde patet, si sumpto $a = 1$ et $\partial = 1$ fuerit $mp = \alpha + \beta bb$, tum vero q ita sumatur, ut sit $mq < 4\alpha\beta$. Tum enim evidens est productum mq plus uno modo in formula $\alpha\beta xx + yy$ certe non contineri, quia sumto $x = 2$ haec formula jam habitura esset valorem majorem.

§. 21. Ducantur nunc in se invicem binae illae formulae, ac reperietur

$$mmpq = \alpha(aacc + \beta\beta bb\partial\partial) + \beta(bbcc + \alpha\alpha aa\partial\partial),$$

quae forma transformari potest in hanc: $mmpq = \alpha(ac \pm \beta b\partial)^2 + \beta(bc \mp \alpha a\partial)^2$, unde per mm dividendo colligitur

$$pq = \alpha\left(\frac{ac \pm \beta b\partial}{m}\right)^2 + \beta\left(\frac{bc \mp \alpha a\partial}{m}\right)^2$$

ubi quidem signa ambigua duplicem resolutionem innuere videntur; verum hic probe observandum est, alteram tantum in numeris fractis subsistere, ideoque a nostro instituto esse removendam. Si enim signa superiora praebeant numeros integros, inferiora dabunt fractiones: nam si summa duorum numerorum A + B per m fuerit divisibilis, neque vero numeri A et B seorsim hanc divisionem admittant, tum certe differentia A — B non erit divisibilis, solo casu excepto quo $m = 2$.

§. 22. Cum igitur productum pq unico modo in integris (de quibus solis hic agitur) in formula $\alpha xx + \beta yy$ contineatur, simili modo ex hoc producto pq alia nova producta derivari poterunt, quae pariter unico tantum modo in nostra formula contineantur.

Theorema VII.

Quodsi productum quantumvis magnum pq *unico tantum modo in formula* $\alpha xx + \beta yy$ *contineatur, tunc etiam minora hujusmodi producta exhiberi poterunt, quae pariter unico tantum modo contineantur.*

Demonstratio.

§. 23. Ponamus enim esse $pq = \alpha ff + \beta gg$, atque haec forma comparetur cum modo ante inventa $\alpha\left(\frac{ac \pm \beta b\partial}{m}\right)^2 + \beta\left(\frac{bc \mp \alpha a\partial}{m}\right)^2$, ubi quidem signa superiora tantum valeant, hincque deducemus $f = \frac{ac + \beta b\partial}{m}$ et $g = \frac{bc - \alpha a\partial}{m}$, ex

quibus duabus aequationibus semper pluribus modis quatuor litterae a, b, c et ∂ definiri poterunt, unde igitur eum modum eligi conveniet, qui pro m minimum producat valorem, qui quidem semper major erit quam 2.

§. 24. Ex his duabus formis deducatur primo factio $\frac{f}{g} = \frac{\alpha c + \beta b \partial}{b c - \alpha a \partial}$, unde derivetur fractio $\frac{c}{\partial} = \frac{\alpha a f + \beta b g}{f b - a g}$. Hic jam pro litterit a et b ejusmodi valores quaerantur, ut numerator et denominator hujus fractionis minimum acquirat divisorem communem, hincque numeri c et ∂ ad minimos valores reducantur.

§. 25. Hoc autem sequenti modo haud difficulter praestari poterit. Ponamus Δ esse minimum communem divisorem harum duarum formularum: I. $\alpha a f + \beta b g$ et II. $b f - a g$, eritque etiam Δ hujus formulae inde formatae $a\,(\alpha f f + \beta g g)$ minimus divisor; hincque patet pro Δ sumi posse factorem quendam formae $\alpha f f + \beta g g$; unde cum hujus formulae factores sint p et q, sumatur $\Delta = p$, et fractio nostra statim per Δ deprimi poterit, unde porro etiam numeri c et ∂ innotescent, quibus inventis sponte se prodit numerus $m = \frac{\alpha c + \beta b \partial}{f}$.

§. 26. Plurimum juvabit hoc exemplo illustrare formulae $7xx + 2yy$, ita ut sit $\alpha = 7$ et $\beta = 2$, in qua formula istud productum $59 \cdot 131 = 7729$ unico modo continetur, scilicet si $x = 19$ et $y = 51$. Habemus igitur $p = 59$; $q = 131$; $f = 19$ et $g = 51$, unde deducetur fractio $\frac{c}{\partial} = \frac{7 \cdot 19 a + 2 \cdot 51 b}{19 b - 51 a}$.

§. 27. Nunc a et b ita accipi poterunt, ut communis divisor numeratoris ac denominatoris evadat $\Delta = 59$; atque adeo sufficit soli denominatori hunc divisorem dedisse.

Ponamus igitur $19\,b - 51\,a = 59\,n$, eritque $19\,b = 59\,n + 51\,a$, consequenter $b = 3\,a + 3\,n + \frac{2\,n - 6\,a}{19}$. Ponatur nunc $\frac{n-3a}{19} = A$, ut sit $b = 3\,a + 3\,n + 2\,A$, et cum inde fiat $n - 3\,a = 19\,A$, erit $3\,a = n - 19\,A$, ideoque $a = -6\,A + \frac{n-A}{3}$. Ponatur porro $\frac{n-A}{3} = B$, erit $A = n - 3\,B$, ideoque $a = -6\,n + 19\,B$ ac denique $b = -13\,n + 51\,B$.

§. 28. Ut jam litterae a et b quam minimae reddantur, sumatur $B = 0$ et $n = -1$, et denominator evadet $= -59$; tum erit $a = 6$ et $b = 13$, unde fiet nostra fractio $\frac{c}{\partial} = \frac{6.7.19 + 2.13.51}{-59} = -\frac{2124}{59} = -36$, ideoque $c = 36$ et $\partial = -1$, unde reperitur $m = 10$.

§. 29. Nunc igitur nacti sumus novum productum minus $m\,p = 10.59$, quod etiam in nostra forma $7\,x\,x + 2\,y\,y$ continetur, quae si fuerit $7\,f\,f + 2\,g\,g$, erit $f = 6$ et $g = 13$. Erit igitur $\frac{f}{g} = \frac{6}{13} = \frac{ac + 2b\partial}{bc - 7a\partial}$, unde reperitur $\frac{c}{\partial} = \frac{7.6a + 2.13b}{6b - 13a}$. Sumantur nunc a et b ita, ut denominator $6\,b - 13\,a$ divisorem admittat 10, quod sit sumto $a = 2$ et $b = 6$; fiet enim $\frac{c}{\partial} = 24$, ideoque $c = 24$ et $\partial = 1$, unde fit $m = 10$, ut ante, ideoque $7\,a\,a + 2\,b\,b = 10.10$.

§. 30. En ergo novum productum 10.10, pro quo fit $f = 2$ et $g = 6$. Statuatur igitur $\frac{f}{g} = \frac{2}{6} = \frac{ac + 2b\partial}{bc - 7a\partial}$, unde reperitur $\frac{c}{\partial} = \frac{7.2a + 2.6b}{2b - 6a} = \frac{7a + 6b}{b - 3a}$. Sumatur ergo $a = -2$ et $b = 4$, qui numeri, per 2 depressi, dant $a = -1$, et $b = 2$, hincque $\frac{c}{\partial} = 1$ ideoque $c = 1$ et $\partial = 1$, ex quo reperitur $m = 3$, unde fit $7\,a\,a + 2\,b\,b = 3.5$, quod sine dubio est minimum productum.

Alia demonstratio ejusdem theorematis.

§. 31. Cum productum pq unico modo in forma illa $\alpha xx + \beta yy$ contineatur, sit $pq = \alpha ff + \beta gg$, atque evidens, est factores p et q non in eadem forma contineri, quia alioquin productum duplicem resolutionem admitteret. Consideretur nunc factor minor, qui sit q, atque formula generalis $\alpha xx + \beta yy$ infinitis modis per q divisibilis fieri potest, sumendo $x = nf \pm \mu q$ et $y = ng \pm \nu q$. Prodibit enim

$$\alpha(nnff \pm 2\mu nfq + \mu\mu qq) + \beta(nngg \pm 2\nu ngq + \nu\nu qq)$$

quae formula, ob $nn(\alpha ff + \beta gg) = nnpq$, abit in

$$q(nnp \pm \alpha(2\mu nf + \mu\mu q) \pm \beta(2\nu ng + \nu\nu q));$$

ubi litterae μ, ν et n facile ita accipi possunt, ut posterior factor, qui sit r, multo minor evadat quam q, ita ut jam habeamus productum qr, existente $r < q$. Tum vero simili modo ex hoc producto aliud denuo minus elici poterit, quod sit $= rs$, existente $s < r$; atque hac ratione mox perveniri poterit ad productum minimum, si modo in qualibet operatione valores ipsarum x et y minimi reddantur.

§. 32. Haec clariora evadent, si ad exemplum propositum applicentur, quo erat $pq = 7 \cdot 19^2 + 2 \cdot 51^2 = 7729$, ubi ergo $p = 131$ et $q = 59$. Cum igitur hic sit $f = 19$ et $g = 51$, valores generales erunt: $x = 19n - 59\mu$ et $y = 51n - 59\nu$, qui pluribus modis multo minores reddi possunt quam f et g. Veluti sumptis n, μ et $\nu = 1$, fiet $x = -40$ et $y = -8$, qui numeri, per 8 depressi, evadunt $x = -5$ et $y = -1$, unde prodit $7xx + 2yy = 59 \cdot 3$, ideoque $r = 3$. Nunc ergo cum sit $f = 5$ et $g = 1$, novi valores erunt $x = 5n - 3\mu$ et $y = n - 3\nu$ unde valores minimi, per 2

depressi, erunt $x = 1$ et $y = 1$; quare productum minimum resultat $7 + 2 = 3 \cdot 3$; unde facile intelligitur, quomodo pro quovis casu operationes sint instituendae.

§. 33. Totum hoc ratiocinium simili modo institui potest pro formula $\alpha\beta xx + yy$, ita ut, si numeri quantumvis magni compositi in ea semel tantum contineantur, ex iis continuo minores reperiri queant, quae patitur unico tantum modo in hac formula contineantur. Atque adeo has operationes eo usque continuare licebit, donec ad numeros compositos perveniatur, qui sint minores quam $4\alpha\beta$. Quod etiam praecedente exemplo illustrari potest; quandoquidem numerus $59 \cdot 131$ etiam unico modo in formula $14xx + yy$ continetur, existente $x = f = 6$ et $y = g = 85$, unde novi valores erunt $x = 6n - 59\mu$ et $y = 85n - 59\nu$. Jam hic notetur litteras n et ν semper ita accipi posse, ut fiat $x = 1$: posito enim $6n - 59\mu = 1$, erit $n = 10\mu + \frac{\mu+1}{6}$. Capiatur ergo $\mu = 1$, eritque $n = 10$ et $x = 1$, tum vero $y = 850 - 59\nu$, cujus valor minimus prodit ex $\nu = 14$, unde fit $y = 24$. Adepti igitur sumus hanc formam: $14 \cdot 1^2 + 24^2 = 59 \cdot 10$. Eadem autem forma factorem habebit 10, si sumatur $y = 24 - 10\nu = 4$, unde resultat productum adhuc minus $14 \cdot 1^2 + 4^2 = 30 = 10 \cdot 3$, quod utique minus est quam $4\alpha\beta$. Quodsi enim fuerit numerus compositus $pq < 4\alpha\beta$, hic casus locum habere nequit, nisi fuerit $x = 1$, unde y etiam datum sortietur valorem. Hinc vicissim manifesto sequitur, si nullus numerus compositus minor quam $4\alpha\beta$ in formula $\alpha\beta xx + yy$ contineatur, tales etiam in numeris maximis non dari; consequenter quoties quispiam numerus in tali formula unico tantum modo continetur, cum certo concludere poterimus, illum numerum esse primum; unde sequens problema maximi momenti resolvere licebit.

PROBLEMA.

Propositae formulae cujuscunque $\alpha xx + \beta yy$ *naturam perscrutari, utrum numeri unico modo in ea contenti tuto concludi queant esse primi, an vero ista conclusio fallere queat, quippe quo posteriori casu tales formulas a proposito nostro excludi oportet.*

Solutio.

§. 34. Primo ex iis, quae sunt allata, satis intelligitur, hanc formulam eadem proprietate praeditam esse atque ejus affinem $\alpha\beta xx + yy$. Sicque totum judicium eo redit, utrum omnes numeri semel tantum in hac formula contenti tuto pro primis haberi queant, nec ne? Ad hanc quaestionem decidendam sufficiet examinasse, utrum dentur numeri compositi minores quam $4\alpha\beta$, qui in hac formula contineantur. Si enim tales numeri occurrant, non solum haec formula $\alpha\beta xx + yy$, sed etiam illa $\alpha xx + \beta yy$ a proposito nostro est excludenda: contra autem, si nulli tales numeri compositi occurrant, utraque formula ad numeros primos explorandos tuto uti licebit; quandoquidem omnes numeri unico modo contenti certe futuri sunt primi.

§. 35. Hinc igitur statim, quia nulli alii numeri, nisi minores quam $4\alpha\beta$, in judicium ingrediuntur, ponatur $x = 1$, ut habeatur formula $\alpha\beta + yy$, ubi ipsi y nullos alios valores tribui opus est, nisi qui sint ad $\alpha\beta$ primi. Reliquis igitur exclusis ipsi y successive tribuantur tales valores, donec numeri resultantes terminum $4\alpha\beta$ excedant.

§. 36 Jam nihil reliquum est, nisi ut numeri hoc modo prodeuntes examinentur, utrum sint primi, an vero compositi; si enim unicus compositus occurrat, eam formulam statim excludi oportebit. Hic autem probe est tenendum, numeros quadratos in hoc judicio inter compositos numeri non debere, propterea quod si fuerit $\alpha\beta + yy = kk$, idem quadratum insuper alio quoque modo in formula illa $\alpha\beta xx + yy$ continetur, scilicet quando $x = 0$ et $y = k$; quamobrem, quoties in his evolutionibus numeri quadrati occurrent, ii non compositis numeris, sed primis accenseri debebunt *).

§. 37. Hanc regulum illustremus exemplo formulae $7xx + 2yy$, ubi $\alpha = 7$ et $\beta = 2$, ita ut formula $14 + yy$ sit examinanda. Hic ergo valores ipsi y tribuendi primo debent esse imparens, neque per 7 divisibiles, idque tantum eo usque, quamdiu numeri prodeuntes non superabunt terminum $4 . 14 = 56$. Hoc examen sequenti modo commode repraesentabitur;

$$14 + 1,\ 3^2,\ 5^2$$
$$15,\ 23,\ 39$$
$$c.\quad p.\quad c.$$

ubi numeri compositi littera c, primi vero littera p designentur. Hinc igitur patet, a nostro instituto excludi debere non solum formulam $14xx + yy$, sed etiam $7xx + 2yy$.

---

*) Praeterea, vero si etiam numeri pares prodeant, quoniam supra §. 21. vidimus, ex valoribus litterae n unitatem et binarium excludi: hinc si p sit numerus primus, in hac investigatione, praeter ipsum numerum p, etiam ejus quadratum pp, simulque ejus duplum $2p$, ut primi spectari debebunt; praeterea etiam omnes potestates binarii pro primis spectari debent.

§. 38. Simili modo examinetur formula $11xx + yy$, atque in formula $11 + yy$ ipsi y tribuantur valores ad 11 primi, usque ad terminum 44, quod ergo examen ita referetur:

$11 + 1;\ 2^2 . 59^2 . 4^2 . 5^2.$
$12 . 15 . 20 . 27 . 36$
$c \quad c \quad c \quad c \quad c$

Quoniam igitur hic omnes numeri resultantes sunt compositi, hunc numerum 11 maxime excludi oportet.

Examinetur nunc numerus 13, utrum excludi debeat, nec ne, quod examen ita instituetur:

$13 + 1;\ 2^2 . 3^2 . 4^2 . 5^2 . 6^2$
$14 . 17, 2, 29, 38, 49$
$2p, \quad p, \ 2p \ \ p, \ 2p, pp$

Hic ergo nulli numeri compositi occurrunt, unde numerus 13 ad classem numerorum idoneorum referri debebit.

Examinetur numerus 30, utrum sit idoneus, an vero excludi debeat, qui calculus ita se habebit:

$30 + 1^2 . 7^2$
$31 . 79$
$p \quad p$

Quia ergo hic etiam nullus numerus compositus prodit, numerus 30 in classe numorum idoneorum locum habebit.

Examinetur numerus 43, et calculus ita se habebit:

$43 + 1^2$,	2^2,	3^2,	4^2,	5^2,	6^2,	7^2,	8^2,	9^2,	10^2,	11^2,
44,	47,	52,	59,	68,	79,	92,	107,	124,	143,	164,
c,	*p*,	*c*,	*p*,	*c*,	*p*,	*c*,	*p*,	*c*,	*p*,	*c*

Hinc ergo patet, hunc numerum 43 ex classe numerorum idoneorum excludi debere.

Examinetur nunc simili modo numerus $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, ita ut ipsi y valores ad 210 primos tribui oporteat usque ad terminum 840

$210 + 1$;	11^2;	13^2;	17^2;	19^2;	23^2
211,	331,	379,	499,	571,	739
p,	*p*,	*p*,	*p*,	*p*,	*p*

Cum igitur omnes numeri prodeuntes sint primi, numerus iste 210 pro idoneo est habendus, ex quo plures formulae sequentes formari possunt:

1 . $210\,xx + yy$
2 . $105\,xx + 2yy$
3 . $70\,xx + 3yy$
4 . $42\,xx + 5yy$
5 . $30\,xx + 7yy$
6 . $35\,xx + 6yy$
7 . $21\,xx + 10yy$
8 . $14\,xx + 15yy$

quae omnes formulae ita sunt comparatae, ut omnes numeri, qui in quapiam earum semel tantum continentur, certe futuri sint numeri primi.

§. 39. Postquam igitur hoc modo numeri ad institutum nostrum inepti fuerint exclusi, reliqui numeri, quos

idoneos appellemus, ordine in tabulam referantur, quam usque ad terminum 3000 continuare licuit; atque adeo adhuc dubium videtur, num majores numeri idonei reperiri queant.

TABULA
numerorum idoneorum.

1	13	37	85	177	357
2	15	40	88	190	385
3	16	42	93	210	408
4	18	45	102	232	462
5	21	48	105	240	520
6	22	57	112	253	760
7	24	58	120	273	840
8	25	60	130	280	1320
9	28	70	133	312	1365
10	30	72	165	330	1848
11	33	78	168	345	

Hic scilicet maximus numerus idoneus est 1848, ex his factoribus compositus: 8 . 3 . 7 . 11; neque post hunc ullum alium majorem mihi quidem invenire licuit, postquam istum laborem usque ad 3000, et ultra, sum exsecutus. Operae autem pretium erit in confirmationem hujus tanti numeri probationem adjungere.

1848			1848		
+ 1	1849	$= 43^2 = pp$	$+ 37^2$	3217 —	p
$+ 5^2$	1873	— p	41^2	3529 —	p
13^2	2017	— p	43^2	3697 —	p
17^2	2137	— p	47^2	4057 —	p
19^2	2209	$= 47^2 = pp$	53^2	4657 —	p
23^2	2377	— p	59^2	$5329 = 73^2 = pp$	
25^2	2473	— p	61^2	7417 —	p
29^2	2689	— p			
31^2	2809	$= 53^2 = pp$			

§. 40. Distinctio igitur talium formularum $\alpha xx + \beta yy$ in duas classes maxime est memorabilis, et in ipsa rei natura fundata, quarum classium prior omnes tales formulas complectitur, in quibus omnes numeri semel tantum contenti tuto pro primis haberi queant, quarum criterium in hoc consistit, ut productum $\alpha\beta$ in superiore tabula numerorum idoneorum reperiatur, cujus generis simpliciores formae sunt $xx + yy$; $2xx + yy$; $3xx + yy$, quarumque proprietas ista jam pridem a Geometris est agnita, et demonstrata. Ad alteram vero classem referendae sunt reliquae formae $\alpha xx + \beta yy$, in quibus etiam numeri compositi unico tantum modo contenti esse possunt, quarum criterium in hoc consistit, quod productum $\alpha\beta$ non in superiori tabula occurrit, cujusmodi formae simpliciores sunt $5xx + 4yy$; $7xx + 2yy$; $7xx + 5yy$; $11xx + yy$ etc. Quantum autem hinc subsidium oriatur, ad numeros praegrandes examinandos, utrum sint primi, nec ne, in singulari dissertatione fusius ostendi.

ADDITAMENTUM.

De numeris idoneis investigandis.

§. 41. Tabula numerorum idoneorum huic dissertationi inserta eo magis est notatu digna, quod non solum omnes numeros hujus naturae usque ad 2 millia exhibeat, sed etiam ultra hunc terminum nulli prorsus hujusmodi numeri occurrere videantur. Cum enim hanc investigationem usque ad 4 millia essem prosecutus, in toto hoc intervallo ne unicus quidem numerus idoneus se mihi obtulerat; unde sequitur, ab hoc termino usque ad 16000 nullos certe dari numeros idoneos per 4 divisibiles; eorum enim partes quartae in praecedente intervallo reperiri deberent. Neutiquam autem probabile est ibi numeros vel impares vel impariter pares existere; ex sola enim inspectione superioris tabulae manifesto patet istos numeros continuo magis fieri compositos, siquidem ultimus hujus tabulae numerus primus est 37; numerus vero, qui tantum duobus constat factoribus, est 253. Hinc igitur maxime verisimile est in tabula nostra omnes plane numeros idoneos contineri.

§. 42. Cum isti numeri summa attentione sint digni, operae pretium erit eorum proprietates accuratius perpendisse. In hoc autem negotio imprimis attendisse juvabit, quaenam numerorum genera ex hac tabula excludantur. Quemadmodum enim numeri primi reperiuntur, dum ex ordine omnium numerorum omnes, qui sunt compositi, delentur, ita etiam numeri idonei relinquuntur, postquam omnes ineptos deleverimus; numerorum igitur genera, quae excludi oportet, hic ante oculos constituamus.

I. Primum genus numerorum excludendorum in hac forma continetur: $4n+3$. Si enim primum quadratum 1 addatur, prodit $4(n+1)$, ideoque numerus compositus,

solis casibus exceptis, quibus $(n+1)$ est potestas binarii, uti evenit, si fuerit vel $n=0$; vel $n=1$; vel $n=3$; vel $n=7$. Hanc ob rem ex ordine omnium numerorum excludi debent numeri formae $4n+3$ praeter hos tres minimos, 3, 7 et 15.

II. Excludi etiam debent numeri in hac forma contenti: $3n+2$, quia addito quadrato 1 prodit $3(n+1)$, ideoque numerus compositus, nisi fuerit vel $n=0$, quo casu numerus fit revera primus; vel $n=1$, quo casu prodit numerus 2.3 pro primo habendus, ob formam $2p$; vel $n=2$, quo casu prodit numerus 3.3 formae pp, pariter pro primo habendus. Hinc ergo ex ordine omnium numerorum excludi debent omnes numeri formae $3n+2$, praeter hos tres: 2, 5 et 8.

III. Excludi debent omnes numeri in hac forma contenti: $5n+4$. Addita enim 1 prodit $5(n+1)$, numerus compositus, exceptis casibus $n=0$; $n=1$ et $n=4$. Quamobrem ex ordine omnium numerorum excludi debent omnes numeri formae $5n+4$, praeter hos tres: 4, 9, 24; reliqui scilicet omnes, qui sunt 19, 29, 34, 39, etc. debent deleri.

IV. Excludi debent numeri formae $5n+1$, quia addito quadrato 4 prodit numerus $5(n+1)$, pro composito habendus, nisi fuerit vel $n=0$; vel $n=1$; vel $n=4$; quamobrem ex ordine omnium numerorum excludi debent omnes numeri formae $5n+1$, praeter hos tres, 1, 6, 21, quibus adjungi oportet casus $n=3$, quoniam ad numerum 16 quadratum 4 addi non convenit; sicque numeri hinc expungendi erunt 11, 26, 31, 36, 41, 46, etc. NB. Si binae posteriores conditiones conjungantur, excludi debent numeri desinentes in 1, 4, 6 et 9, exceptis minoribus 1, 4, 6, 9, 21 et 24.

V. Ob numerum primum 7 excludi debent numeri formae $7n + 6$, quia addito quadrato 1 prodit numerus compositus $7(n+1)$ exceptis casibus, $n = 0$; $n = 1$ et $n = 6$. Unde ex ordine omnium numerorum excludi debent omnes numeri formae $7n + 6$, exceptis his tribus 6, 13, 48; ita ut deleri debeant numeri 20, 27, 34, 41, 55, 62 etc.

VI. Ob eundem numerum 7 etiam excludi debet forma $7n + 5$, quia addito quadrato 9 prodit forma $7(n+2)$, qui est numerus compositus, nisi fuerit $n = 0$ et $n = 5$. Insuper vero etiam excipiuntur casus $n = 1$; $n = 4$; $n = 7$ et $n = 10$, quippe quibus forma $7n + 5$ divisorem habet 3, ideoque quadratum 9 eo addi non conveniet; quam ob rem expungi debent omnes numeri $7n + 5$, praeter hos: 5, 12, 33, 40.

VII. Ob eundem numerum 7 excludi debent numeri formae $7n + 3$, quia addito quadrato 4 prodit forma $7(n+1)$, ideoque numerus compositus, praeter casus $n = 0$; $n = 1$ et $n = 6$. Praeterea vero etiam intelligitur, non nisi ad numeros impares quadratum 4 addi posse; hinc ergo excludi debent omnes numeri in forma $7n + 3$ contenti, praeter istos: 3, 10, 24, 45. NB. Ob numerum ergo 7 omnes numeri in quapiam harum trium formarum $7n + 2$, $7n + 5$, $7n + 6$, contenti excludi debent, praeter 3, 5, 6, 10, 12, 13, 24, 40, 45 et 48.

VIII. Deinde ob numerum primum 11 excludi debet forma $11n + 10$, quia addito 1 prodit $11(n+1)$, ideoque numerus compositus, praeter casus $n = 0$; $n = 1$ et $n = 10$; unde omnes numeri hujus formae deleri debent, praeter 10, 21, 120.

IX. Ob eundem numerum 11 excludi debet forma $11n + 8$, quia addito quadrato 25 prodit forma $11(n+3)$, quae

semper est numerus compositus, praeter casum $n = 8$, quo prodit 11^2. Deinde etiam considerari debet, casibus, quibus haec forma $11n + 8$ factorem habet 5, additionem quadrati 25 locum non habere. Hinc ergo omnes numeri formae $11n + 8$ excludi debent, praeter hos: 8, 30, 85.

X. Ob eundem numerum 11 excludi debet forma $11n + 7$, quoniam addito quadrato 4 prodit $11(n + 1)$, numerus compositus, praeter casus $n = 0$; $n = 1$ et $n = 10$; unde prodeunt numeri 7, 18 et 117, quorum postremus, ob alias rationes, scilicet ob formam $7n + 5$, jam est exclusus. Praeterea vero casus, quibus $11n + 7$ est numerus par, additioum quadrati 4 non patiuntur; erge omnes numeri formae $11n + 7$ deleri debent, praeter 7, 18, 40.

XI. Ob eundem numerum 11 excludi debet forma $11n + 6$, cui quadratum 16 additum producit $11(n + 2)$, ideoque numerus compositus, praeter $n = 0$ et $n = 9$, hoc est praeter numeros 6 et 105. Sicque deleri debent omnes numeri formae $11n + 6$. praeter 6 et 105, quibus adiungi oportet insuper pares numeros 28 et 72, quippe qui additionem quadrati 16 non admittunt.

XII. Ob eundem numerum 11 restat forma $11n + 2$, cui quadratum 9 additum dat $11(n + 1)$, unde oritur exclusio $n = 0$, $n = 1$ et $n = 10$, praeterquam quod numeri hujus formae per 3 divisibiles additionem hujus quadrati non patiuntur; consequenter omnes numeri $11n + 2$ sunt expungendi, praeter 2, 13, 112, quibus adiungi oportet numeros hujus formae per 3 divisibiles, qui sunt 24, 57. NB. Ob numerum igitur primum 11 habentur quinque numerorum formae, quos deleri oportet, scilicet $11n + 2$, $11n + 6$, $11n + 7$, $11n + 8$, $11n + 10$, praeter scilicet

paucos certos numeros, qui ob singulares rationes relinqui debent.

§. 43. Simili modo etiam sequentes numeri primi evolvi possent, quod autem nimis foret prolixum. Contenti autem esse possumus pro singulis eas formas notasse, quas excludi oportet: hae autem formae excludendae sunt sequentes:

1° $4n + 3$

2° $3n + 2$

3° $5n + 1, 4$

4° $7n + 3, 5, 6$

5° $11n + 2, 6, 7, 8, 10$

6° $13n + 1, 3, 4, 9, 10, 12$

7° $17n + 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16$

8° $19n + 2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18$

9° $23n + 5, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22$

10° $29n + 1, 4, 5, 6, 7, 9, 13, 16, 20, 22, 23, 24, 25, 28.$

§. 44. Numeri autem in his formis contenti ideo excludi debent, quia semper quadratum addere licet, ita nt summa per ipsum illum numerum primum fit divisibilis. Ita numerus $29n + 13$ ideo excluditur, quia addito quadrato 16 prodit summa $29(n + 1)$ per 29 divisibilis. Quo igitur statim hujusmodi quadrata addenda obtineantur, superiores formae pro singulis numeris primis sequenti modo commode repraesentari possunt:

	$\sqrt{\square}$
$4n+$	
	1, 3
$+3$	

	$\sqrt{\square}$
$3n+$	
$+2$	1, 2

	$\sqrt{\square}$
$5n+$	
$+4$	1, 4
$+1$	2, 3

	$\sqrt{\square}$
$7n+$	
	1, 6
$+3$	2, 5
$+5$	3, 4

	$\sqrt{\square}$
$11n+$	1, 10
$+7$	2, 9
2	3, 8
6	4, 7
8	5, 6

	$\sqrt{\square}$
$13n+$	
$+12$	1, 12
9	2, 11
4	3, 10
10	4, 9
1	5, 8
3	6, 7

	$\sqrt{\square}$
$17n+$	
16	1, 16
13	2, 15
8	3, 14
1	4, 13
9	5, 12
15	6, 11
2	7, 10
4	8, 9

	$\sqrt{\square}$
$19n+$	
18	1, 18
15	2, 17
10	3, 16
3	4, 15
13	5, 14
2	6, 13
8	7, 12
12	8, 11
14	9, 10

	$\sqrt{\square}$
$23n+$	
$+22$	1, 22
19	2, 21
14	3, 20
7	4, 19
21	5, 18
10	6, 17
20	7, 16
5	8, 15
11	9, 14
15	10, 13
17	11, 12

	$\sqrt{\square}$
$29n+$	
28	1, 28
25	2, 27
20	3, 26
13	4, 25
4	5, 24
22	6, 23
9	7, 22
23	8, 21
6	9, 20
16	10, 19
24	11, 18
1	12, 17
5	13, 16
7	14, 15

Hujusmodi tabellae nobis novam methodum suppeditant numeros propositos quosvis examinandi, utrum sint idonei nec ne; quem in finem sequens problema adjungamus.

PROBLEMA.

Numerum quemvis propositum n examinare, utrum sit idoneus nec ne?

Solutio.

§. 45. Ex praecedentibus patet numerum n tum demum esse idoneum, quando additis quadratis minoribus, ad n primis, summae resultant, quae sunt vel minori primi, vel eorum dupla, vel etiam quadrata, vel adeo protestates binarii, idque usque ad terminum $4n$. Ex quo intelligitur, numerum propositum n non fore idoneum, quando datur quadratum $aa < 3n$ et primum ad n, ut summa $n + aa$ evadat numerus compositus, qui, denotante p numerum primum, neque fit p, neque $2p$, neque pp, neque adeo 2^α.

§. 46. Quando autem formula $n + aa$ talem numerum compositum producit, quia assumimus $n + aa < 4n$, necesse est ut is factorem habeat primum et minorem quam $\sqrt{4n}$. Quamobrem res eo redit, ut inquiratur num detur numerus primus $< \sqrt{4n}$ per quem quispiam numerorum in forma $n + aa$ contentorum divisionem admittat, siquidem quadratum aa fuerit ad n primum atque $aa < 3n$. Ad hoc igitur explorandum percurrantur ordine omnes numeri primi supra allati, ad examinandum, utrum numerus noster propositus n in quapiam exclusione contineatur, quod si eveniat non tamen inde statim erit concludendum, istum numerum non esse idoneum, quoniam fieri potest, ut formula $n + aa$ vel ipsi numero p, vel ejus duplo, vel ejus quadrato fiat aequalis, quippe quibus casibus, ut vidimus, exclusio locum non habet. Imprimis autem hic meminisse oportet, quadratum aa ad ipsum numerum propositum primum esse debere, aliter exclusio quoque locum non habet. Quodsi ergo, percursis hoc modo omnibus numeris primis minoribus quam $\sqrt{4n}$, nulla exclusio reperiatur, tum numerus propositus pro

idoneo erit habendus; tota autem haec operatio multo clarius per exempla intelligetur.

Exemplum I.

§. 47. Propositus sit numerus $n = 33$, et cum sit $\sqrt{4n} < 12$, considerentur omnes numeri primi usque ad 11, utrum iste numerus 33 in quapiam forma excludente contineatur. Statim autem perspicitur hunc numerum neque in prima forma excludente $4n + 3$, neque in secunda $3n + 2$, neque tertia $5n + 1$, 4 contineri; at vero in quarta forma pro numero primo 7 continetur, cum sit $33 = 7m + 5$, quae exclusionem innuit; quadratum autem aa, quod ipsi 33 additum divisionem per 7 producit, indicatur vel 3^2, vel 4^2, at vero prius 3^2 hic reiici debet, quia ad 33 non est primum, alterum vero 4^2, additum ad 33, producit 49, qui numerus cum sit quadratus, pariter nullam exclusionem parit. Dantur quidem etiam quadrata majora, divisibilitatem per 7 producentia, scilicet $7\alpha \pm 3^2$, cujusmodi sunt 10^2, 11^2, 17^2, 18^2 etc. quorum primum 10^2, utpote ad 33 primum, praebet utique summam 133 per 7 divisibilem, quae autem jam major est quam $4 \cdot 33 = 132$, atque adeo duplici modo in forma $33 = xx + yy$ continetur, scilicet 1°) $x = 1$ et $y = 10$, 2°) $x = 2$ et $y = 1$.

§. 48. Numerus ergo primus 7 nullam exclusionem gignit, sequentem autem 11 examinare non attinet, quia 11 est divisor ipsius 33, unde concludimus numerum 33 esse idoneum.

Exemplum II.

§. 49. Propositus sit numerus $n = 58$, ubi $\sqrt{4n} < 16$, ita ut numeros primos minores quam 16 percurri oporteat. Manifestum autem est hunc numerum neque in prima forma excludente $4n + 3$, neque in secunda $3n + 2$, neque tertia $5n + 1$, 4, neque etiam quarta $7n + 3$, 5, 6, neque quinta

$11n + 2$, 6, 7, 8, 10, contineri; neque vero etiam hic numerus per ultimum 13, minorem quam 16, excluditur; unde sequitur numerum 58 revera esse idoneum.

Exemplum III.

§. 50. Sit numerus propositus $n = 345 = 3 . 5 . 23$, unde quia $\sqrt{4 . 335} < 38$, omnes numeros primos usque ad 37 percurri oportet. Hinc autem nulla exclusio occurrit, usque ad numerum primum 19; propterea quod $345 = 19 . 18 + 3$, unde quadrata addenda sunt 4^2, 15^2, quorum posterius rejicitur, quia non est primum ad 345; at prius 4^2 additum producit summam 361, quae est quadratum ipsius 19, ideoque exclusionem non gignit. Reliqua quadrata $(19n \pm 4)^2$, quae sunt 23^2, 34^2, 42^2, 53^2, 61^2, quae pariter divisibilitatem per 19 pariunt, at praeter 23^2 terminum $3n$ superant: illud autem 23^2 adhibere non licet, utpote factorem ipsius 345, quam ob rem iste numerus 345 pro idoneo est habendus, nisi forte sequentes numeri primi usque ad 37 exclusionem generent. Jam post 19 sequitur numerus 23, qui hic autem in computum non venit; pro sequente 29 fit $345 = 29 . 11 + 26$, quod nullam exclusionem innuit; porro vero est $345 = 31 . 11 + 4$, pariter nullam exclusionem continens. Denique est $345 = 37 . 9 + 12$, qua forma exclusio innuitur, quemadmodum facile pateret, si tabulas ulterius continuare liceret. Quadrata enim addenda sunt 5^2 et 32^2, quorum priore uti non licet, quia non est primum ad 345; alterum vero 32^2 additum producit 1369, hoc est ipsum quadratum 37^2, ita ut hinc nulla exclusio locum habeat, quocirca hic numerus 345 in classem numerorum idoneorum est referendus.

Exemplum IV.

§. 51. Propositus sit numerus $148 = 4 . 37$, quem ergo secundum numeros primos $< \sqrt{592} < 25$ examinemus: at vero nulla exclusio innuitur usque ad 19, siquidem est

$148 = 19 \cdot 7 + 15$. Quadrata igitur addenda sunt 2^2, 17^2, quorum prius hic locum non habet, alterum vero additum producit $437 = 19 \cdot 23$, qui ergo est numerus compositus $< 4 \cdot 148$; unde sequitur hunc numerum 148 non esse idoneum.

Exemplum V.

§. 52. Propositus sit numerus $522 = 2 \cdot 9\,29$, unde numeros primos usque ad 46 percurri conveniet. Minores autem formulae nullam exclusionem gignunt, usque ad numerum primum 31, per quem divisio succedit, addendo quadrata vel 6^2 vel 25^2, quorum posterius producit $1147 = 31 \cdot 37$; qui numerus compositus, cum sit minor quam 2088, manifesto hunc numerum 522 ex classe idoneorum excludit.

§. 53. Hac methodo haud difficile est istud numerorum examen quousque lubuerit continuare. Postquam autem hunc calculum usque ad 10000 essem prosecutus, nullus novus numerus idoneus se mihi obtulit, praeter eos, quos tabula superior exhibet, ex quo ista tabula omnes plane numeros idoneos in se complecti videtur.

RESOLUTIO
FORMULAE DIOPHANTEAE
$ab\,(maa+nbb) = cd\,(mcc+ndd)$
PER NUMEROS RATIONALES.

Auctore
L. EULERO.

Conventui exhibita die 1 Dec. 1778.

§. 1.

Inter theoremata olim a Fermatio demonstrata, et post ejus obitum deperdita, imprimis maximam attentionem meretur hoc theorema: quod non dentur duae potestates cujusque ordinis, quarum summa vel differentia sit potestas ejusdem ordinis, siquidem ordo primus et secundus excipiatur. Ita negavit Fermatius exhiberi posse binos numeros a et b, ut haec formula $a^n \pm b^n$ aequetur simili potestati c^n, simul atque exponens n binarium superaverit. Hoc ergo modo omnes istae positiones erunt impossibiles: I. $a^3 \pm b^3 = c^3$; II. $a^4 \pm b^4 = c^4$; III. $a^5 \pm b^5 = c^5$; IV. $a^6 \pm b^6 = c^6$; V. $a^7 \pm b^7 = c^7$; VI. $a^8 \pm b^8 = c^8$ etc.

§. 2. De prima harum formularum $a^3 \pm b^3 = c^3$, veritas jam satis feliciter est ostensa, unde simul quoque veritas se-

quitur pro omnibus formulis, pro quibus exponens n, est multiplum ternarii. Tum vero multo clarius adhuc demonstrata est formula secunda $a^4 \pm b^4 = c^4$, cum evidentissime comprobatum sit, neque summam neque differentiam duorum biquadratorum posse esse quadratum, multo minus ergo biquadratum, hinoque etiam evicti sunt omnes casus, quibus exponens n est multiplum quaternarii. Interim tamen ejusmodi demonstratio, quae se pariter ad omnes exponentes n extendat, maxime adhuc desideratur, neque cuiquam Geometrarum in hoc numerorum mysterium penetrare contigit.

§. 3. Pluribus autem insignibus Geometris visum est haec theoremata latius extendi posse. Quemadmodum enim duo cubi exhiberi nequeunt, quorum summa vel differentia sit cubus, ita etiam certum est, nequidem exhiberi posse tria biquadrata, quorum summa sit pariter biquadratum, sed ad minimum quatuor biquadrata requiri, ut eorum summa prodire queat biquadratum, quamquam nemo adhuc talia quatuor biquadrata assignare potuerit. Eodem modo etiam affirmari posse videtur, non exhiberi posse quatuor potestates quintas, quarum summa etiam esset potestas quinta; similique modo res se habebit in altioribus potestatibus; unde sequentes quoque positiones omnes pro impossibilibus erunt habendae:

I. $a^3 + b^3 = c^3$,

II. $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$,

III. $a^5 + b^5 + c^5 = d^5 + e^5$,

IV. $a^6 + b^6 + c^6 = d^6 + e^6 + f^6$,

etc. etc.

Plurimnm igitur scientia numerorum promoveri esset censenda, si demonstrationem desideratam etiam ad has formulas extendere liceret.

§. 4. Primo quidem intuitu videri posset has postremas formulas non solum ad summas, sed etiam ad differentias, prouti in prima usu venit, extendi posse, ita ut etiam haec aequalitas $a^4 \pm b^4 \pm c^4 = d^4$ pro impossibili esset habenda; verum hoc longe secus se habere ante aliquot annos observavi, in tomo commentariorum XVII. pag. 64. ubi bina biquadrata assignavi, quorum summa in alia duo biquadrata resolvi queat, ita ut sit $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$, unde ergo haec aequalitas $a^4 + b^4 - c^4 = d^4$ veritati neutiquam adversatur; verum numeri, quos pro his litteris a, b, c, d, per calculum valde taediosum erui, valde immanes prodierunt.

§. 5. Cum autem nuper idem argumentum tractandum suscepissem, praeter omnem expectationem incidi in numeros multo minores hac indole praeditos, atque adeo minimi numeri hoc praestantes statui possunt isti: $a = 134$; $b = 133$; $c = 158$; et $d = 59$, quandoquidem revera deprehendetur esse $134^4 + 133^4 = 158^4 + 59^4$, quem calculum exsequi haud adeo molestum est, dum contra comprobationem illorum immensorum numerorum vix quisquam tentare audebit.

§. 6. Methodus autem, qua tum temporis sum usus, ut resolverem hanc aequalitatem: $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$, ita procedebat: consideravi scilicet hanc aequationem $A^4 - C^4 = D^4 - B^4$, ac posito $A = a + b$; $C = a - b$; $D = c + d$ et $B = c - d$, prodiit ista aequatio satis simplex: $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$; sicque totum negotium ad resolutionem hujus formulae reducitur. Hic autem non solum methodum ante utitatam, multo tractabiliorem sum redditurus, sed etiam ad resolutionem formulae multo generalioris in titulo exhibitae $ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$ sum accommodaturus, ita ut, quicunque numeri pro m et n accipiantur, semper infinitis modis numeri satisfacientes pro a, b, c, d, inveniri queant.

§. 7. Ad aequalitatem autem hanc resolvendam utor ante omnia hac transformatione: $b = cp$ et $d = aq$, hocque modo aequatio resolvenda hanc induet formam: $p\,(m\,a\,a + n\,c\,c\,p\,p) = q\,(m\,c\,c + n\,a\,a\,q\,q)$, unde elicitur $\frac{a\,a}{c\,c} = \frac{n\,p^3 - m\,q}{n\,q^3 - m\,p}$, sicque totum negotium huc redit, ut ista formula $\frac{n\,p^3 - m\,q}{n\,q^3 - m\,p}$ ad quadratum reducatur, quod quidem sponte evenire casu $q = p$ mox in oculos incurrit, cum evadat $\frac{a\,a}{c\,c} = 1$, ideoque $c = a$, tum quoque fiet $b = \partial$, qui autem casus maxime obvius pro solutione neutiquam haberi potest, quandoquidem ambo membra aequationis prodeunt identica. Interim tamen hic ipse casus ad alias solutiones manuducere poterit.

§. 8. Cum igitur nostra formula revera quadratum evadat posito $p = q$, statuamus $p = q\,(1 + z)$, ita ut sumpto $z = 0$ ipse casus obvius prodeat; nunc autem nostra formula in sequentem transmutabitur: $\frac{a\,a}{c\,c} = \frac{n\,q^3\,(1+z)^3 - m}{n\,q\,q - m\,(1+z)}$, sive

$$\frac{a\,a}{c\,c} = \frac{n\,q\,q - m + 3\,n\,q\,q\,z + 3\,n\,q\,q\,z\,z + n\,q\,q\,z^3}{n\,q\,q - m - m\,z}$$

in qua fractione quantitas incognita z in numeratore ad tertiam potestatem, in denominatore autem non ultra primam assurgit, cujusmodi formulas per methodos cognitas tractari posse jam satis liquet.

§. 9. Quo hanc fractionem tractabiliorem reddamus tam numeratorem quam denominatorem dividamus per $n\,q\,q - m$, statuamusque brevitatis gratia $\frac{n\,q\,q}{n\,q\,q - m} = \alpha$ et $\frac{m}{n\,q\,q - m} = \beta$, ita nt sit $\alpha - \beta = 1$, ideoque $\alpha = 1 + \beta$, quo facto formula sequens prodibit $\frac{a\,a}{c\,c} = \frac{1 + 3\,\alpha\,z + 3\,\alpha\,z\,z + \alpha\,z^3}{1 - b\,z}$. Jam per secundam methodum, qua olim sum usus, denominator reddatur quadratum, multiplicando supra et infra per $1 - b\,z$, unde prodit $\frac{a\,a}{c\,c} = \frac{(1 - b\,z)(1 + 3\,\alpha\,z + 3\,\alpha\,z\,z + \alpha\,z^3)}{(1 - b\,z)^2}$. Sicque tantum opus est

ut numerator, qui evolutus fit

$$1 + (3\alpha - \beta)\, z + 3\alpha\,(1 - \beta)\, zz + \alpha\,(1 - 3\beta)\, z^3 - \alpha\beta z^4$$

ad quadratum reducatur, quod praestabitur ejus radicem ponendo $1 + fz + gzz$, cujus quadratum est

$$1 + 2fz + (ff + 2fg)\, zz + 2fg z^3 + gg z^4.$$

Nunc quia primi termini se mutuo sponte destruunt, binae litterae f et g ita definiantur, ut etiam secundi ac tertii termini tollantur; prius fiet sumendo $f = \frac{3\alpha - \beta}{2}$, posterius vero statuendo $ff + 2g = 3\alpha\,(1 - \beta)$, unde fit $g = \frac{3\alpha(1-\beta)}{2}, -\frac{1}{2}ff$. Quoniam igitur utrinque tantum bini termini postremi remanent, qui per z^3 divisi praebent hanc aequationem: $\alpha\,(1 - 3\beta) - \alpha\beta z = 2fg + ggz$, inde elicitur $z = \frac{\alpha(1-3\beta) - 2fg}{\alpha\beta + gg}$.

§. 10. Haec est ea ipsa solutio, qua jam dudum loco citato sum usus, cujus ope pro quovis valore ipsius q ad arbitrium assumpto, simul innotescunt litterae α et β, unde valor idoneus pro z obtinetur, quo invento primo erit $p = q\,(1 + z)$, ac denique erit $\frac{aa}{cc} = \frac{(1+fz+gzz)^2}{(1-\beta z)^2}$ ideoque $\frac{a}{c} = \frac{1+fz+gzz}{1-\beta z}$, unde ergo sumi poterit $\alpha = 1 + fz + gzz$ et $c = 1 - \beta z$; tandem vero habebitur $b = cp$ et $d = aq$, sicque quaestioni propositae erit satisfactum.

§. 11. Hoc autem modo pro casu quem olim tractavi, $m = n = 1$ pro q unitas accipi nequit, quia litterae α et β evaderent infinitae; iidem vero enormes numeri, quo tum exhibui, reperiuntur, dum pro q vel 2 vel 3 assumitur. Quodsi autem non fuerit $m = n$, nihil obstat, quo minus statuatur $q = 1$, hincque solutiones satis commodae obtineri poterunt; semper autem tum erit $d = a$, quod fortasse displicere potest.

§. 12. Hac igitur methodo repudiata aliam viam sum ingressurus, quae ad solutiones multo simpliciores perducet, quaeque ita est comparata, ut non perveniatur ad quartam potestatem ipsius z. Hunc in finem statim pono $\frac{a}{c} = 1 + sz$, ita ut habeamus: $\frac{1 + 3\alpha z + 3\alpha zz + \alpha z^3}{1 - \beta z} = (1 + sz)^2$, qua aequatione evoluta et omnibus terminis ad eandem partem translatis pervenietur ad hanc aequationem:

$$\left.\begin{array}{l} +\ 1 + 3\alpha z + 3\alpha zz + \alpha z^3 \\ -\ 1 - 2sz - sszz + \beta ssz^3 \\ \quad + \beta z + 2\beta szz \end{array}\right\} = 0$$

quae redigitur ad hanc formam:

$$3\alpha - 2s + \beta + (3\alpha + 2\beta s - ss)\, z + (\alpha + \beta ss)\, zz = 0.$$

§. 13. Ut nunc ex hac aequatione incognita z commode deduci queat, hoc imprimis duobus modis fieri poterit, quorum primus adhiberi poterit, si statuere licebit $\alpha + \beta ss = 0$, sive $ss = -\frac{\alpha}{\beta}$, id quod locum habere nequit, nisi $-\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{nqq}{m}$ fuerit quadratum, quamobrem iste casus tum tantum adhiberi poterit, quando numerorum m et n alter fuerit negativus, insuperque eorum productum quadratum. Pro hoc igitur casu ponamus $m = \mu\mu$ et $n = -\nu\nu$, ut aequalitas resolvenda sit $ab(\mu\mu aa + \nu\nu bb) = cd(\mu\mu cc - \nu\nu dd)$; tum igitur erit $\alpha = \frac{+\nu\nu qq}{\mu\mu + \nu\nu qq}$ et $\beta = \frac{-\mu\mu}{\mu\mu + \nu\nu qq}$ statuique poterit $ss = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\nu\nu qq}{\mu\mu}$, ideoque $s = \frac{\nu q}{\mu}$. Hoc modo aequatio postrema erit $3\alpha - 2s + \beta + (3\alpha + 2\beta s - ss)\, z = 0$, unde colligitur $z = \frac{2s - 3\alpha - \beta}{3\alpha + 2\beta s - ss}$, factisque substitutionibus erit

$$z = \frac{\mu\mu(\mu\mu - 3\nu\nu qq) + 2\mu\nu q(\mu\mu + \nu\nu qq)}{\mu\mu(3\nu\nu qq - 2\mu\nu q) - \nu\nu qq(\mu\mu + \nu\nu qq)}.$$

§. 14. Hic autem praeter omnem necessitatem introduximus binas novas litteras μ et ν; nihil enim impedit, quo minus loco μa, νb, μc, νd, simpliciter scribantur litterae a, b, c, d, ita ut formula resolvenda evadat $ab\,(aa - bb) = cd\,(cc - dd)$, perinde ac si sumpsissemus $\mu = 1$ et $\nu = 1$, unde solutio multo brevior obtinebitur.

Resolutio formulae particularis $ab\,(aa - bb) = cd\,(cc - dd)$.

Hic igitur sumpto pro q numero quocumque erit $\alpha = \frac{qq}{1+qq}$ et $\beta = \frac{-1}{1+qq}$; tum vero sumi oportet $s = q$, unde postrema aequatio erit

$3qq - 1 - 2q - 2q^3 + z\,(2qq - 2q - q^4) = 0$, ideoque $z = \frac{1+2q-3qq+2q^3}{q(-2+2q-q^3)}$. Hoc valore invento erit $p = q\,(1+z)$ et $\frac{a}{c} = 1 + qz$, unde porro reliquae litterae b et d facile assignabuntur.

§. 15. Statuamus nunc primo $q = 1$, eritque $z = -2$, deinde $\frac{a}{c} = -1$, ideoque $c = -a$; porro ob $p = -1$ erit $b = a$ et $d = a$. Hoc ergo casu omnes quatuor litterae essent aequales, et ambo formulae membra $= 0$. Idem prodiret, si poneremus $p = -1$: perpetuo enim observasse juvabit, perinde esse sive ipsi q tribuatur valor positivus, sive negativus. Sumamus igitur, ut idoneum exemplum proferamus, $q = 2$, eritque $z = -\frac{3}{4}$, ideoque $p = \frac{1}{2}$ et $\frac{a}{c} = -\frac{1}{2}$, ergo $c = -2a$, porro $b = -a$ et $d = 2a$. Hoc autem modo in praecedens incommodum indicimus. Sit ergo $q = 3$, eritque $z = -\frac{24}{23}$, hinc $p = \frac{36}{23}$ et $\frac{a}{c} = -\frac{11}{23}$, ita sumi poterit $a = 11$ et $c = -23$, eritque $b = -35$ et $d = 3a = 33$.

Hoc modo pervenimus ad hanc aequalitatem: $11 \cdot 35 (35^2 - 11^2) = 23 \cdot 33 (33^2 - 23^2)$, cujus ratio est manifesta, cum utrumque membrum in factores evolutum praebeat $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$. Hinc duo triangula rectangula exhiberi possunt, quorum areae inter se sunt aequales; prioris enim catheti erunt $2 \cdot 11 \cdot 35$ et $24 \cdot 56$, alterius vero trianguli $2 \cdot 23 \cdot 33$ et $10 \cdot 56$.

Reversio ad formulam generalem.

$$ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd).$$

§. 16. Quando autem in aequatione quadrata §. 13., ultimum terminum zz ad nihilum redigere non licet, semper hoc fieri potest in primo termino absoluto, unde fit $3x - 2s + \beta = 0$, ex qua aequatione elicitur $2s = 3\alpha + \beta$ sive $s = \frac{4\alpha - 1}{2}$. Hoc igitur primo termino sublato duo reliqui per z divisi dant hanc aequationem: $3\alpha + 2\beta s - ss + (\alpha + \beta ss) z = 0$, quae aequatio abit in hanc: $\frac{3}{z} + (\alpha + \beta ss) z = 0$, unde fit $z = \frac{-3}{4\alpha + 4\beta ss}$. Cum igitur sit $2s = 4\alpha - 1$, erit $z = \frac{-3}{4\alpha + \beta(4\alpha - 1)^2}$ unde deducitur sequens solutio nostri problematis, quo requiritur ut fiat $ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$.

§. 17. Primo posito $b = cp$ et $d = aq$ fecimus $p = q(1 + z)$; tum vero, sumpta littera q pro lubitu, posuimus brevitatis gratia $\alpha = \frac{nqq}{nqq - m}$ et $\beta = \frac{m}{nqq - m}$, ita ut sit $\alpha - \beta = 1$. Quo facto invenimus $z = \frac{-3}{4\alpha + \beta(4\alpha - 1)^2}$, unde definitur $p = q(1 + z)$. Deinde posito $s = \frac{4\alpha - 1}{2} = \frac{3\alpha + \beta}{2}$ invenimus esse $\frac{a}{c} = 1 + sz$, unde cum $1 + sz$ sit plerumque fractio, hinc ambae litterae a et c facile per numeros integros assignantur; quibus inventis erit $b = cp$ et $d = aq$, quam solutionem aliquot exemplis illustremus.

Exemplum I.

quo haec formula resolvenda proponitur:

$$ab(aa+2bb) = cd(cc+2dd).$$

§. 18. Hic igitur est $m = 1$ et $n = 2$, unde sumpto numero $q = 1$ erit $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, hincque $s = \frac{3}{2}$ et $z = -\frac{1}{18}$, ideoque $p = \frac{18}{17}$; tum vero $\frac{a}{c} = \frac{31}{36}$, quocirca sumamus $a = 31$ et $c = 36$, unde denique fit $b = 36$ et $d = 31$, ita ut solutio futura sit $31 \cdot 36\,(31^2 + 2 \cdot 36^2) = 38 \cdot 31\,(38^2 + 2 \cdot 31^2)$, id quod calculum instituenti mox patebit. Est enim $31^2 + 2 \cdot 36^2 = 3553 = 11 \cdot 17 \cdot 19$ et $38^2 + 2 \cdot 31^2 = 3366 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17$, quibus factoribus substitutis utrinque prodit idem productum $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31$.

Alia solutio ejusdem exempli.

§. 19. Sumatur hic $q = \frac{1}{2}$, eritque $\alpha = -1$ et $\beta = -2$. Deinde vero erit $s = -\frac{5}{2}$ et $z = \frac{1}{18}$, hinc ergo colligimus $p = \frac{19}{86}$ et $\frac{a}{c} = \frac{31}{36}$. Capiatur ergo $a = 31$ et $c = 36$, ex quibus denique fit $b = 19$ et $d = \frac{31}{2}$; unde, hos numeros duplicando, habebimus $a = 62$; $b = 38$; $c = 72$ et $d = 31$, ita ut sit $62 \cdot 38\,(62^2 + 2 \cdot 38^2) = 72 \cdot 31\,(72^2 + 2 \cdot 31^2)$, ubi per factores est $62^2 + 2 \cdot 38^2 = 6732 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17$ et $72^2 + 2 \cdot 31^2 = 7106 = 2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19$. Sicque utrinque prodit idem productum $2^4 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31$.

Exemplum II.

quo haec formula resolvenda proponitur:

$$ab(aa+3bb) = cd(cc+3dd).$$

§. 20. Hic ergo est $m = 1$ et $n = 3$ hincque $\alpha = \frac{3qq}{3qq-1}$ et $\beta = \frac{1}{3qq-1}$. Sumamus nunc primo $q = 1$, ut sit $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$, hinc autem fiet $s = \frac{5}{2}$ et $z = -\frac{1}{17}$, quamobrem erit $p = \frac{31}{19}$

et $\frac{b}{c} = \frac{22}{37}$. Capiatur ergo $a = 22$ et $c = 37$, fietque $b = 31$ et $d = 22$, consequenter habebimus

$22 . 31 (22^2 + 3 . 31^2) = 37 . 22 (37^2 + 3 . 22^2)$. Hic scilicet erit $22^2 + 3 . 31^2 = 3367 = 7 . 13 . 37$ et $37^2 + 3 . 22^2 = 2821 = 7 . 13 . 31$; sicque utrinque idem oritur productum, scilicet $2 . 7 . 11 . 13 . 31 . 37$.

Alia solutio ejusdem exempli.

§. 21. Sumatur $q = \frac{1}{2}$, eritque $\alpha = -3$ et $\beta = -4$, hincque porro $s = -\frac{13}{2}$ et $z = \frac{2}{688}$, quocirca habebimus $p = \frac{691}{1376}$ et $\frac{a}{c} = \frac{1337}{1376}$. Capiatur ergo $a = 1337$ et $c = 1376$, unde fit $b = 691$ et $d = \frac{1337}{2}$. Duplicatis ergo valoribus habebimus $a = 2674$; $b = 1382$; $c = 2752$ et $d = 1337$.

Adhuc alia solutio ejusdem exempli.

§. 22. Sumamus hic $q = 2$, eritque $\alpha = \frac{12}{11}$ et $\beta = \frac{1}{11}$, unde fit $s = \frac{37}{22}$ et $z = -\frac{3993}{6977}$; ex quo fit $p = \frac{5968}{6977}$, porro vero $sz = -\frac{13431}{13954}$, ideoque $\frac{a}{c} = \frac{523}{13954}$. Sicque sumi poterit $a = 523$ et $c = 13954$, unde tandem fit $b = 11936$ et $d = 1046$.

§. 23. Casum principalem, quo $m = 1$ et $n = 1$, quandoquidem hinc inventio binorum biquadratorum pendet, quorum summam in alia duo biquadrata resolvere liceat, peculiari tractationi reservamus, quae ergo continebit evolutionem hujus formulae $ab (aa + bb) = cd (cc + dd)$.

§. 24. Cum igitur hic sit $m = 1$ et $n = 1$, pro quolibet numero ad lubitum assumpto q capiatur $\alpha = \frac{qq}{qq-1}$ et $\beta = \frac{1}{qq-1}$, unde porro accipiatur $s = \frac{3\alpha+\beta}{2}$ atque $z = \frac{-3}{4\alpha+\beta(3\alpha+\beta)^2}$, quibus valoribus inventis erit $p = q (1 + z)$ et $\frac{a}{c} = 1 + sz$.

Denique vero erit $b = cp$ et $d = a = aq$, quibus praemissis ad exempla descendamus.

Exemplum I.

quo $q = 3$.

§. 24. Evidens scilicet est hoc casu sumi non posse $q = 1$, quia litterae α et β fierent infinitae; deinde vero facile est praevidere, positionem $q = 3$ simpliciorem solutionem suppeditare quam $q = 2$. Sumpto igitur $q = 3$ erit $\alpha = \frac{1}{8}$ et $\beta = \frac{1}{8}$, unde fit $s = \frac{7}{4}$ atque $z = -\frac{96}{193}$. Hinc ergo colligitur $p = \frac{291}{193}$, tum vero $sz = -\frac{168}{193}$, ideoque $\frac{a}{c} = 1 + sz = \frac{25}{193}$; quocirca capiatur $a = 25$ et $c = 193$, eritque $b = 291$ et $d = 75$. Sicque pertingimus ad hanc solutionem

$$25 \cdot 291 \,(25^2 + 291^2) = 193 \cdot 75 \,(193^2 + 75^2)$$

ubi notetur esse

$$25^2 + 291^2 = 85306 = 2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 193 \text{ et}$$
$$193^2 + 75^2 = 42879 = 2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 97.$$

Nunc autem facile perspicitur idem productum utrinque per factores eosdem prodire $2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 97 \cdot 193$.

§. 25. Transferamus nunc hanc solutionem ad biquadrata, atque in genere si fuerit $ab\,(aa + bb) = cd\,(cc + dd)$, statuatur $a = p + q$ et $b = p - q$, similique modo $c = r + s$ et $d = r - s$, prodibitque ista aequatio: $2\,(p^4 - q^4) = 2\,(r^4 - s^4)$. Hoc ergo modo erit $p^4 + s^4 = q^4 + r^4$, ubi notetur esse $p = \frac{a+b}{2}$; $q = \frac{a-b}{2}$; $r = \frac{c+d}{2}$ et $s = \frac{c-d}{2}$; sive duplicando, sumere licebit $p = a + b$; $q = a - b$; $r = c + d$ et $s = c - d$. Ex casu igitur modo invento colligimus $p = 158$ $q = 133$; $r = 134$; et $s = 59$.

§. 26. Hi numeri prorsus conveniunt cum iis, quos initio commemoravimus, atque adeo sine dubio simplicissi-

mam solutionem illius problematis, quod olim tractaveram, suppeditant, cum sit $158^4 + 59^4 = 133^4 + 134^4$. Hic autem praeter expectationem se offert alia solutio nostrae formulae $ab\,(aa + bb) = cd\,(cc + dd)$, hinc enim sequitur fore $158^4 - 134^2 = 133^4 - 59^4$, unde in factores resolvendo fit $24 \cdot 292\,(158^2 + 134^2) = 74 \cdot 192\,(133^2 + 59^2)$; ubi notetur ob $pp + qq = \frac{1}{2}(p+q)^2 + \frac{1}{2}(p-q)^2$, fore $158^2 + 134^2 = \frac{1}{2}(292)^2 + \frac{1}{2}(24)^2$, similique modo $133^2 + 59^2 = \frac{1}{2}(192)^2 + \frac{1}{2}(74)^2$, quibus substitutis prodit forma nostrae similis

$$24 \cdot 292\,(292^2 + 24^2) = 74 \cdot 192^2\,(74^2 + 192^2)$$

singulisque factoribus per 2 divisis erit

$$12 \cdot 146\,(146^2 + 12^2) = 37 \cdot 96\,(37^2 + 96^2).$$

§. 27. Ecce ergo deducti sumus ad solutionem adhuc simpliciorem nostrae formulae $ab\,(aa+bb) = cd\,(cc+dd)$, qua est $a = 12$; $b = 146$; $c = 37$ et $d = 96$. Siquidem hi numeri notabiliter sunt minores, quam supra inventi; unde sequitur methodus generalis ex qualibet solutione nostrae formulae aliam solutionem derivandi. Cum enim posiso $a + b = p$; $a - b = q$; $c + d = r$ et $c - d = s$, prodeat haec aequalitas: $p^4 + s^4 = q^4 + r^4$, inde vicissim erit $p^4 - r^4 = q^4 - s^4$, unde sumptis factoribus erit

$$(p+r)(p-r)(pp+rr) = (q+s)(-s)(qq+ss), \text{ sive}$$
$$(p+r)(p-r)[(p+r)^2+(p-r)^2] = (q+s)(q-s)[(q+s)^2+(q-s)^2].$$

Quamobrem si statuamus $p + r = a'$; $p - r = b'$; $q + s = c'$ et $q - s = d'$, habebimus $a'b'\,(a'a' + b'b') = c'd'\,(c'c' + d'd')$, quae ergo aequalitas locum habebit, si sumatur $a' = (a+b) + (c+d)$; $b' = (a+b) - (c+d)$; $c' = (a-b) + (c-d)$ et $d' = (a-b) - (c-d)$.

§. 28. Cum igitur invenissemus $a = 291$; $b = 25$; $c = 193$ et $d = 75$, erit $a+b = 316$; $a - b = 266$; $c + d = 268$ et $c - d = 118$.

Hinc colligitur fore $a' = 584$; $b' = 48$; $c' = 384$ et $d' = 148$, qui numeri per 4 depressi praebent solutionem simplicissimam, scilicet $a' = 146$; $b' = 12$; $c' = 96$ et $d' = 37$; ita ut sit $146 \cdot 12\,(146^2 + 12^2) = 96 \cdot 37\,(96^2 + 37^2)$, ubi nempe est $146^2 + 12^2 = 21460 = 2^2 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 37$ et $96^2 + 37^2 = 10585 = 5 \cdot 29 \cdot 73$; et nunc utrinque resultat idem productum $2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 73$, Ob insignem igitur usum hujus regulae eam sequenti theoremate complectamur.

Theorema.

§. 29. *Si quatuor numeri* a, b, c, d *ita fuerint comparati, ut sit* $ab\,(aa + bb) = cd\,(cc + dd)$, *tum si inde formentur isti quaterni numeri:* $A = (a + b) + (c + d)$; $B = (a + b) - (c + d)$; $C = (a - b) + (c - d)$ et $D = (a - b) - (c - d)$, *erit quoque* $AB\,(A^2 + B^2) = CD\,(C^2 + D^2)$.

Hinc igitur patet pro qualibet solutione semper dari adhuc aliam ipsi conjugatam, ope hujus theorematis inveniendam, ita ut perpetuo binae solutiones conjugatae exhiberi queant, quae ita invicem sunt connexae, ut ope theorematis altera ex altera definiatur.

§. 30. Quo nunc hinc alias solutiones facilius invenire liceat, formulas repertas ita adornemus, ut inde statim valores integri pro numeris a, b, c, d exhiberi queant. Hunc in finem, quoniam etiam pro q fractiones accipere licet, statim ponamus $q = \frac{f}{g}$, eritque $\alpha = \frac{ff}{ff - gg}$ et $\beta = \frac{gg}{ff - gg}$, unde fit $s = \frac{3ff + gg}{2(ff - gg)}$. Hinc cum porro sit $z = \frac{-3}{4\alpha + \beta(3\alpha + \beta)^2}$, erit $z = \frac{-3(ff - gg)^3}{4f^6 + f^4gg + 10ffg^4 + g^6}$, unde fit $1 + z = \frac{f^6 + 10f^4gg + ffg^4 + 4g^6}{4f^6 + f^4gg + 10ffg^4 + g^6}$, tum vero erit $sz = -\frac{3(ff + gg)(ff - gg)^2}{2(4f^6 + f^4gg + 10ffg^4 + g^6)}$, ergo

$$1 + sz = -\frac{-f^6 + 17f^4gg + 17ffg^4 - g^6}{2(4f^6 + f^4gg + 10ffg^4 + g^6)} = \frac{(ff + gg)(-f^4 + 18ffgg - g^4)}{2(4f^6 + f^4gg + 10ffg^4 + g^6)}.$$

§. 31. Cum igitur posuissemus $p = q(1+z) = \frac{f}{g}(1+z)$, erit $p = \frac{f(f^6+10f^4gg+ffg^4+4g^6}{g(4f^6+f^4gg+10ffg^4+g^6)}$. Denique habebamus $\frac{a}{c} = 1 + \mathcal{S}z$, unde si statuamus

$a = (ff+gg)(-f^4+18ffgg-g^4)$ et $c = 2(4f^6+f^4gg+10ffg^4+g^6)$, cum fuerit $b = pc$ et $d = aq$, erit $b = \frac{2f(f^6+10f^4gg+ffg^4+4g^6)}{g}$ er tandem $d = \frac{f(ff+gg)(-f^4+18ffgg-g^4)}{g}$. Multiplicemus igitur omnes hos valores per g, eritque ut sequitur:

$a = g(ff+gg)(-f^4+18ffgg-g^4)$; $c = 2g(4f^6+f^4gg+10ffg^4+g^6)$
$b = 2f(f^6+10f^4gg+ffg^4+4g^6)$; $d = f(ff+gg)(-f^4+18ffgg-g^4)$.

§. 32. Hae quidem formulae numeros vehementer magnos producunt, qui autem plerumque per communem divisorem ad numeros multo minores redigi possunt. Veluti si, ut supra fecimus, sumamus $f = 3$ et $g = 1$, nostrae formulae dabunt $a = 800$; $b = 9312$; $c = 6176$; et $d = 2400$; hi autem numeri omnes divisionem admittunt per 32, quo pacto ad ipsos numeros supra inventos deprimuntur.

Exemplum II.

quo $f = 2$ et $g = 1$.

§. 33. Substitutis his valoribus reperiemus $a = 5 \cdot 55 = 275$; $b = 928$; $c = 626$ et $d = 550$, qui numeri ulterius ad minores deprimi non possunt. Hujus solutionis etiam exhibeamus conjugatam secundum theorema supra datum; erit ergo $A = 2379$; $B = 27$; $C = 729$; et $D = 577$. Sicque duas nacti sumus novas solutiones.

Alia Solutio.

aequationis $ab(aa+bb) = cd(cc+dd)$.

§. 34. Posito ut ante $b = cp$ et $d = aq$ adepti sumus hanc aequationem: $\frac{aa}{cc} = \frac{p^3-q}{q^3-p}$, ita ut hanc fractionem

ad quadratum redigi oporteat, ad quod praestandum hic alia via utamur, quam in forma generali adhibere non licuisset. Statuamus scilicet $p = 1 + \alpha z$ et $q = 1 + \beta z$, reperieturque $\frac{aa}{cc} = \frac{3\alpha - \beta + 3\alpha\alpha z + \alpha^3 zz}{3\beta - \alpha + 3\beta\beta z + \beta^3 zz}$, sicque pervenimus ad fractionem, in qua quantitas incognita z tam in numeratore quam in denominatore non ultra quadratum assurgit, cujusmodi formulae satis commode tractari possunt, si fuerint vel primae partes absolutae quadrata, vel si partes postremae fuerint quadrata.

Evolutio casus prioris,
quo formulae $3\alpha - \beta$ et $3\beta - \alpha$ sunt quadrata.

§. 35. Statuamus igitur $3\alpha - \beta = ff$ et $3\beta - \alpha = gg$, eritque $\alpha = \frac{3ff + gg}{8}$ et $\beta = \frac{ff + 3gg}{8}$, hocque modo habebimus $\frac{aa}{cc} = \frac{ff + 3\alpha\alpha z + \alpha^3 zz}{gg + 3\beta\beta z + \beta^3 zz}$, quamobrem statuamus $aa = ff + 3\alpha\alpha z + \alpha^3 zz$ et $cc = gg + 3\beta\beta z + \beta^3 zz$. Jam ut has formulas ad quadrata reducamus, formemus hanc aequalitatem: $aagg - ccff = 3(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff)z + (\alpha^3 gg - \beta^3 ff)zz$, et quia hic membrum sinistrum duos habet factores $ag + cf$ et $ag - cf$, etiam membrum dextrum in duos factores resolvi oportet, quorum alter statuatur $ag + cf = \frac{z}{\lambda}$, eritque alter $ag - cf = 3\lambda(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff) + \lambda(\alpha^3 gg - \beta^3 ff)z$, ubi valorem λ inveniendum primo fiat $z = 0$ et addantur quadrata horum duorum factorum, quorum summa erit $2(aagg + ccff) = 9\lambda\lambda(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff)^2$; ut vero ex ipsis formulis propositis, posito $z = 0$, ob $aa = ff$ et $cc = gg$, erit $2(aagg + ccff) = 4ffgg = 9\lambda\lambda(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff)^2$, unde reperitur $\lambda = \frac{2fg}{3(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff)}$, quae forma, ob $ff = 3\alpha - \beta$ et $gg = 3\beta - \alpha$, abit in hanc $\lambda = \frac{2fg}{3(\beta - \alpha)^2}$.

§. 36. Invento jam hoc valore pro λ bini factores erunt $ag + cf = \frac{3(\beta-\alpha)3z}{2fg}$ et $ag - cf = 2fg + \frac{2fg(\alpha^3 gg - \beta^3 ff)z}{3(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff)}$, sive $ag - cf = 2fg + \frac{2fg(\beta+\alpha)(\beta\beta - 3\alpha\beta + \alpha\alpha)}{3(\beta-\alpha)^2}$. Statuamus autem brevitatis gratia $\frac{(\alpha+\beta)(\beta\beta - 3\alpha\beta + \alpha\alpha)}{3(\beta-\alpha)^2} = \Delta$ ut sit $ag - cf = 2fg + 2fg\Delta z$. Addantur nunc iterum quadrata harum formarum, et prodibit:

$$2(aa\,gg + cc\,ff) = 4ff\,gg + 8ff\,gg\,\Delta z + 4ff\,gg\,\Delta^2 z\,z + \frac{9(\beta-\alpha)^6 zz}{4ff\,gg}$$

Ex ipsis autem formulis propositis colligimus

$$2(aa\,gg - cc\,ff) = 4ff\,gg + 6(\alpha\alpha\,gg + \beta\beta\,ff)z + 2(\alpha^3 gg + \beta^3 ff)zz$$

ubi ergo prima membra se mutuo tollunt, reliqua per z divisa dabunt hanc aequationem:

$$6(\alpha\alpha\,gg + \beta\beta\,ff) + 2(\alpha^3 gg + \beta^3 ff)z = 8ff\,gg\,\Delta + 4ff\,gg\,\Delta^2 z + \frac{9(\beta-\alpha)^6 z}{4ff\,gg}$$

ex qua aequatione facile deducitur valor ipsius z. Has autem formulas ulterius non evoluamus, quoniam evolutio quovis casu speciali facilius instituetur.

Evolutio casus quo $f = 3$ et $g = 1$.

§. 37. Hic igitur erit $\alpha = \frac{7}{2}$ et $\beta = \frac{3}{2}$, hinc ergo fiet $aa = 9 + \frac{147}{4}z + \frac{343}{8}zz$ et $cc = 1 + \frac{27}{4}z + \frac{27}{8}zz$; porro vero erit $\Delta = -\frac{25}{48}$. Hinc ergo pro quantitate z invenienda habebimus hanc aequationem:

$$195 + \frac{293}{2}z = -\frac{75}{2} + \frac{625}{64}z + 16z = -\frac{75}{2} + \frac{1649}{64}z, \text{ sive}$$

$\frac{465}{2} = -\frac{7727}{64}z$, unde fit $z = -\frac{14880}{7727}$. Hoc modo perveniremus ad nimis magnos numeros, quos ultra evolvere opere non est pretium.

§. 28. Interim tamen haud difficile erit hinc adeo in genere valores idoneos pro litteris a, b, c, d exhibere.

Sumptis scilicet pro lubitu binis quadratis ff et gg, capiantur numeri α et β ita, ut sit $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3ff+gg}{3gg+ff}$; scilicet postquam fractio $\frac{3ff+gg}{3gg+ff}$ ad minimos terminos fuerit reducta, numerator pro α, denominator vero pro β accipiatur, quo facto erunt numeri quaesiti

$$a = f\,(\alpha+\beta)\cdot(\alpha\alpha - 3\alpha\beta + \beta\beta);$$
$$b = g\,(\beta^3 - 5\,\alpha\beta\beta + 4\,\alpha\alpha\beta - 2\,\alpha^3);$$
$$c = g\,(\alpha+\beta)\,(\alpha\alpha - 3\alpha\beta + \beta\beta);$$
$$d = f\,(\alpha^3 - 5\,\alpha\alpha\beta + 4\,\alpha\beta\beta - 2\,\beta^3).$$

Vel si ponatur $(\alpha+\beta)\,(\alpha\alpha - 3\alpha\beta + \beta\beta) = \Delta$, erit $a = f\,\Delta$; $b = g\,(\Delta - 3\alpha\,(\alpha-\beta)^2)$; $c = g\,\Delta$ et $d = f(\Delta - 3\beta(\alpha-\beta)^2)$. Harum formularum ope exempla multo facilius evolui poterunt.

§. 39. Ita si sumamus $f = 3$ et $g = 1$, erit $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$; erit ergo $\alpha = 7$ et $\beta = 3$, hincque $\Delta = -50$, quocirca ipsi numeri quaesiti reperiuntur $a = 150$; $b = 386$; $c = 50$ et $d = 582$, qui porro per binarium depressi fiunt $a = 75$; $b = 193$; $c = 25$ et $d = 291$.

§. 40. Consideremus nunc quoque casum, quo $f = 2$ et $g = 1$, eritque $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{13}{7}$; quare capiatur $\alpha = 13$ et $\beta = 7$, unde fit $\Delta = -1100$, hincque ipsi numeri quaesiti prodeunt $a = 2200$; $b = 2504$; $c = 1100$; $d = 3712$, qui per 4 depressi evadunt $a = 550$; $b = 626$; $c = 275$; $d = 928$; quae solutio convenit cum solutione supra §. 33. inventa.

§. 41. Fundamentum hujus Analyseos sequenti nititur problemati:

PROBLEMA.

Propositis his duabus formulis: $xx + 2fxy + hyy$, *nec non* $xx + 2gxy + kyy$, *invenire rationem inter numeros* x *et* y, *ut ambae iste formulae evadant quadrata.*

Solutio.

§. 42. Ponatur $xx + 2fxy + hyy = P^2$ et $xx + 2gxy + kyy = Q^2$ ac differentia dabit $PP - QQ = 2(f-g)xy + (h-k)yy$. Statuatur alter factor $P - Q = (f-g)y$, eritque alter $P + Q = 2x + \frac{(h-k)y}{f-g}$. Jam quadrata horum duorum factorum addantur, prodibitque

$$2P^2 + 2Q^2 = 4xx + \frac{4(h-k)xy}{f-g} + \frac{(h-k)^2yy}{(f-g)^2} + (f-g)^2yy;$$

ex ipsis autem formulis propositis erit

$$2P^2 + 2Q^2 = 4xx + 4(f+g)xy + 2(h+k)yy,$$

unde quia primi termini $4xx$ se destruunt, reliqui per y divisi dant hanc aequationem:

$$4(f+g)x + 2(h+k)y = \frac{4(h-k)x}{f-g} + \frac{(h-k)^2y}{(f-g)^2} + (f-g)^2y$$

sive $4(f-g)[ff-gg-h+k]x = ([(h-k)^2+(f-g)^2][(f-g)^2-2(h-k)])y$

hinc igitur erit $\frac{x}{y} = \frac{(f-g)^4 - 2(h+k)[(f-g)^2+(h-k)^2]}{4(f-g)(ff-gg-h+k)}$.

§. 43. Supra adhuc mentionem fecimus alius casus, quo ambae formulae pro aa et cc ad quadrata redigi queant (§. 34.) ubi, ut partes postremae fiant quadrata, necesse est ut ambo numeri α et β sint quadrata. Sit igitur $\alpha = mm$ et $\beta = nn$, eritque

$$aa = m^6zz + 3m^4z + 3mm - nn \text{ et}$$
$$cc = n^6zz + 3n^4z + 3nn - mm.$$

§. 44. Has aequalitates ut ad formam superioris problematis revocemus, ita repraesentemus:

$a\,a\,n^6 = m^6 n^6 zz + 3 m^4 n^6 z + 3 m m n^6 - n^8$ et
$c\,c\,m^6 = m^6 n^6 z z + 3 n^4 m^6 z + 3 n n m^6 - m^8$
et jam facta comparatione erit $x = m^3 n^3 z$, sumptoque $y = 1$, erit pro hoc casu $2 f m^4 n^3 z = 3 m^3 n^6 z$, unde fit $f = \frac{3}{2} m n^3$ et $g = \frac{3}{2} n m^3$, denique vero $h = 3 n n m^6 - m^8$ et $k = 3 m m n^6 - n^8$, unde colligitur $f - g = \frac{3}{2} m n (n n - m m)$ et $h - k = 3 n n m^6 + n^8 - 3 mmn^6 - m^8 = (n^4 - m^4)(n^4 + m^4 - 3 mm nn)$. Jam problema nobis praebet valorem $\frac{x}{y} = m^3 n^3 z = \frac{(f-g)^4 - 2(h-k)[(f-g)^2 + (h-k)^2]}{4(f-g)(ff - gg - h + k)}$.

§. 45. Coronidis loco subjungam hic adhuc aliam Analysin pro resolutione formulae $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$. Quoniam res perducta est ad hanc aequationem: $\frac{a\,a}{c\,c} = \frac{p^3 - q}{q^3 - p}$, ponatur $p = n n (q + 1) - 1$, fietque

$$\frac{a\,a}{c\,c} = \frac{n^6(q+1)^3 - 3 n^4 (q+1)^2 + 3 nn (q+1) - 1 - q}{q^3 - n n (q+1) + 1}$$

quae fractio per factorem $q + 1$ depressa dabit

$$\frac{a\,a}{c\,c} = \frac{n^6 (q+1)^2 - 3 n^4 (q+1) + 3 nn - 1}{qq - q + 1 - nn}, \text{ sive}$$

$$a\,a = n^6 q q + n^4 (2 nn - 3) q + (nn - 1)^3$$

tum vero

$$cc = qq - q + 1 - nn, \text{ sive } n^6 cc = n^6 qq - n^6 q - n^6 (nn - 1).$$

Pro problemate igitur capi oportebit $x = n^3 q$ et $y = 1$; reliqua sunt manifesta.

SOLUTIO
PROBLEMATIS MECHANICI.

Auctore
L. EULERO.

Conventui exhibuit die 25. April. 1782.

§. 1.

Tab. I. Fig. I. Referat circulus XTGF, cujus centrum in C, globum sive cylindrum, aliudve corpus rotundum, plano inclinato AH incumbens, cujus inclinatio ad horizontem sit angulus AHD $= \zeta$; circuli autem radius ponatur CX $= a$. Corporis, hoc circulo repraesentati, axis maneat perpetuo horizontalis, ejusque massa statuatur $=$ M, qua simul ejus pondus exprimatur. Momentum vero inertiae respectu axis sit $=$ M kk.

§. 2. Huic circulo, seu corpori rotundo, circumvolutum intelligatur filum, cujus terminus extremus fixus sit in puncto E, a plano inclinato distante intervallo AE $= a$, hoc est radio circuli aequali, cujus situs initio tangebat punctum E, filo scilicet penitus involuto. Hinc autem elapso tempore t pervenerit in situm figura repraesentatum, quem jam filum deferat in puncto T, ejusque portio ulterior circulo sit circumvoluta, indefinitae longitudinis, ut, quamdiu corpus descendat, evolvi queat.

§. 3. Nunc igitur circulus tangat planum inclinatum A H in puncto X, ac ponatur spatium $A X = x$, ita ut, sumpto intervallo $A B = a$, sit $B X = x - a$, eritque B X spatium motu corporis progressivo descriptum. Tum igitur, ducta recta E C, ea erit plano inclinato A H parallela, ideoque aequalis ipsi x; unde ducto radio C T erit anguli E C T cosinus $= \frac{a}{x}$, at anguli X C T sive C E T sinus $= \frac{a}{x}$. Ponatur autem iste angulus $X C T = C E T = \vartheta$, ita ut sit sin. $\vartheta = \frac{a}{x}$.

§. 4. Hinc jam longitudo fili evoluti colligitur fore $E T = x \cos. \vartheta$, cui si aequalis statuatur arcus T G F, erit F punctum circuli, quod initio applicatum erat puncto E, ubi ergo radius C F erat plano inclinato A H parallelus sive cadebat in E G. Statuatur angulus motu rotatorio jam confectus $G C F = \Phi$, erit angulus $T C F = 90° - \vartheta + \Phi$, ex quo ipse arcus $T G F = a\ (90° - \vartheta + \Phi)$, qui cum aequalis sit rectae $T E = a \cot. \vartheta$, hinc concluditur angulus $\Phi = \cot. \vartheta - 90° + \vartheta$. Unde patet, tam spatium x quam angulum Φ per angulum ϑ definiri posse, cum sit $X = \frac{a}{\sin. \vartheta}$ et $\Phi = \cot. \vartheta - 90° + \vartheta$.

§. 5. Ut jam in motum corporis nostri super plano inclinato descendentis inquiramus, observandum est, corpus primo sollicitari a propria gravitate $= M$; unde oritur vis motum progressivum accelerans $= M \sin. \zeta$. Deinde vero corpus etiam urgetur a tensione fili T E, quae autem tensio etiamnunc penitus est incognita. Ponatur ea $= T$, et cum corpus urgeat secundum directionem T E, ea producit vim directioni motus progressivi contrariam secundum C E sollicitantem $= T \cos. \vartheta$, ita ut motus progressivus centri C, ubi simul centrum gravitatis totius corporis existere assumimus, vis sit $= M \sin. \zeta - T \cos. \vartheta$.

§. 6. Ex primis igitur motus principiis, sumendo elementum temporis dt constans, ac denotante g altitudinem lapsus uno minuto secundo peracti, sequitur fore $\frac{\partial\partial x}{2g\partial t^2} = \frac{M \sin\zeta - T\cos\vartheta}{M}$. Hac scilicet aequatione motus corporis progressivus determinatur, unde aurem nihil adhuc concludere licet, propterea quod vis T est incognita. Hanc ergo aequationem combinari oportet cum ea, qua motus corporis gyratorius determinatur.

§. 7. Jam observavimus, corpus motu gyratorio jam absolvisse angulum G C F $= \Phi$, in sensum G F, qui ergo motus unice producitur a tensione fili E T $=$ T, cujus momentum, respectu axis gyrationis, est T a, quod divisum per momentum inertiae M kk dabit accelerationem motus gyratorii, quae ex principiis motus est $\frac{\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2}$. Habebimus ergo hanc aequationem $\frac{\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2} = \frac{Ta}{Mkk}$, ex qua colligitur ipsa vis incognita, seu tensio $T = \frac{Mkk\partial\partial\Phi}{2ag\partial t^2}$.

§. 8. Substituatur igitur iste valor in aequatione ante inventa et facta divisione per massam M prodibit ista aequatio: $\frac{\partial\partial x}{2g\partial t^2} = \sin.\zeta - \frac{kk\partial\partial\Phi\cos.\vartheta}{2ag\partial t^2}$, unde fit $\sin.\zeta = \frac{kk\partial\partial\Phi\cos.\vartheta + a\partial\partial x}{2ag\partial t^2}$, atque in hujus aequationis integratione erit elaborandum. Verum si ambas incognitas x et Φ per angulum ϑ exprimere velimus, ope formularum $x = \frac{a}{\sin.\vartheta}$ et $\Phi = \cot.\vartheta - 90° + \vartheta$, ob differentialia secundi gradus delaberemur in aequationem tantopere complicatam, ut nihil prorsus inde concludi posset.

§. 9. Singulari autem artificio haec insignis difficultas superari potest, cujus ope potius ipse angulus ϑ ex calculo extrudi poterit, ita ut, etiamsi binae variabiles x et Φ in ea relinquantur, totum tamen negotium facile confici queat. Cum enim sit $\partial x = -\frac{a\partial\vartheta\cos.\vartheta}{\sin.\vartheta^2}$ et $\partial\Phi = -\frac{\partial\vartheta}{\sin.\vartheta^2} + \partial\vartheta = -\frac{\partial\vartheta\cos.\vartheta^2}{\sin.\vartheta^2}$, colligitur $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\cos.\vartheta}{a}$, sive $\cos.\vartheta = \frac{a\partial\Phi}{\partial x}$.

§. 10. In aequatione ergo differentio-differentiali ante inventa loco cos. ϑ iste valor $\frac{a\partial\Phi}{\partial x}$ substitutus hanc producit aequationem integrationem admittens: $\partial x \sin. \zeta = \frac{kk\partial\Phi\partial\partial\Phi + \partial x\partial\partial x}{2g\partial t^2}$, cujus integrale est $C + x \sin. \zeta = \frac{\partial x^2 + kk\partial\Phi^2}{4g\partial t^2}$. Quoniam autem motus initium assumsimus ubi $x = a$, hoc integrale, habita constantis ratione, erit $(x-a) \sin. \zeta = \frac{\partial x^2 + kk\partial\Phi^2}{4g\partial t^2}$.

§. 11. Ex hac jam aequatione ipsum tempus elapsum t determinari poterit. Cum enim sit

$$4g(x-a)\partial t^2 \sin. \zeta = \partial x^2 + kk\partial\Phi^2, \text{ ob } x = \frac{a}{\sin. \vartheta},$$

$\partial x = -\frac{a\partial\vartheta \cos. \vartheta}{\sin. \vartheta^2}$ et $\partial\Phi = -\frac{\partial\vartheta \cos. \vartheta^2}{\sin. \vartheta^2}$, his valoribus substitutis habebitur ista aequatio:

$\frac{4ag\partial t^2 \sin. \zeta(1-\sin. \vartheta)}{\sin. \vartheta} = \frac{\partial\vartheta^2 \cos. \vartheta^2}{\sin. \vartheta^2}(aa + kk\cos. \vartheta^2)$, unde fit

$\partial t = \frac{\partial\vartheta \cos. \vartheta}{2 \sin. \vartheta} \sqrt{\frac{aa + kk \cos. \vartheta^2}{ag \sin. \zeta \sin. \vartheta (1-\sin. \vartheta)}}$, unde colligitur

$t = -\int \frac{\partial\vartheta \cos. \vartheta}{2 \sin. \vartheta} \sqrt{\frac{aa + kk \cos. \vartheta^2}{ag \sin. \zeta \sin. \vartheta (1-\sin. \vartheta)}}$. Hic scilicet signum negativum praefigimus, quoniam angulus ϑ continuo decrescit, qui angulus initio, ubi $t = 0$, erat $\vartheta = 90°$.

§. 12. Hinc igitur patet, tempus t pro quovis angulo ϑ definiri posse per formulam quidem integralem, quam autem neque per lagorithmos neque per arcus circulares evolvere licet. Quo haec expressio aliquanto simplicior evadat, ponatur sin. $\vartheta = s$, eritque tempus

$$t = \frac{-1}{2\sqrt{ag \sin. \zeta}} \int \frac{\partial s}{s} \sqrt{\frac{aa + kk(1-ss)}{s(1-s)}}$$

ac si ponatur $s = \frac{1}{z}$ erit

$$t = \frac{+1}{2\sqrt{ag \sin. \zeta}} \int \frac{\partial z}{z} \sqrt{\frac{(aa+kk)zz - kk}{z-1}}$$

Vicissim ergo, concessis quadraturis, ad quodvis tempus t angulus ϑ reperiri poterit, quo invento etiam spatium x cum angulo Φ habebitur.

§. 13. Longe autem difficilius est tensionem fili E T per expressionem finitam assignare, quippe quae hactenus fuerat incognita atque hanc ob caussam ex calculo expulsa. Erat autem ex motu gyratorio $\frac{T a}{M kk} = \frac{\partial\partial\Phi}{2 g \partial t^2}$, unde necesse est differentiale secundum $\partial\partial\Phi$ ad differentiale primi gradus revocare, quod praestari poterit ope postremae aequationis differentio-differentialis, unde integrale hausimus, quaeque erat $\partial x\,\partial\partial x + kk\,\partial\Phi\partial\partial\Phi = 2 g \partial t^2 \partial x$ sin. ζ. Fuerat autem ∂x cos. $\vartheta = a\partial\Phi$, hinc differentiando colligitur $a\partial\partial\Phi = \partial\partial x$ cos. $\vartheta - \partial\vartheta\,\partial x$ sin. ϑ, ex qua aequatione oritur $\partial\partial x = \frac{a\partial\partial\Phi}{\cos.\vartheta} + \partial x\,\partial\vartheta\, tag\,\vartheta$, qui valor in illa substitutus praebet hanc: $\partial\partial\Phi\,(\frac{a}{\cos.\vartheta} + \frac{kk\cos.\vartheta}{a}) = 2 g \partial t^2$ sin. $\zeta - \partial x\,\partial\vartheta$ tag. ϑ. Sicque nunc differentio-differentiale $\partial\partial\Phi$ per differentialia primi gradus definitur. Atque si loco $2 g \partial t^2$ et ∂x valores supra $\partial\vartheta$ expressi substituantur, orietur

$$\frac{\partial\partial\Phi\,(aa + kk\cos.\vartheta^2)}{a\cos.\vartheta} = \partial\vartheta^2\,\left(\frac{aa(1 + \sin.\vartheta^2 - 2\sin.\vartheta^3) + kk\cos.\vartheta^4}{2a\sin.\vartheta^2(1 - \sin.\vartheta)}\right).$$

§. 14. Quod si ergo hinc valor pro $\partial\partial\Phi$ in formula pro tensione fili T inventa substituatur, prodibit

$$T = \frac{M k k}{2 a g \partial t^2} + \frac{\partial\vartheta^2\cos.\vartheta\,(aa(1 + \sin.\vartheta^2 - 2\sin.\vartheta^3) + kk\cos.\vartheta^4)}{2\sin.\vartheta^3(1 - \sin.\vartheta)(aa + kk\cos.\vartheta^2)}.$$

Est vero $2 a g \partial t^2 = \frac{\partial\vartheta^2\cos.\vartheta^2(aa + kk\cos.\vartheta^2)}{2\sin.\vartheta^2\sin.\zeta\sin.\vartheta(1 - \sin.\vartheta)}$, unde fit tensio

$$T = \frac{M k k \sin.\zeta\,(aa(1 + \sin.\vartheta^2 - 2\sin.\vartheta^3) + kk\cos.\vartheta^4}{\cos.\vartheta\,(aa + kk\cos.\vartheta^2)^2}$$

quae expressio quia solum angulum ϑ involvit, ad quodvis tempus elapsum t tensio T absolute assignari poterit et cum pondere M comparari.

§. 15. Denique etiam tam celeritas corporis progressiva, quae est $\frac{\partial x}{\partial t}$, quam gyratoria $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, satis eleganter definiri potest. Si enim ponamus $\frac{\partial x}{\partial t} = v$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = u$, erit aequatio $vv + kkuu = 4g(x - a)\sin.\zeta$. Unde simul patet principium virium vivarum hic egregie conservari. Cum enim sit Mvv vis viva motus progressivi et $Mkkuu$ vis viva motus gyratorii, erit summa utriusque $M(vv + kkuu) = 4gM(x - a)\sin.\zeta$, cujus aequationis membrum postremum exprimit descensum verticalem centri gravitatis corporis in massam M ductum, cui constat semper aequalem esse debere totam vim vivam hoc descensu generatam.

§. 16 Quin etiam ex solo principio conservationis virium vivarum ista aequatio facile deduci potuisset. Neque vero patet quomodo hinc ipsa tensio fili, qua insigne momentum perfectae solutionis est constituendum, derivari potuisset. Quam ob caussam operam dedi, ut universam hujus problematis solutionem ex primis motus principiis repeterem.

DE
MOTU BACULI
SUPER PLANO INCLINATO, CUI INSISTIT, DESCENDENTIS.

Auctore
NICOLAO FUSS.

Conventui exhibuit die 23 Febr. 1797.

§. 1.

Si discus circularis politissimus, vel etiam globus plano imponatur inclinato pariter politissimo, is, actioni gravitatis relictus, super hoc plano rependo, seu radendo descendet. Quoniam enim, seposita frictione, praeter gravitatem nulla alia vis adest, directio autem vis gravitatis per ipsum centrum gravitatis transit, inde nullus motus gyratorius oriri potest. Idem evenit quando pertica vel baculus B A perpendiculariter imponatur plano inclinato politissimo E C; remota enim frictione corpus planum radendo delabetur, servata positione plano normali. Nihil enim impedit quo minus extremitas A, planum radendo, sequatur centrum gravitatis in directione plano parallelo G R procedens. Namque sola vis, quae in baculum agit, est gravitas, cujus directio per centrum gravitatis transit nullamque gyrationem circa hoc punctum gignere potest.

Tab. I. Fig. 2.

§. 2. Longe secus res se habet, quando positio initialis baculi non est perpendicularis, sed utcunque ad planum inclinata sub angulo B A C; tum enim extremitas A sollicitabitur vi F A, pressioni P aequali et opposita, cujus momentum demisso ex centro gravitatis G in planum E C, perpendiculo G H, erit P. A H; haecque vis producit motum gyratorium circa centrum gravitatis G, quo scilicet angulus B A C vel augetur, vel minuitur, prouti initio baculus vel versus E, vel versus C fuerit inclinatus. Hunc igitur motum in sequentibus pagellis accuratius examinare constitui. Tab. I. Fig. 3.

§. 3. Plano igitur E C, ad planum verticale E D inclinato sub angulo C E D $= \alpha$, imponatur in A baculus A B, ita ut ejus axis reperiatur in plano planis E D et E C normali, cum plano vero E C angulum faciat B A C $= \beta$. Iste porro baculus, cujus massa sit M, centrumque gravitatis in G ad distantiam A G $= a$, actioni gravitatis relictus, ima extremitate A planum E C radet, simulque obtinebit motum gyratorium circa centrum gravitatis, hicque motus absque frictione et perpetuo in eodem plano, planis E D et E C normali, fieri concipitur.

§. 4. Ponamus nunc tempore t minutorum secundorum ab initio motus elapso baculum pervenisse usque in punctum Z plani inclinati, existente spatio percurso A Z $= z$, inclinatione vero baculi, sive angulo B Z C $= \phi$. Quibus positis, si ex centro gravitatis G in planum E C demittatur perpendiculum G X, voceturque X A $= x$, G X $= y$, pro positione puncti G habebimus

$$x = z + a \cos. \phi;$$

$$y = a \sin. \phi.$$

§. 5. Quod vires attinet, quibus corpus sollicitatur, gravitatem M nempe et pressionem P, prior, qua centrum gravitatis G urgetur in directione G M, resolvatur secundum directiones G R et G X plano parallelam et normalem, eritque

$$\text{vis secundum } GR = M \cos. \alpha;$$
$$\text{vis secundum } GX = M \sin. \alpha.$$

Pressio autem P, quam corpus exerit in planum in directione plano normali Z Π, per reactionem dat vim in baculum agentem in directione contraria Z P, vel G Q. Denique haec ipsa vis P tendit ad producendum motum gyratorium circa centrum gravitatis, ejusque momentum est $P\,a \cos. \Phi$.

§. 6. His circa actionem virium ad motum sollicitantium, earumque directiones notatis principia mechanica sequentes suppeditabunt tres aequationes differentiales secundi gradus:

I. $\frac{M\,\partial\partial x}{2g\,\partial t^2} = M \cos. \alpha;$

II. $\frac{M\,\partial\partial y}{2g\,\partial t^2} = P - M \sin. \alpha;$

III. $\frac{M\,kk\,\partial\partial\Phi}{2g\,\partial t^2} = -P\,a \cos. \Phi.$

Ubi g indicat altitudinem, ex qua gravia libere primo minuto secundo delabuntur; $M\,kk$ vero momentum inertiae corporis respectu axis gyrationis, per centrum gravitatis transeuntis planoque verticali, in quo motus fieri concipitur, normalis.

§. 7. Prima harum aequationum ducta in $2g\,\partial t$ et integrata praebet celeritatem progressivam centri gravitatis secundum A X,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 2\,g\,t \cos. \alpha$$

ubi constantis additione non opus est, quoniam haec celeritas sponte evanescit, casu $t = 0$, uti requiritur. Ex hac postrema aequatione in ∂t ducta et denuo integrata deducitur intervallum

$$AX = x = C + g\,t\,t \cos.\ \alpha$$

ubi constans C ita est determinanda, ut pro statu initiali, ubi $t = 0$, fiat $x = a \cos.\ \beta$, ita ut habeamus

$$AX = x = a \cos.\ \beta + g\,t\,t \cos.\ \alpha.$$

§. 8. Tertia aequatio §. 6. statim dat pressionem baculi in planum

$$P = -\frac{M\,k\,k\,\partial\partial\,\Phi}{2g\ \partial t \cdot \cos.\Phi}.$$

Ex valore $y = a \sin.\ \Phi$ sequitur fore

$$\partial\partial y = \partial\partial \cdot (a \sin.\ \Phi)$$

hisque valoribus in secunda aequatione substitutis oritur ista:

$$\frac{\partial\partial.(a \sin.\Phi)}{2g\,\partial t^2} + \sin.\ \alpha + \frac{k\,k\,\partial\partial\,\Phi}{2g\,a\,\partial t^2 \cos.\Phi} = 0.$$

Ducatur haec aequatio in $2 \cdot \partial \sin.\ \Phi = 2\,\partial\Phi \cos.\ \Phi$, prodibitque aequatio integrabilis

$$\frac{2.\partial.\sin.\Phi.\partial\partial.(a \sin\ \Phi)}{2g\,\partial t^2} + 2 \sin.\alpha\,\partial\Phi \cos.\Phi + \frac{2\,k\,k\,\partial\Phi\,\partial\partial\Phi}{2g\,a\,\partial t^2} = 0$$

cujus integrale est

$$\frac{a\,(\partial \cdot \sin.\Phi)^2}{2g\,\partial t^2} + 2 \sin.\ \alpha \sin.\ \Phi + \frac{k\,k\,\partial\Phi^2}{2g\,a\,\partial t^2} = C$$

unde colligitur celeritas angularis seu gyratoria

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \sqrt{\frac{2g\,a\,(C - 2 \sin.\alpha \sin\ \Phi)}{k\,k + a\,a \cos.\ \Phi^2}}.$$

At vero initio, ubi $t = 0$ et $\Phi = \beta$ celeritas gyratoria debet esse nulla, ex quo concluditur fore constantem $C = 2 \sin.\ \alpha \sin.\ \beta$, hincque fit

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 2\sqrt{\frac{g\,a \sin.\alpha\,(\sin.\beta - \sin.\Phi)}{k\,k - a\,a \cos.\Phi^2}}$$

unde denique tempus ab initio motus elapsum ita expressum nanciscimur

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g\,a\,\sin.\,\alpha}} \int \frac{\partial\Phi \sqrt{(kk + aa\cos.\Phi^2)}}{\sqrt{(\sin.\beta - \sin.\Phi)}}.$$

§. 9. Quodsi igitur tempus t ex hac formula quolibet angulo Φ finite assignari posset, omnia reliqua elementa x, z, y forent determinata, quoniam est

$$x = a\cos.\beta + gtt\cos.\alpha$$
$$y = a\sin.\Phi$$
$$z = x - a\cos.\Phi.$$

Quin etiam ipsa pressio P, uti mox videbimus, pro quolibet angulo Φ facile assignari potest. Verum formula illa integralis $\int \frac{\partial\Phi \sqrt{(kk + aa\cos.\Phi^2)}}{\sqrt{(\sin.\beta - \sin.\Phi)}}$, ita est comparata, ut ejus integrale non nisi approximando, aut per quadraturas exhiberi queat.

§. 10. Quod pressionem attinet, ea commodissime sequenti modo determinabitur. Cum ex tertia aequatione §. 6. sit

$$P = -\frac{M\,kk\,\partial\partial\Phi}{2\,g\,a\,\partial t^2\cos.\Phi}$$

in §. 8. vero invenerimus

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 2\sqrt{\frac{g\,\sin.\alpha\,(\sin.\beta - \sin.\Phi)}{kk + aa\cos.\Phi^2}}$$

sumtis utrinque quadratis erit

$$\frac{\partial\Phi^2}{4g\,a\,\partial t^2} = \frac{\sin.\alpha\,(\sin.\beta - \sin.\Phi)}{kk + aa\cos.\Phi^2}$$

hincque differentiando et per $\partial\Phi\cos.\Phi$ dividendo adipiscimur

$$\frac{\partial\partial\Phi}{2g\,a\,\partial t^2\cos.\Phi} = \frac{2\,aa\sin.\alpha\sin.\Phi(\sin.\beta - \sin.\Phi)}{(kk + aa\cos.\Phi^2)^2} - \frac{\sin.\alpha}{kk + aa\cos.\Phi^2}$$

ita ut sit ratio pressionis ad pondus

$$\frac{P}{M} = \frac{kk\sin.\alpha}{kk + aa\cos.\Phi^2} - \frac{2\,aa\,kk\sin.\alpha\sin.\Phi(\sin.\beta - \sin.\Phi)}{(kk + aa\cos.\Phi^2)^2}$$

quae igitur pro statu initiali, ubi $\Phi = \beta$, est

$$\frac{P}{M} = \frac{kk\sin.\alpha}{kk + aa\cos.\beta^2}$$

pro statu finali vero, ubi $\Phi = 0$,

$$\frac{P}{M} = \frac{kk \sin. \alpha}{kk + aa}.$$

§. 11 Quoad methodum quemlibet casum determinatum per approximationem tractandi, quoniam pro statu initiali est $\Phi = \beta$, ab hoc valore inchoando angulo Φ successive tribui poterunt valores $\Phi = \beta$, $\Phi = \beta - i$, $\Phi = \beta - 2i$, $\Phi = \beta - 3i$, $\Phi = \beta - 4i$, et ita porro, usque ad $\Phi = \beta - \beta = 0$, ita ut decrementum constans sit $\partial\Phi = i$, denotante i angulum valde parvum, veluti unius gradus, duorum aut ad summum trium graduum, hocque modo ex formula differentiali

$$\partial t = \frac{i}{2\sqrt{g a \sin. \alpha}} \sqrt{\frac{kk + aa \cos. \Phi^2}{\sin. \beta - \sin. \Phi}}$$

elicientur incrementa temporis ∂t, quorum summae praebebunt tempora epochis $\Phi = \beta$, $\Phi = \beta - i$, $\Phi = \beta - 2i$, etc. respondentia; tum vero pro singulis epochis innotescent x, y, z et P; hocque modo motus baculi satis accurate cognoscetur, eoque accuratius, quo minor angulus i fuerit assumtus.

§. 12. Quoniam autem formula pro ∂t modo exhibita ea laborat difficultate, quod pro ipso motus initio, ubi $\Phi = \beta$, ejus denominator evanescit, ad abigendum hoc incommodum ponam $\sin. \beta - \sin. \Phi = \sin. \psi^2$, ita ut sit $-\partial\Phi \cos. \Phi = 2\partial\psi \sin. \psi \cos. \psi$, ubi signum negationis tantum indicat, crescente angulo ψ angulum Φ decrescere. Hinc autem prodit

$$\partial t = \frac{b \cos. \frac{1}{2}\psi \sqrt{(kk + aa \cos. \Phi^2)}}{\cos. \Phi}$$

existente $h = \frac{\partial\psi}{\sqrt{g a \sin. \alpha}}$ factore constante, ob $\partial\psi$ angulum constantem valde parvum. In hac enim formula denominator cos. Φ non amplius evanescit, nisi pro statu initiali, si fuerit

$\beta = 90°$, circa quem autem casum jam initio observavimus, eum, remota frictione, nullum motum gyratorium gignere posse, ideoque nihil habere difficultatis. Pro hoc enim statu initiali aequatio $x = g\,t\,t \cos.\,\alpha$, ex qua fit $t = \sqrt{\frac{x}{g \cos.\,\alpha}}$, totam problematis solutionem complectitur.

§. 13. Evolvamus casum determinatum, inquirendo in motum baculi cylindrici, cujus diameter unius pollicis, longitudo vero octo pedum, super plano inclinato cum verticali angulum 60 graduum constituente existente positione initiali 80 graduum. Baculum supponamus homogeneum, ut centrum gravitatis in ejus medium cadat, et pro unitate lineari sumamus pedem quorum 16 constituunt altitudinem, ex qua gravia primo minuto secundo libere delabuntur. His mensuris ita stabilitis erit $g = 16$ pedum, $a = 4$ pedum, radius cylindri $b = \frac{1}{3}$ pollicis, hinc que $kk = \frac{1}{3}\,aa + \frac{1}{4}\,bb = 5,\,333767$. Porro erit $\alpha = 60°$ et $\beta = 80°$ hinc que $h = 0,\,1343212 . \partial\psi$; unde si angulo ψ successive tribuamus incrementa trium graduum, erit $\partial\psi = 0,\,2094395$ ped. consequenter $h = 0,\,0281323$, ideoque

$$\partial t = \frac{0,0281323 \cos.\psi \sqrt{(5,333767 - 16 \cos.\Phi^2)}}{\cos.\Phi}$$

$$x = 0,\,69459 + 8\,tt;$$

$$y = 4 \sin.\Phi;$$

$$z = x - 4 \cos.\Phi;$$

$$\frac{P}{M} = \frac{4,619177}{5,333767 + 16 \cos.\Phi^2} - \frac{147,8137 \sin.\Phi \sin.\psi^2}{(5,333767 + 16 \cos.\Phi^2)^2}.$$

Sequens tabula phaenomena motus baculi satis accurate exhibebit.

ψ	Φ	t	x	y	z	P : M
0°	80°, 0′	0, 00	0, 69	3, 94	0, 00	0, 79
3	79, 8	0, 36	1, 74	3, 93	0, 99	0, 77
6	76, 52	0, 67	4, 26	3, 90	3, 35	0, 71
9	73, 48	0, 92	7, 52	3, 84	6, 40	0, 62
12	70, 19	1, 14	11, 12	3, 77	9, 78	0, 53
15	66, 36	1, 33	14, 92	3, 67	13, 34	0, 44
18	62, 47	1, 51	18, 84	3, 56	17, 01	0, 36
21	58, 55	1, 66	22, 84	3, 43	20, 77	0, 30
24	55, 1	1, 81	26, 89	3, 28	24, 60	0, 26
27	51, 8	1, 95	30, 99	3, 11	28, 48	0, 22
30	47, 17	2, 07	35, 10	2, 94	32, 39	0, 20
33	43, 29	2, 19	39, 22	2, 75	36, 32	0, 18
36	39, 44	2, 31	43, 32	2, 56	40, 25	0, 16
39	36, 4	2, 42	47, 38	2, 35	44, 15	0, 15
42	32, 29	2, 52	51, 38	2, 15	48, 01	0, 15
45	29, 0	2, 61	55, 29	1, 94	51, 80	0, 15
48	25, 38	2, 70	59, 10	1, 73	55, 49	0, 15
51	22, 23	2, 78	62, 76	1, 52	59, 06	0, 15
54	19, 17	2, 86	66, 26	1, 32	62, 49	0, 15
57	16, 21	2, 93	69, 58	1, 13	65, 74	0, 16
60	13, 35	3, 00	72, 69	0, 94	68, 80	0, 16
63	11, 0	3, 06	75, 56	0, 76	71, 63	0, 17
66	8, 38	3, 11	78, 18	0, 60	74, 22	0, 18
69	6, 30	3, 16	80, 52	0, 45	76, 54	0, 19
72	4, 36	3, 20	82, 56	0, 32	78, 58	0, 19
75	2, 58	3, 23	84, 29	0, 21	80, 30	0, 20
78	1, 36	3, 26	85, 70	0, 11	81, 70	0, 21
81	0, 32	3, 28	86, 76	0, 04	82, 76	0, 21
82, 55′	0, 0	3, 30	87, 60	0, 00	83, 60	0, 22

§. 14. Evidens est formulam pro elemento temporis ∂t inventam n n mutari, etiamsi loco Φ scribatur $180° - \Phi$. Quin etiam, si baculus initio plano ita insistat, ut versus ejus summitatem E sit inclinatus angulo E A B $= \gamma = 180° - \beta$, elemen-

tum γ aeque ac ratio P:M manet invariatae, ita ut praeter $x = g\,tt - a \cos.\,\gamma$ et $z = x - 4 \cos.\,(180° - \Phi)$ nihil mutetur. Casu igitur $\gamma = 80°$, sive $\beta = 100°$, motus baculi ita se habebit, ut sequens tabula eum exhibet.

Ψ	Φ	t	x	y	z	P : M
0°	100°, 0′	0, 00	— 0, 69	3, 94	0 00	0, 79
3	100, 52	0, 36	+ 0, 35	3, 93	1 11	0, 77
6	103, 8	0, 67	2, 87	3, 90	3 78	0, 71
9	106, 10	0, 92	6, 12	3, 84	7 24	0, 62
12	109, 41	1, 14	9, 74	3, 77	11 08	0, 53
15	113, 24	1, 33	13, 53	3, 67	15 12	0, 44
18	117, 13	1, 51	17, 45	3, 56	19 28	0, 36
21	121, 5	1, 66	21, 45	3, 43	23 51	0, 30
24	124, 59	1, 81	25, 50	3, 28	27 80	0, 26
27	128, 52	1, 95	29, 60	3, 11	32 11	0, 22
30	132, 43	2, 07	33, 71	2, 94	36 43	0, 20
33	136, 31	2, 19	37, 86	2, 75	40 73	0, 18
36	140, 16	2, 31	41, 93	2, 56	45 01	0, 16
39	143, 56	2, 42	45, 99	2, 35	49 23	0, 15
42	147, 31	2, 52	49, 99	2, 15	53 37	0, 15
45	151, 0	2, 61	53, 91	1, 94	57 40	0, 15
48	154, 22	2, 70	57, 71	1, 73	61 31	0, 15
51	157, 37	2, 78	61, 37	1, 52	65 07	0, 15
54	160, 43	2, 86	64, 88	1, 32	68 65	0, 15
57	163, 39	2, 93	68, 19	1, 13	72 03	0, 16
60	166, 25	3, 00	71, 30	0, 94	75 19	0, 16
63	169, 0	3, 06	74, 17	0, 76	78 10	0, 17
66	171, 22	3, 11	76, 79	0, 60	80 74	0, 18
69	173, 30	3, 16	79, 13	0, 45	83 10	0, 19
72	175, 24	3, 20	81, 17	0, 32	85 16	0, 19
75	177, 2	3, 23	82, 90	0, 21	86 90	0, 20
78	178, 24	3, 26	84, 31	0, 11	88 31	0, 21
81	179, 28	3, 28	85, 37	0, 04	89 37	0, 21
82, 55′	180, 0	3, 30	86, 21	0, 00	90 21	0, 22

§. 15. Problema heic expedito analogum jam ante novem, et quod excurrit, annos tractavi, de motu agens baculi, qui, plano horizontali impositus, extremitate superna plano adnititur verticali, labensque ambo plana radit, qui scilicet motus absque frictione in eodemque plano fieri concipiebatur. Solutio hujus problematis extat in Tomo VI novorum Actorum pro anno 1788, sub titulo: *Recherches sur un problème de Mécanique.*

EXAMEN THÉORÉTIQUE
DES
REVÊTEMENS À DOS INCLINÉ
ET DES
REVÊTEMENS À ASSISES INCLINÉES,
PROPOSÉS
PAR QUELQUES AUTEURS DE FORTIFICATION;

PAR

NICOLAS FUSS.

Présenté à l'Académie le 15 Juin 1797.

§. 1.

La plûpart des auteurs de Fortification sont d'accord à préférer les remparts revêtus de pierre à ceux dont les revêtemens ne sont que de gazon ou de placage; du moins donnent-ils assez unanimément la préférence aux demi-revêtemens de brique, parceque ceux-ci réunissent tous les avantages des revêtemens entiers de maçonnerie et des revêtemens de gazon, sans en avoir les défauts. De cent cinquante places que Vauban a fortifiées, il n'y a pas une dont les revêtemens ne fussent de maçonnerie. Mais la dépense énorme qu'exige une place forte toute revêtue en pierres, selons les profils de Vauban, a fait songer plusieurs Ingenieurs aux moyens de diminuer cette dépense, sans porter

atteinde à la solidité nécessaire des ouvrages. Les uns ont proposé de diminuer simplement l'épaisseur au sommet dans les profils des Vauban, qu'il prétendoient être plus forts que ne l'exige la poussée des terres que les revêtemens ont à soûtenir, sans rien charger ni à la forme, ni à la construction. D'autres ont été d'avis de changer la position horisontale des pierres, en faisant les assises perpendiculaires au talud. D'autres enfin ont proposé d'adosser le revêtement contre les terres, non pas à plomb, comme cela se pratique généralement, mais dans une position inclinée vers les terres qu'il doit soûtenir.

§. 2. L'un et l'autre de ces deux derniers projets est appuyé d'autorités bien respectables. Le premier doit sa naissance à un homme consommé dans l'art de fortifier, au fameux *Cochorn*, et il a même été exécuté, selon l'Abbé *Déidier*, à Manheim, par son inventeur même, et dans la suite aussi à St Martin, sur l'isle de Ré, par un Officier distingué, le même qui avoit découvert le sécret de cette construction *). L'autre projet a été conçu par le celèbre *G. B. Bilfinger* **), ci devant Académicien de St. Pétersbourg, puis Conseiller privé du Duc de Wurtemberg, Mathématicien profond, et auteur de plusieurs écrits de Fortification, entre autres d'un système nouveau, très ingénieux, présenté à l'Académie le 20 Fevrier 1738 ***).

---

*) V. Le parfait Ingénieur François, par Mr. l'Abbé Déidier, pag.

**) Nouveau projet du revêtement d'une forteresse; par G. B. Bilfinger, Tubingue 1751.

***) Le dessin de cette nouvelle méthode de fortifier, que je possède, est signé: *G. B. Bilfinger invenit Ao.* 173$\frac{3}{4}$. Je remarque ceci, parceque la pièce imprimée, où l'auteur a publié sa méthode, est sans date.

§. 3. Quoiqu'il en soit de ces autorités *), les deux projets en question sont tels qu'on est très disposé à les croire l'un et l'autre avantageux, en ne considérant que l'équilibre entre la poussée des terres et la résistance des revêtemens. Car on voit d'abord, sans entrer dans des calculs, que toutes choses d'ailleurs égales, le revêtement à assises inclinées oppose à la même poussée une résistance plus grande que le revêtement ordinaire à assises horisontales; et que le revêtement à dos incliné résiste avec plus de force à une poussée plus petite, que ne seroit le même revêtement droit. Que par conséquent, au moyen de ces deux manieres de construction on parviendroit probablement à faire des revêtemens aussi forts, avec moins d'épaisseur, et partant avec moins de dépense.

§. 4. Cependant, personne, que je sâche, n'a encore examiné **), jusqu'où peut aller cette diminution de l'épais-

*) M. le Conseiller des Mines Böhm assûre que l'auteur du projet de revêtement à dos incliné est le neveu du Conseiller privé, ce qui est assez probable, vu que celui-ci est mort en 1750.

**) M. *Woltmann* (Beyträge zur Hydraulischen Architectur, 3ter B. S. 208) cite un ouvrage de M. *De langes: Esperienze ed osservazioni intorno alla pressione delle terre ed alla resistenza de muri, etc.* que je n'ai pas encore pu me procurer, et dont l'auteur doit avoir trouvé que les couches horisontales sont préférables. Quoique à certains égards cela puisse être vrai, du moins ne l'est-il pas par rapport à l'équilibre entre la poussée et la résistance. Aussi le peu M. *Woltmann* cite page 16) etc. de la Théorie de cet auteur, fait voir qu'elle est très défectueuse. M. *Woltmann* (p. 28) y ajoute des réflexions sur les inconvéniens pratiques des assises inclinées, qui méritent de l'attention, mais sur la justesse desquelles la Théorie ne sçauroit prononcer, et quant à l'expérience, elle a déja prononcé en faveur des assises inclinées, s'il en faut croire ce qui a été rapporté ci-dessus de leur exécution à Manheim et du succès des expériences faites à St. Martin.

seur des profils ordinaires à assises horisontales et à dos vertical, lorsqu'on leur substitue des revêtemens faits d'après l'idée de l'un ou de l'autre de nos deux auteurs, ni de quel côté est le plus grand avantage. C'est pourquoi, le sujet m'ayant paru intéressant, et digne, par son utilité pratique (qui n'est pas restreinte à la seule architecture militaire) d'être soumis à la décision de la Théorie: j'ai consulté celle-ci, et je vais présenter ici l'essentiel de mes recherches relativement aux deux projets en question.

§. 5. Mais avant de soumettre au calcul les revêtemens de Coehorn et de Bilfinger, je commencerai par les revêtemens ordinaires, en examinant si les profils de Vauban ont effectivement plus d'épaisseur qu'il ne leur en faut, et de combien on pourroit la diminuer dans ce cas là avec assûrance. Cette discussion, outre qu'elle nous frayera le chemin aux recherches suivantes plus difficiles, nous mettra en état de comparer les revêtemens à assises inclinées et les revêtemens à dos incliné non seulement avec les profils de Vauban, mais aussi avec les revêtement droits à assises horisontales dont l'épaisseur a déja été reduite selon la Théorie.

ARTICLE I.

Examen des revêtemens droits à assises horisontales.

§. 6. Si d'une caisse remplie de terre ou de sable, et dont les rectangle A B C D représente le profil, on ôte le parois antérieur B C, sçait par l'expérience qu'une partie C B E de la mâtiere s'écoule, et que seulement la portion A B E D reste en repos, après avoir acquis un talud B E, ou une pente qui fait avec le fond horisontal A B de la caisse un angle A B E plus ou moins grand, selon que la terre ou le Tab. II. Fig. 1.

sable est plus au moins humide, plus au moins battu, d'un grain plus ou moins gros. Cette face antérieure de la caisse, B C, soûtenoit donc, pendant qu'elle étoit ferme, la matiere prête à s'écouler et résistoit à la pression d'un prisme, dont le triangle C B E, que quelques auteurs appellent *le triangle d'éboulement*, représente la base.

Tab. II. Fig. 2. §. 7. Lors donc que derriere une muraille on amoncèle de la terre, cette muraille qu'on appelle le *revêtement*, et dont la trapèze A B C D représente le profil, doit soûtenir le prisme d'éboulement, dont le triangle E A C représente la base. Il faut donc que la maçonnerie contenue dans le trapèze A B C D soit assez forte, pour résister à la pression ou à la poussée de la terre contenue dans le triangle d'éboulement E A C. Car il suffit de considerer ces deux surfaces A B C D et E A C, vu que les prismes, dont elles représentent les bases, et dont les poids produissent l'action et la réaction, ont la troisième dimension égale.

§. 8. Soit G le centre de gravité du triangle d'éboulement E A C, sa hauteur A C $= a$, l'angle E C S $= \alpha$ et π la pésanteur spécifique de la matière contenue dans le triangle E C A; la pésanteur absolue de ce triangle, qui agit dans la direction verticale, sera G F $= \frac{1}{2} \pi a^2$ cot. α. Décomposons cette force G F en deux autres forces équivalentes G M et G H, la premiere perpendiculaire, l'autre parallèle à E C, et nous aurons

$$GM = GF \cos. \alpha = \tfrac{1}{2} \pi aa \cos. \alpha \cot. \alpha;$$
$$GH = GF \sin. \alpha = \tfrac{1}{2} \pi aa \sin. \alpha \cot. \alpha.$$

La force G H agit contre le point H du revêtement dans la direction H K. La force G M indique la pression du tri-

angle d'éboulement contre le plan incliné E C, à laquelle le frottement est proportionnel, et qui, par conséquent, multipliée par un nombre λ, déterminable par des expériences, donne la force, avec laquelle se frottement résiste à la force selon G H, desorte que le point H n'a proprement à soûtenir que la force

$$HK = \tfrac{1}{2}\pi aa \cos.\alpha\,(1 - \lambda \cot.\alpha).$$

§. 9. Que si nous décomposons cette force H K, par laquelle le revêtement est sollicité, en deux autres H I et H C, l'une horisontale et l'autre verticale, nous obtiendrons

$$HI = HK \cos.\alpha = \tfrac{1}{2}\pi aa \cos.\alpha^2\,(1 - \lambda \cot.\alpha)\ (*)$$

$$HC = HK \sin.\alpha = \tfrac{1}{4}\pi aa \sin.2\alpha\,(1 - \lambda \cot.\alpha).$$

La force verticale H C n'exerçant aucune action sur le revêtement, il ne nous reste à considérer que la force horisontale H I, qui peut agir de deux manières différentes: car elle peut pousser le revêtement en avant, sur sa base C D, dans la direction H I; et elle peut aussi le renverser, en lui communiquant un mouvement de rotation autour du

---

*) Cette expression convient, en mettant $\alpha = 45°$, avec celle de M. Bossut, et aussi avec celle que M. *Woltmann* a déduite pag. 170. No. 7. du principe de M. *Kaestner*, et qu'il rejette par des raisons fondées sur la fausse idée qu'il se fait de l'angle α, lequel chez lui signifie l'inclination que le dos du revêtement fait avec une certaine direction moyenne de l'action des particules de la matière qui tend à s'ébouler, idée qu'il ne s'agit pas de rectifier ici.

point d'appuy D Le moment de la force qui peut produire ce dernier effet, à cause de $DL = \frac{1}{3} a$, sera

$$HI . DL = \frac{1}{6} \pi a^3 \cos. \alpha^2 (1 - \lambda \cot. \alpha) \text{ *).}$$

§. 10. Au mouvement progressif du revêtement selon HI, résiste sa cohésion avec la fondation, ou la force du mortier. Mais ne connoissant de cette force ni la quantité, ni la façon d'agir, pour faciliter la recherche et rendre sa marche plus sûre, nous supposerons que le revêtement repose sur sa fondation sans mortier, desorte que chaque couche des pierres résiste par le seul frottement au mouvement progressif. Car il est clair que nous faisons le revêtement assez fort, pour résister à la poussée dans cette supposition, son épaisseur sera plus que sufisante dans la pratique, quelque puisse être la cohésion, ou la force du mortier qui lie les pierres dont le revêtement et sa fondation sont composés. Soit donc le frottement à la pression comme $\mu : 1$. et soit ϱ la pésanteur spécifique de la maçonnerie; et la résistance que le revêtement oppose au mouvement progressif sera $= \frac{1}{2} \mu \varrho a (AB + CD)$. Ainsi la condition de l'équilibre nous donnera l'équation suivante :

$$I . \frac{1}{2} \pi aa \cos. \alpha^2 (1 - \lambda \cot. \alpha) = \frac{1}{2} \mu \varrho a (AB + CD).$$

§. 11. Au mouvement de rotation autour du point D s'oppose le poids du revêtement $\frac{1}{2} \varrho a (AB + CD)$, avec une force dont le moment est $\frac{1}{2} \varrho a (AB + CD) \times VD$; VD étant la distance du point d'appuy D à la perpendiculaire abaissée

---

*) En négligeant le frottement et la pésanteur des matières, c'est-à-dire, en mettant $\lambda = 0$ et $\pi = 1$, on aura ce moment $= \frac{1}{6} a^3 \cos. \alpha^2$, expression qui convient avec celle de M. *Kaestner* (V. Weltmanns Beytr. 3. B. S. 153. No. 9). En mettant $\alpha = 45°$ c'est l'expression du moment donné par M. Bossut.

du centre de gravité O du revêtement A B C D sur sa base C D. Or on sçait que

$$V D = \frac{2 C D^2 + 2 C D . A B - A B^2}{3 (A B + C D)}$$

par conséquent le moment de la résistance sera $\frac{1}{6} \varrho a (2 C D^2 + 2 C D . A B - A B^2)$, et la seconde équation tirée de la condition de l'équilibre

$$\text{II. } \tfrac{1}{6} \pi a^3 \cos. \alpha^2 (1 - \lambda \cot \alpha) = \tfrac{1}{6} \varrho a (2 C D^2 + 2 C D . A B - A B^2).$$

§. 12. Supposons à présent que la talud soit proportionnel à la hauteur, comme on le fait presque généralement, et nommons $A B = x$, $C D = x + na$; et en mettant pour abréger $\frac{\pi}{\varrho} \cos. \alpha^2 (1 - \lambda \cot. \alpha) = \delta$, nous aurons les deux équations suivantes:

$$\text{I. } \delta a = \mu (2x + na);$$

$$\text{II. } \delta aa = 3xx + 6nax + 2nnaa.$$

De la premiere on tire le frottement

$$\mu = \frac{\delta a}{2x + na}$$

et la seconde donne l'épaisseur au cordon

$$A B = x = -na + a \sqrt{\frac{nn + \delta}{3}}$$

l'épaisseur à la base étant

$$C D = x + na = a \sqrt{\frac{nn + \delta}{3}}.$$

§. 13. Soit l'angle $\alpha = 45°$, $n = \frac{1}{5}$, $\frac{\pi}{\varrho} = \frac{4}{5}$, $\lambda = \frac{2}{5}$, et il y aura $\delta = 0,2400$, et partant $x = 0,1053 . a$ et $\mu = 0,5639$. Ainsi un simple frottement, qui ne va pas en-

core jusqu'à $\frac{2}{3}$ de la pression *) seroit suffisant pour résister au mouvement progressif d'un revêtement de $0,1055 \cdot a$ pieds d'épaisseur au sommet.

§. 14. Soit la hauteur $a = 47\frac{2}{3}$ pieds, et l'épaisseur du revêtement au sommet sera $AB = 5$ pieds, et l'épaisseur à la base $CD = 14,480$ pieds. Comme c'est exactement l'épaisseur que Vauban a donné à ses profils de $47\frac{2}{3}$ pieds de hauteur, et qu'il y en a qui ont résisté depuis plus d'un siècle, l'expérience prouve que l'épaisseur que nous venons de trouver par la théorie est suffisante On voit aussi par là que ce n'est pas sans fondement qu'on sontient que les profils de Vauban sont trop forts pour les hauteurs moindres et qu'ils sont trop foibles pour les plus grandes hauteurs, ce que l'expérience auroit immanquablement prouvé, si des revêtemens de *plus* de $47\frac{2}{3}$ pieds de hauteur n'étoient pas trop rares, et si ceux qui existent, s'il y en a de si hauts n'étoient pas redevables de leur surplus de force aux contreforts et à la cohésion de maçonnerie, dont notre Théorie n'a pas tenu compte.

§. 15. En adoptant la valeur de μ comme connue par l'expérience, nos deux équations du §. 12. donneroient l'épaisseur du revêtement au sommet et le talud. Car la premiere équation donne

$$x = \frac{\delta a}{2\mu} - \frac{1}{2} n a,$$

*) M. Woltmann (Beytrâge zur Hydr. Archit. S. 104) a trouvé a peu près la même chose. Il est aussi d'avis qu'il ne faut pas trop compter sur la cohésion et qu'on fait mieux de supposer que la maçonnerie résiste par le seul frottement. Selon lui (page 206) le frottement dans les briques ordinaires est assez approchemment égal aux $\frac{2}{3}$ de la pression

ce qui étant substitué dans la seconde, fournit

$$\delta = \frac{3\delta\delta}{4\mu\mu} + \frac{3\delta n}{2\mu} - \frac{nn}{4},$$

d'où l'on tire le talud

$$n = \frac{3\delta}{\mu} \pm \sqrt{\frac{12\delta\delta}{\mu\mu} - 4\delta}.$$

§. 16. Ainsi, comme selon M. Woltmann il y a pour les briques ordinaires $\mu = \frac{3}{4}$ (V. la note §. 13.), en mettant, comme ci-dessus,

$\alpha = 45°$, $\frac{\pi}{\varrho} = \frac{4}{5}$, $\lambda = \frac{2}{5}$, on aura $\delta = 0,2400$,

$n = 0,2202$, et $x = 0,0899 . a$; c'est-à-dire

$$AB = 0,0899 . AC;$$
$$CD = 0,3101 . AC.$$

Ce profil est plus avantageux que celui du §. 13., sa surface n'étant que $0,2000 . a^2$, tandis que l'autre est de $0,2055 . a^2$.

ARTICLE II.

Examen des revêtemens à assises inclinées.

§. 17. Soit A B C D un revêtement dont les assises fassent avec le talud B D un angle droit; soit E C A le triangle d'éboulement, et en gardant les mêmes dénominations, dont nous avons fait usage dans l'article précédent, il est clair que quant à la poussée des terres tout sera comme auparavant, dans le cas que nous venons de considerer, savoir que la seule force qui agit sur le revêtement en H, est la force horisontale Tab. II. Fig. 3.

$$HL = \tfrac{1}{2}\pi\, aa \cos.\alpha^2 (1 - \lambda \cot.\alpha) = \tfrac{1}{2}\varrho\,\delta\, aa$$

en mettant pour abrêger comme au §. 12.

$$\frac{\pi}{\varrho} \cos.\alpha^2 (1 - \lambda \cot.\alpha) = \delta;$$

avec la différence toutefois qu'entant que cette force tend à renverser le revetement, ce ne sera plus le point D, mais le point d, autour duquel, comme appuy, elle s'efforcera de le faire tourner, desorte que le moment ne sera plus $HL.DL$ (§. 5.), mais $HL.dl$, par conséquent plus petit que dans l'article précédent.

§. 18. Pour déterminer le bras de levier dl, soit l'angle $DBS = DCd = \gamma$, et comme dans l'article précédent (§. 17.) $AB = x$, $CD = x + na$, desorte que $n = \text{tag. } \gamma$, nous aurons:

$$Dd = CD \text{ sin. } \gamma = (x + na) \text{ sin. } \gamma$$

$$Dq = Dd \text{ cos. } \gamma = \tfrac{1}{2}(x + na) \text{ sin. } 2\gamma$$

d'où nous tirons

$$dl = DL - Dq = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}(x + na) \text{ sin. } 2\gamma$$

ou bien aussi, à cause de $n = \frac{\sin.\gamma}{\cos\gamma}$,

$$dl = a(\tfrac{1}{2} - \text{sin. } \gamma^2) - \tfrac{1}{2}x \text{ sin. } 2\gamma$$

ou bien enfin

$$dl = \tfrac{1}{2}\varkappa a - \tfrac{1}{2}x \text{ sin. } 2\gamma$$

en mettant pour abrêger $\frac{1}{2} - \text{sin. } \gamma^2 = \frac{1}{2}\varkappa$. Ainsi le moment de la poussée sera

$$HL.dl = \tfrac{1}{4}\varrho\delta aa(\varkappa a - x \text{ sin. } 2\gamma).$$

§. 19. Quant à la résistance du revêtement, comme la force HL peut agir de ceux manières: 1°) à faire monter le profil $ABdC$ sur le plan incliné Cd, dans la supposition qu'il y repose sans mortier; 2°) à renverser le revêtement $ABdC$, en le faisant tourner sur le point d'appuy d: il faudra déterminer la résistance qui s'oppose à l'une et à l'autre de ces deux actions. La premiere résistance est composée de deux forces, sçavoir du poids du revêtemens ϱM, qui résiste à la montée, avec une force $= \varrho M \text{ sin. } \gamma$, et

du frottement, qu'il s'y oppose pareillement, avec une force $\varrho \mu M \cos. \gamma$, desorte que toute la résistance est $\varrho M (\sin. \gamma + \mu \cos. \gamma)$, ϱ étant, comme dans l'article précédent, la pésanteur spécifique de la maçonnerie, et $\mu : 1$ le rapport du frottement à la pression. Quant au poids ϱM, comme ici c'est seulement la surface du Quadrilatère A B d C qui peut céder à l'action des terres, il y aura

$$M = A B C D - \Delta D C d$$

c'est-à-dire

$$M = \tfrac{1}{2} a (2x + na) - \tfrac{1}{2} (x + na)^2 \sin. \gamma \cos. \gamma$$

ce qui peut être représenté de cette manière:

$$M = \tfrac{1}{2} a \cos. \gamma^2 (2x + na) - \tfrac{1}{4} x x \sin. 2\gamma.$$

Ainsi la condition de l'équilibre fournit cette équation à résoudre:

I. $\delta a a = (\sin. \gamma + \mu \cos. \gamma) (a (2x + na) \cos. \gamma^2 - \tfrac{1}{2} x^2 \sin. 2\gamma)$.

§. 20. Le moment de la force, avec laquelle le revêtement résiste au renversement autour du point d'appuy d, dans la supposition de la cohésion nulle, sera $\varrho M \times v d$, où $v d$ est la perpendiculaire tirée du point d sur la verticale Oo, direction de la pésanteur passant par le centre de gravité O du profil A B d C. Tab. II. Fig. 4.

§. 21. Pour déterminer $v d$, de Ω et ω, centres de gravité des triangles A C B et C B d menons Ωe et ωf parallèles à Oo, et nous aurons $ef = \tfrac{1}{3} C d = \tfrac{1}{3} (x + na) \cos. \gamma$. Or

$$\Omega O : \omega O = eo : fo = \Delta C B d : \Delta A C B$$

donc

$$fo : eo + fo = \Delta A C B : \Delta C B d + \Delta A C B$$

ou bien

$$fo : ef = \Delta A C B : A B d C$$

par conséquent

$$fo = \frac{ef.\triangle ACB}{ABdC} = \frac{\frac{1}{2}ax.ef}{M}$$

Mais $od = fo + fh + hd$, ou bien, à cause de

$$fh + hd = \tfrac{1}{3}(x+na)\cos.\gamma + \frac{\frac{1}{3}an}{\cos.\gamma} = \frac{\frac{1}{3}(x+na)\sin.\gamma^2}{\cos.\gamma}$$

c'est à dire, à cause de

$$fh + hd = \frac{(x+na)\cos.2\gamma + an}{3\cos.\gamma} = \frac{x\cos.2\gamma + 2na\cos.\gamma^2}{3\cos.\gamma}$$

on aura

$$od = \frac{ax(x+na)\cos.\gamma}{6M} + \frac{x\cos.2\gamma + 2na\cos.\gamma^2}{3\cos.\gamma}$$

d'où, à cause de $vd = od\cos.\gamma$, on obtient

$$vd = \frac{ax(x+na)\cos.\gamma^2}{6M} + \tfrac{1}{3}(x\cos.2\gamma + 2na\cos.\gamma^2).$$

§. 22. Ayant trouvé ainsi le bras de levier vd, le moment de la force que le revêtement oppose à l'effort des terres pour le renverser, sera

$$\varrho M \times vd = \tfrac{\varrho ax}{6}(x+na)\cos.\gamma^2$$
$$+\tfrac{\varrho}{6}(x\cos.2\gamma + na\cos.\gamma^2)(a\cos.\gamma^2(2x+na) - \tfrac{1}{2}x^2\sin.2\gamma).$$

La condition de l'équilibre nous présente donc cette seconde équation à résoudre:

$$\text{II. } 6\partial a\,a(2a - x\sin.2\gamma) = 4ax(x+na)\cos.\gamma^2$$
$$+4(x\cos.2\gamma + 2na\cos.\gamma^2)(a(2x+na)\cos.\gamma^2 - \tfrac{1}{2}x^2\sin.2\gamma).$$

§. 23. En développant et ordonnant cette équation selon les puissances de x, on parvient à cette équation complette du troisième degré:

$$x^3 + Aax^2 - Ba^2x + Ca^3 = 0$$

dont les coëfficiens sont

$$A = \frac{4\cos.\gamma^2(n\sin.2\gamma - 1 - 2\cos.2\gamma)}{\sin.4\gamma}$$

$$B = \frac{4n\cos.\gamma^2(1+\cos.2\gamma+4\cos.\gamma^2)+6\delta\sin.2\gamma}{\sin.4\gamma}$$

$$C = \frac{6\delta\varkappa - 8nn\cos.\gamma^4}{\sin.4\gamma}.$$

En mettant à la place de n sa valeur $n = \text{tag.}\,\gamma$, ces coëfficiens se laisseront reduire aux expressions plus simples que voici:

$$A = \frac{12\cos.\gamma^2(\sin.\gamma^2 - \cos.\gamma^2)}{\sin.4\gamma};$$

$$B = \frac{6\sin.2\gamma(2\cos.\gamma^2+\delta)}{\sin.4\gamma};$$

$$C = \frac{6\delta\varkappa - 8\sin.2\gamma^2}{\sin.4\gamma};$$

et par des réductions ultérieures, on obtient ces valeurs exprimées de la maniere suivante encore plus simple:

$$A = -3\cot.\gamma;$$

$$B = \frac{3(2\cos.\gamma^2+\delta)}{\cos.2\gamma};$$

$$C = \frac{6\delta\varkappa}{\sin.4\gamma} - \text{tag.}\,2\gamma.$$

§. 24. Ayant trouvé x par l'équation II. comme l'équation I. du §. 19. donne

$$\mu = \frac{\delta a a - \sin.\gamma\,[a(2x+na)\cos.\gamma^2 - \frac{1}{2}x^2\sin.2\gamma]}{\cos.\gamma\,[a(2x+na)\cos.\gamma^2 - \frac{1}{2}x^2\sin.2\gamma]}$$

si l'on substitue la valeur trouvée pour x dans cette expression, on obtiendra la quantité du frottement qui doit avoir lieu, pour qu'il y ait équilibre entre la poussée des terres et la résistance du revêtement à assises inclinées.

§. 25. Soit, comme dans l'exemple de l'article précédent (§. 13.), l'angle $\alpha = 45°$, $n = \text{tag.}\,\gamma = \frac{1}{5}$, $\frac{\pi}{\varrho} = \frac{4}{5}$, $\lambda = \frac{2}{5}$, et il y aura $\delta = 0,2400$; $\gamma = 11°, 18', 36''$; $\varkappa = 0,58975$; $A = -15$; $B = 7,03003$; $C = 0,77927$, donc l'équation:

$$x^3 - 15\,a\,x^2 - 7,03003\,a^2\,x + 0,77927\,a^3 = 0$$

d'où l'en tire $x = 0,0926 . a$. ce qui étant trouvé, on aura aussi $\mu = 0,46360$.

§. 26. Ayant trouvé §. 13., en prenant les mêmes données, que pour les revêtemens à assises horisontales il y a $x = 0,1055 . a$ et $\mu = 0,5839$. nous voyons que, toutes choses égales, pour les assises inclinées une épaisseur moindre et un moindre degré de frottement, partant aussi une cohésion plus petite, suffisent pour résister à la même poussée. Pour la même valeur de μ, sçavoir pour $\mu = 0,4636$, le revêtement à assises horisontales devroit avoir, selon les formules du §. 15., l'épaisseur au sommet $x = 0,2333 . a$ et le talud $n = 0,0111$. La surface du profil seroit donc $= 0,2588 . a^2$, tandis que dans le cas des assises inclinées elle ne seroit que $0,1926 . a^2$. Ainsi, toutes choses d'ailleurs égales, en substituant au revêtement à assises horisontales celui dont les assises sont perpendiculaires au talud, on feroit sur 100 R°. de dépense une épargne de $25\frac{3}{4}$ Roubles.

§. 27. Parceque Coehorn n'a donné, selon l'Abbé Deidier, que $\frac{1}{6}$ de la hauteur au talud, je ferai le calcul aussi pour cette valeur $n = \frac{1}{6}$, en gardant les autres données $\alpha = 45°$, $\frac{\pi}{\varrho} = \frac{4}{5}$, $\lambda = \frac{2}{5}$, et j'aurai $\delta = 0,2400$, $\gamma = 9°, 27', 44''$ et $\varkappa = 0,61261$, de sorte que $A = -18$; $B = 6,93257$ et $C = 1,09487$. Notre équation cubique sera donc

$$x^3 - 18\,a\,x^2 - 6,93257\,a^2\,x + 1,09487 . a^3 = 0$$

qui donne $x = 0,1205 . a$ et partant $\mu = 0,4504$. La surface de ce profil seroit donc $= 0,2038 . a^2$, tandis que pour

ce même frottement $\mu = 0,4504$ il y auroit pour le revêtement du premier article, selon les formules du §. 15., $n = 0,0342$ et $x = 0,2493 . a$, donc la surface $= 0,2664 . a^2$. Par conséquent l'épargne qu'on feroit en substituant à ce revêtement ci celui à assises inclinées avec $\frac{1}{4}$ de talud, seroit de $23\frac{1}{3}$ R°. sur cent seulement.

§. 28. Il est évident que l'avantage de ce revêtement croît avec le talud. Mais les maximes établis dans la fortification et l'exécution même de ces revêtemens mettent des bornes à l'aggrandissement du talud. Les premieres exigent que le talud soit le plus petit qu'il est possible; la derniere exige que les assises puissent se soutenir, par le seul frottement sur le plan incliné, sans l'appuy des terres. Il faut donc que tag. $\gamma < \mu$.

§. 29. Soit $x = 0$, de sorte que le profil du revêtement est un triangle rectangle, et nous aurons $C = 0$, donc $\frac{6\delta x}{\sin. 4\gamma} =$ tag. 2γ, ou bien $3\delta x =$ sin. $2\gamma^2$, c'est-à-dire $3\delta(\frac{2}{3} - 2 \sin. \gamma^2) = 1 -$ cos. $2\gamma^2$, d'où l'on tire cos. $2\gamma = -\frac{3}{2}\delta \pm \sqrt{(\frac{9}{4}\delta^2 + \delta + 1)}$. Ainsi pour nos données cos. $2\gamma = 0,7930$, donc $\gamma = 18', 46''$; $n = 0,3398$, et la surface du profil $= 0,1699 . a^2$.

ARTICLE III.

Examen des revêtemens à dos incliné.

§. 30. Soit ABCD le profil d'un revêtement à dos incliné, la hauteur $CL = a$, l'angle $SCA = \beta$, desorte que $AL = a$ cot. β. Soit G le centre de gravité du triangle d'éboulement ACE, et en nommant, comme dans les articles précédens, l'angle $SCE = \alpha$, la pésanteur spécifique de la terre $= \pi$, le poids absolu sera $GF = \frac{1}{2}$ à $CL . AE . = \frac{1}{2}\pi aa$ (cot. α — cot. β). Décomposons cette force en deux autres, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle à EC, et nous aurons: Tab. II. Fig. 5.

$GM = GF$ cos. $\alpha = \frac{1}{2} 6\, aa$ cos. α (cot. α — cot. β);

$GH = GF$ sin. $\alpha = \frac{1}{2}\pi aa$ sin. α (cot. α — cot. β).

§. 31. La premiere de ces deux forces indique la pression sur le plan incliné E C, et multipliée par λ (§. 8.) elle donne le frottement qui s'oppose à la seconde force G H, de maniere que le point H du revêtement est sollicité par la force G H — λ . G M, c'est-à-dire par la force

$$HK = \tfrac{1}{2}\pi aa\,(\cot.\alpha - \cot.\beta)\,(\sin.\alpha - \lambda\cos.\alpha).$$

§. 32. Décomposons cette force H K en deux autres équivalentes H I et H C; et comme la force verticale H C ne produit aucun effet sur le revêtement, il nous restera à considérer la seule horisontale

$$HI = \frac{HK\ \sin.\ (\beta - \alpha)}{\sin.\ \beta}$$

c'est-à-dire

$$HI = \frac{\tfrac{1}{2}\pi aa\ \sin.\ (\beta - \alpha)}{\sin.\ \beta}(\cot.\alpha - \cot.\beta)\,(\sin.\alpha - \lambda\cos.\alpha)$$

expression qui se reduit à la suivante:

$$HI = \frac{\tfrac{1}{2}\pi aa\ \sin.\ (\beta - \alpha)^2}{\sin.\ \beta^2}(1 - \lambda\cot.\alpha).$$

§. 33. Or cette force peut agir de deux manieres sur le revêtement: elle peut 1°) le pousser en avant sur sa base S D dans la Direction H I; elle peut 2°) le renverser, en le faisant tourner autour du point D. Le moment de la force qui peut produire ce dernier effet sera

$$HI \times DN = \tfrac{1}{6}\pi a^3\,\frac{\sin.\ (\beta - \alpha)^2}{\sin.\ \beta^2}\,(1 - \lambda\ \cot.\ \alpha).$$

§. 34. Supposons, comme dans les articles précédens, que les assises reposent simplement l'une sur l'autre, et que le frottement seul, que nous mettrons égal à μ fois la pression, tienne lieu de la cohésion de la maçonnerie, dont la pésanteur spécifique soit $= \varrho$; et la résistance que le revêtement oppose

au mouvement progressif que la force HI tend a effectuer, sera $= \frac{1}{3} \varrho \mu a (AB + CD)$. Ainsi, la condition de l'équilibre exigeant que cette résistance soit égale à la force HI, nous aurons cette premiere équation:

$$\text{I.} \quad \frac{\pi a \sin.(\beta - \alpha)^2}{\sin.\beta^2} (1 - \lambda \cot.\alpha) = \varrho \mu (AB + CD).$$

§. 35. Au renversement du revêtement, ou à sa rotation autour du point D, s'oppose le poids $\frac{1}{2} \varrho a (AB + CD)$ avec une force dont le moment est $\frac{1}{2} \varrho a (AB + CD) \times VD$, la ligne VD étant la distance du point d'appuy D à la perpendiculaire abaissée du centre de gravité O du quadrilatère ABCD sur la base; et ce bras de levier se déterminera facilement de la maniere suivante.

§. 36. Par O, Ω et ω, centres de gravité du profil ABCD et des deux triangles ACB et CBD dont il est composé, tirons PQ, MN et mn, parallèles à CD, de même que OT, Ωe et ωf parallèles à AC et ns aussi parallèle à AC; et à cause de Tab. II. Fig. 6.

$$PM : Pm = \Omega O : \omega O = \Delta CBD : \Delta ACB$$

nous aurons

$$Pm : PM + Pm = \Delta ACB : ABCD$$

d'où nous tirons

$$Pm = \frac{1}{3} \frac{AC . \Delta ACB}{ABCD} = \frac{AC . AB}{3(AB+CD)}$$

et partant

$$CP = OT = \frac{AC(2AB+CD)}{3(AB+CD)}.$$

Ensuite, à cause de

$$Tf : ef = O\omega . \Omega\omega = Pm : Mm$$

parceque $ef = \frac{1}{2} CD$, on aura

$$Tf = \frac{ef . Pm}{Mm} = \frac{CD . AB}{3(AB+CD)}.$$

Or les triangles semblables V O T et L C A donnent

$$VT : OT = AL : AC$$

par consequent

$$VT = \frac{AL.OT}{AC} = \frac{AL(2AB+CD)}{3(AB+CD)}.$$

Mais $VD = VT + Tf + fs + sD$, donc

$$VD = \frac{AL(2AB+CD)+CD.AB}{3(AB+CD)} + \frac{1}{3}CD + sD$$

ou bien, en mettant $AB = x$, $CD = x + na$, on aura $sD = \frac{1}{3}na$, et partant

$$VD = \frac{a\cot.\beta(3x+na)+x(x+na)}{3(2x+na)} + \frac{x+2na}{3}.$$

§. 37. En multipliant donc ce bras de levier par $\frac{1}{2}\varrho a(2x+na)$, et mettent ce moment égal à celui de la poussée trouvé §. 33., on aura cette seconde équation de condition:

$$\text{II.} \quad \frac{\pi a^2 \sin.(\beta-\alpha)^2}{\varrho \sin.\beta^2}(1-\lambda\cot.\alpha) =$$

$$a\cot.\beta(3x+na)+3xx+6nax+2nnaa.$$

§. 38. En mettant pour abrêger

$$\frac{\pi}{\varrho}\frac{\sin.(\beta-\alpha)^2}{\sin.\beta^2}(1-\lambda\cot.\alpha) = \delta'$$

les deux équations tirées de la condition de l'équilibre, qui contiennent la solution du problème, seront:

$$\text{I.} \quad \delta' a = \mu(2x+na);$$

$$\text{II.} \quad \delta' aa = a(3x+na)\cot.\beta+3xx+6nax+2nnaa.$$

La premiere donne

$$x = \frac{\delta' a}{2\mu} - \frac{na}{2}$$

ce qui étant substitué dans la seconde fournit

$$n = \frac{3\delta'}{\mu} - \cot.\beta \pm \sqrt{\frac{12\delta'\delta'}{\mu\mu} + \cot.\beta^2} - 2\delta'.$$

§. 39. Que si dans ces expressions on met l'angle $\beta = 90°$, on a $\delta' = \frac{\pi}{\varrho} \cos.\alpha^2 (1 - \lambda \cot.\alpha) = \delta$, et par conséquent

$$x = \frac{\delta a}{2\mu} - \frac{n a}{2}$$

$$n = \frac{3\delta}{\mu} \pm \sqrt{\frac{12\delta\delta}{\mu\mu} - 4\delta}$$

comme nous avions trouvé §. 15. pour les revêtemens ordinaires à dos vertical.

§. 40. Soit comme dans les exemples précédens $\alpha = 45°$, $\frac{\pi}{\varrho} = \frac{4}{5}$, $\lambda = \frac{2}{5}$; soit de plus $\mu = \frac{3}{5}$ et $\beta = 80°$, nous aurons $\delta' = 0,16282$, partant $n = 0,1245$ et $x = 0,0734 . a$. Ainsi la surface seroit $= 0,1356 . a^2$, et l'épargne qu'on feroit en employant ces revêtemens au lieu des revêtemens droits, toutes choses d'ailleurs égales, monteroit à $3\frac{1}{8}$ R°. sur 100 R°.

§. 41. Pour que ce revêtement puisse se soûtenir sans l'appuy des terres, il faudra que $VD < CD$, c'est-à-dire $\cot.\beta < \frac{3x + na}{a}$ ou bien $\cot.\beta < \frac{3\delta'}{2\mu} - \frac{n}{2}$, condition qui, en mettant à la place de n sa valeur, devient $\cos.\beta < \sqrt{\frac{12\delta'\delta'}{\mu\mu} + \cot.\beta^2 - 4\delta'}$, ce qui se reduit à $\delta' > \frac{\mu\mu}{3}$, ou bien $\frac{\pi}{\varrho} \frac{sin.(\beta-\alpha)^2}{sin.\beta^2} (1 - \lambda \cot.\alpha) > \frac{\mu\mu}{3}$. Enfin $\frac{sin.(\beta-\alpha)^2}{sin.\beta^2} > \sigma$, en mettant pour abrêger $\frac{\mu\mu\varrho}{3\pi(1-\lambda cot.\alpha)} = \sigma$, donc $\cot.\beta < \cot.\alpha - \frac{\sqrt{\sigma}}{sin.\alpha}$.

§. 42. L'épaisseur de tous ces revêtemens ayant été déterminée dans la supposition que les pierres soyent posées sans mortier et que la résistance se fasse par le poids et le frottement seuls: une maçonnerie médiocrement bonne donnera à ces revêtemens une force incomparablement plus grande. A ne considérer donc que la poussée des terres et la résistance des revêtemens et la condition de l'équilibre entre ces deux forces, il n'est pas douteux que les deux projets en question ne l'em-

portassent l'une et l'autre de beaucoup sur les revêtemens ordinaires. Je laisse aux gens de l'art à décider, si les difficultés de l'exécution sont assez grandes pour contrebalancer les avantages considérables que la théorie en promet. Au reste ces difficultés cessent en partie, quand on fait les inclinaisons γ et $90° - \beta$ assez petites, pour que les revêtemens puissent se soûtenir d'eux mêmes, c'est-à-dire, quand on fait tag. $\gamma < \mu$ (§. 28.) et cot. $\beta <$ cot. $\alpha - \frac{\sqrt{\sigma}}{\sin. \alpha}$ (§. 41.), limites qui, pour nos exemples calculés (§§. 25 et 40) deviennent $\gamma < 24°, 52'$ et $\beta > 73°, 40'$. Sans outrepasser ces termes nous aurions donc pu faire les revêtemens de nos deux exemples beaucoup plus minces que ne les ont donné les positions $\gamma = 11°, 18', 36''$ et $\beta = 80°$, et encore plus minces, si nous eussions compté sur la cohésion et ajouté des contreforts.

RECHERCHES
SUR
LES ÉQUATIONS LINÉAIRES
AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES DU TROISIÈME DEGRÉ

PAR
Mr. *JEAN TREMBLEY.*

Reçu le 16 Janvier 1798.

J'ai présenté à l'Académie Impériale deux Mémoires sur les équation linéaires aux différences partielles du seconde degré. Mon dessein dans celui-ci, est de voir jusqu'à quel point il est possible d'appliquer aux équations du troisième degré la méthode que j'ai exposée dans le premier de ces Mémoires, et de rechercher les différences qu'entraine la nature particuliere des équations du troisième degré. Je ne ferai qu'effleurer une matiere qui est vaste et remplie de difficultés. Je n'ai pas les forces nécessaires pour l'épuiser. Mais je n'aurai pas entierement perdu mon tems, si les Géomètres qui liront ces recherches en prennent occasion d'approfondir ce sujet et d'en tirer des conséquences que les bornes de mes facultés ne me permettent pas d'appercevoir.

§. 1. Soit $z = \Pi F : \Phi$, Π et Φ étant des fonctions quelconques de x et y, et F le signe d'une fonction arbitraire, on aura en différentiant:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \Pi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) F' : \Phi + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) F' : \Phi ; \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \Pi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F' : \Phi + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) F : \Phi ;$$

$$\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) = \Pi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 F'' : \Phi + 2\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) F' : \Phi + \Pi\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x^2}\right) F' : \Phi + \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x^2}\right) F : \Phi ;$$

$$\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y}\right) = \Pi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F'' : \Phi + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) F' : \Phi + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F' : \Phi$$
$$+ \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x \partial y}\right) F : \Phi + \Pi\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x \partial y}\right) F' : \Phi$$

$$\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right) = \Pi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 F'' : \Phi + 2\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F' : \Phi + \Pi\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial y^2}\right) F' : \Phi + \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial y^2}\right) F : \Phi ;$$

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) = \Pi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^3 F''' : \Phi + 3\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 F'' : \Phi + 3\Pi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x^2}\right) F'' : \Phi$$
$$+ 3\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x^2}\right) F' : \Phi + 3\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) F' : \Phi + \Pi\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}\right) F' : \Phi$$
$$+ \left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial x^3}\right) F : \Phi ;$$

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right) = \Pi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F''' : \Phi + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 F'' : \Phi$$
$$+ 2\Pi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x \partial y}\right) F'' : \Phi + 2\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F'' : \Phi + \Pi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x^2}\right) F'' : \Phi$$
$$+ 2\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) F' : \Phi + 2\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x \partial y}\right) F' : \Phi + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x^2}\right) F' : \Phi$$
$$+ \Pi\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y}\right) F' : \Phi + \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F' : \Phi + \left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial x^2 \partial y}\right) F : \Phi ;$$

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\right) = \Pi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) F''' : \Phi + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 F'' : \Phi$$
$$+ 2\Pi\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F'' : \Phi + 2\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) F'' : \Phi$$
$$+ \Pi\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) F'' : \Phi + 2\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F' : \Phi + 2\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial x \partial y}\right) F' : \Phi$$
$$+ \Pi\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2}\right) F' : \Phi + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial y^2}\right) F' : \Phi + \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) F' : \Phi$$
$$+ \left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial x \partial y^2}\right) F : \Phi ;$$

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) = \Pi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^3 F''' : \Phi + 3\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 F'' : \Phi + 3\Pi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial y^2}\right) F'' : \Phi$$
$$+ 3\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \partial \Phi}{\partial y^2}\right) F' : \Phi + 3\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial y^2}\right) F' : \Phi + \Pi\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3}\right) F' : \Phi$$
$$+ \left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial y^3}\right) F : \Phi .$$

2. Multipliant respectivement ces dix équations par les quantités T, S, R, Q, P, N, M, L, K, F et égalant séparement à zéro les coefficiens de $F : \Phi$, $F' : \Phi$, $F'' : \Phi$, $F''' : \Phi$, on aura l'équation différentielle du troisième degré

$$Tz + S\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + P\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) + N\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + M\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + L\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2\partial y}\right) + K\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\right) + F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^3}\right) = 0,$$

et les quatre équations de condition suivantes:

I. $$F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^3 + K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^3 = 0,$$

II. $$\left(3F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + 2K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \left(K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + 2L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + 3M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \left(3F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + 2K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right) + K\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + 2L\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) + L\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + 3M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right)\Pi = 0$$

III. $$\left(3F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + \left(2K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + 2L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right) + \left(L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + 3M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + \left(3F\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + 2K\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right) + L\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + 2N\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \left(K\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + 2L\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right) + 3M\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + 2Q\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \left(F\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}\right) + K\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^2\partial x}\right) + L\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial y\partial x^2}\right) + M\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right) + N\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + P\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + S\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\Pi = 0$$

IV. $$F\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial y^3}\right) + K\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial y^2\partial x}\right) + L\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial y\partial x^2}\right) + M\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^3}\right) + N\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + P\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + R\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + S\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + T\Pi = 0.$$

3. La première équation peut se mettre sous cette forme:

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^3}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^3} + \frac{K}{F}\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2} + \frac{L}{F}\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)} + \frac{M}{F} = 0,$$

équation du troisième degré qui donnera trois valeurs de $\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)}$, que j'appellerai $\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}$, $\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}$, $\frac{\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}$, et intégrant les trois

équations du premier degré qui en résultent, on aura les trois valeurs de Φ, savoir Φ', Φ'', Φ'''. Maintenant on a par la Théorie des équations,

$$\frac{K}{F} = -\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)} - \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)} - \frac{\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)},$$

$$\frac{L}{F} = \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)} + \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)} + \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)},$$

$$\frac{M}{F} = -\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}.$$

4. Au moyen de ces valeurs on a

$$3\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2 + \frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2 = \frac{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}$$

$$3\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)^2 + \frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2 = -\frac{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}$$

$$3\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)^2 + \frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)^2 = \frac{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}$$

$$\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2=$$
$$-\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}\cdot\frac{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}\cdot\frac{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}$$

$$\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)^2+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2=$$
$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}\cdot\frac{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}\cdot\frac{\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)}{}$$

$$\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)^2+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)^2=$$
$$-\frac{\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}\cdot\frac{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}\cdot\frac{\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)}{}$$

Faisons maintenant pour abréger:

$$3\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2=A';$$

$$3\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)+\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)^2+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2=A'';$$

$$3\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right)+\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right)$$
$$+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)^2+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)^2=A'''.$$

L'équation II. donnera, en y substituant successivement Φ', Φ'', Φ''' à la place de Φ et mettant Π', Π'', Π''' pour les valeurs correspondantes de Π, les trois équations suivantes:

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right) =$$

$$\frac{A'\Pi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)}$$

$$- \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right) =$$

$$\frac{A''\Pi''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}}{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi'''}{\partial y}\right) =$$

$$\frac{A'''\Pi'''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)}$$

5. On remarquera que A' devient A'', en échangeant réciproquement Φ' et Φ'', et A''' en échangeant Φ' et Φ''' et réciproquement. Maintenant ces trois équations sont telles que la premiere se change en la seconde, en y échangeant réciproquement Φ' et Φ'', Π' et Π''; en la troisième, en y échangeant Φ' et Φ''', Π' et Π''' et réciproquement. On fera donc comme pour les équations du second degré, $\Pi' : \Pi'' = \alpha : 1$ (α étant une fonction quelconque de x et y) on aura $\Pi' = \alpha\Pi''$, donc $\Pi'' = \frac{\Pi'}{\alpha}$. Donc α doit devenir $\frac{1}{\alpha}$, en y échangeant Φ' et Φ'', et réciproquement; parceque Π' doit devenir Π'', en échangeant dans sa valeur Φ' et Φ'' et réciproquement, donc $\alpha = \frac{F : \Phi''}{F : \Phi'}$. Donc $\Pi' = \frac{\Pi'' F : \Phi''}{F : \Phi'}$, et $\Pi' F : \Phi' = \Pi'' F : \Phi''$. On prouvera de la même manière que $\Pi' F : \Phi' = \Pi''' F : \Phi'''$. L'intégrale pourra donc se mettre sous cette forme: $z = \Pi (F : \Phi' + f : \Phi'' + \Sigma : \Phi''')$.

6. Les quantités $\frac{K}{F}$, $\frac{L}{F}$, $\frac{M}{F}$, seront donc déterminées par les trois équations qui résultent de l'équation I. Les quantités $\frac{N}{F}$, $\frac{P}{F}$, $\frac{Q}{F}$, seront déterminées par les trois équations qui résultent de l'équation II. Les quantités $\frac{R}{F}$, $\frac{S}{F}$, se détermineront par deux des trois équations qui résultent de l'équation III. L'équation IV ne fournira qu'une équation qui déterminera la quantité $\frac{T}{F}$. Il restera donc, à cause de la troisième équation fournie par l'équation III, une équation de condition à remplir. Ainsi d'après la supposition de l'intégrale $\frac{z}{\Pi} = F : \Phi' + f : \Phi'' + \Sigma : \Phi'''$, on ne pourra pas déterminer généralement l'équation différentielle :

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}\right) + \frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right) + \frac{P}{F}\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y}\right) + \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) + \frac{R}{F}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{S}{F}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{T}{F} z = 0,$$

mais il restera une équation de condition qui contiendra une relation entre les quantités Φ', Φ'', Φ'''.

7. Pour découvrir cette relation reprenons l'équation $\frac{z}{\Pi} = F : \Phi' + f : \Phi'' + \Sigma : \Phi'''$. Je fais $z' = \frac{z}{\Pi}$ et j'ai $z' = F : \Phi' + f' : \Phi'' + \Sigma' : \Phi'''$. Donc

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) F' : \Phi' + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) f' : \Phi'' + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) \Sigma' : \Phi'''$$

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) F' : \Phi' + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) f' : \Phi'' + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) \Sigma' : \Phi'''.$$

On aura donc en faisant

$$z'' = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right), \quad \mu = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right),$$

$$\nu = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right), \quad z'' = \mu f' : \Phi'' + \nu \Sigma' : \Phi''',$$

ou en faisant $z''' = \frac{z''}{\mu}$, $\nu = \frac{\nu}{\mu}$, on aura $z''' = f' : \Phi'' + \nu \Sigma' : \Phi'''$. Donc

$$\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) f'' : \mathfrak{P}'' + \left(\frac{\partial \nu'}{\partial y}\right) \Sigma' : \Phi''' + \nu' \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) \Sigma'' : \Phi''',$$
$$\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \mathfrak{P}''}{\partial x}\right) f'' : \Phi'' + \left(\frac{\partial \nu'}{\partial x}\right) \Sigma' : \Phi''' + \nu' \left(\frac{\partial \mathfrak{P}'''}{\partial x}\right) \Sigma'' : \Phi'''.$$

On aura donc en faisant

$$z^{IV} = \left(\frac{\partial \mathfrak{P}''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \mathfrak{P}''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right), \quad \mu'' = \left(\frac{\partial \mathfrak{P}''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial x}\right)$$
$$\nu'' = \nu' \left(\left(\frac{\partial \mathfrak{P}''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{P}'''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \mathfrak{P}''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{P}'''}{\partial x}\right)\right),$$
$$z^{IV} = \mu'' \Sigma' : \Phi''' + \nu'' \Sigma'' : \Phi''',$$

ou en faisant

$$\frac{z^{IV}}{\mu''} = z^{V}, \frac{\nu''}{\mu''} = \nu''', \quad z^{V} = \Sigma' : \Phi''' + \nu''' \Sigma'' : \Phi'''. \text{ Donc}$$
$$\left(\frac{\partial z^{V}}{\partial y}\right) = \left(\left(\frac{\partial \mathfrak{P}'''}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \nu'''}{\partial y}\right)\right) \Sigma'' : \Phi''' + \nu''' \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) \Sigma''' : \Phi''',$$
$$\left(\frac{\partial z^{V}}{\partial x}\right) = \left(\left(\frac{\partial \mathfrak{P}'''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \nu'''}{\partial x}\right)\right) \Sigma'' : \Phi''' + \nu''' \left(\frac{\partial \mathfrak{P}'''}{\partial x}\right) \Sigma''' : \Phi'''.$$

ou en faisant

$$\left(\left(\frac{\partial \mathfrak{P}'''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \nu'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial z^{V}}{\partial y}\right) - \left(\left(\frac{\partial \mathfrak{P}'''}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \nu'''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial z^{V}}{\partial x}\right) = z^{VI},$$
$$\nu''' \left(\left(\frac{\partial \mathfrak{P}'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu'''}{\partial y}\right)\right) = \nu^{IV}, \quad z^{VI} = \nu^{IV} \Sigma''' : \Phi''',$$

ou en faisant

$$\frac{z^{VI}}{\nu^{IV}} = z^{VII}, \quad z^{VII} = \Sigma''' : \Phi'''. \text{ Donc } \left(\frac{\partial z^{VII}}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \mathfrak{P}'''}{\partial y}\right) \Sigma^{IV} : \Phi''',$$
$$\left(\frac{\partial z^{VII}}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \mathfrak{P}'''}{\partial x}\right) \Sigma^{IV} : \Phi''', \text{ et } \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z^{VII}}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z^{VII}}{\partial x}\right) = 0.$$

8. On arriverait ainsi à une équation diff'rentielle du quatrième dégré. Pour qu'elle se reduise au troisième, il faut que l'on ait $\nu^{IV} = 0$, ce qui donne

$$\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu'''}{\partial y}\right) = 0,$$

équation dont l'intégrale complette est $\nu''' = \varrho : \Phi'''$. Donc $\frac{\nu'''}{\mu'''} = \varrho : \Phi''$, $\nu'' = \mu'' \varrho : \Phi'''$, et substituant les valeurs de μ'' et ν'',

$$\nu'\left(\left(\frac{\partial P''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial P'''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial P''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial P'''}{\partial x}\right)\right) = \left(\left(\frac{\partial P''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial P''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial x}\right)\right) \varrho : \Phi''',$$

$$\text{ou } \left(\frac{\partial P''}{\partial x}\right)\left(\nu'\left(\frac{\partial P'''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \nu'}{\partial y}\right)\varrho : \Phi''\right) - \left(\frac{\partial P''}{\partial y}\right)\left(\nu'\left(\frac{\partial P'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \nu'}{\partial x}\right)\varrho : \Phi'''\right) = 0,$$

$$\text{ou } \left(\frac{\partial P''}{\partial x}\right)\left(\frac{\left(\frac{\partial P'''}{\partial y}\right)}{\varrho : \Phi'''} - \frac{\left(\frac{\partial \nu'}{\partial y}\right)}{\nu'}\right) - \left(\frac{\partial P''}{\partial y}\right)\left(\frac{\left(\frac{\partial P'''}{\partial x}\right)}{\varrho : \Phi'''} - \frac{\left(\frac{\partial \nu'}{\partial x}\right)}{\nu'}\right) = 0,$$

équation dont l'intégrale complette est $\sigma : \Phi''' - l\nu' = \tau : \Phi'''$, en faisant $\int \frac{\partial \Phi'''}{\varrho : \Phi'''} = \sigma : \Phi'''$. Donc $l\nu' = \sigma : \Phi''' - \tau : \Phi''$, $\nu' = \frac{\nu}{\mu} = e^{\sigma : \Phi''' - \tau : \Phi''}$. Donc $\nu = \mu e^{\sigma : \Phi''' - \tau : \Phi''}$,

ou en mettant pour μ et ν leurs valeurs,

$$\left(\left(\frac{\partial P'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial P'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial P'''}{\partial x}\right)\right) = \left(\left(\frac{\partial P'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial P'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial P''}{\partial x}\right)\right) e^{\sigma : \Phi''' - \tau : \Phi'}$$

$$\left(\left(\frac{\partial P'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial P''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial P'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial P'''}{\partial x}\right)\right) e^{-\sigma : \Phi'''} = \left(\left(\frac{\partial P'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial P'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial P''}{\partial x}\right)\right) e^{-\tau : \Phi''}, \text{ ou}$$

$$\left(\frac{\partial P'}{\partial x}\right)\left(\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) e^{-\sigma : \Phi''} - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) e^{-\tau : \Phi''}\right) - \left(\frac{\partial P'}{\partial y}\right)\left(\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) e^{-\sigma : \Phi'''} - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) e^{-\tau : \Phi''}\right) = 0.$$ Je fais

$\int \partial \Phi''' e^{-\sigma : \Phi'''} = P : \Phi'''$, $\int \partial \Phi'' e^{-\tau : \Phi''} = Q : \Phi''$, et j'ai

$$\left(\frac{\partial P'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial (P : \Phi''' - Q : \Phi'')}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial P'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial (P : \Phi''' - Q : \Phi'')}{\partial x}\right) = 0$$

équation dont l'intégrale complette est $P : \Phi''' - Q : \Phi'' = R : \Phi'$. Voilà la condition qui doit exister entre Φ, Φ'' et Φ''', pour que l'équation différentielle soit du 3e degré; ensorte que l'intégrale devra avoir cette forme:

$$z' = \frac{z}{u} = F : \Phi' + f : \Phi'' + \Sigma : (\sigma : \Phi' + \varrho : \Phi'').$$

Ainsi la quantité contenue sous la troisième fonction arbitraire doit être égale à la somme de deux fonctions quelconques des deux autres quantités.

9. On peut, en employant la méthode exposée dans les derniers §§., arriver directement à la même conclusion, sans aucun préliminaire. Soit l'équation

$$z = \Pi' F : \Phi' + \Pi'' f : \Phi'' + \Pi''' \Sigma : \Phi'''.$$

Différentiant et supposant $z' = \frac{z}{\Pi'}$, $\mu' = \frac{\Pi''}{\Pi'}$, $\mu'' = \frac{\Pi'''}{\Pi'}$,

$$z'' = \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)}{\mu'\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)},$$

$$\nu' = \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)}{\mu'\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)},$$

$$\nu'' = \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\mu''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\mu''}{\partial y}\right)}{\mu'\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)},$$

$$\nu''' = \frac{\mu''\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)}{\mu'\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)},$$

on aura $z'' = \nu' f : \Phi'' + f' : \Phi'' + \nu'' \Sigma : \Phi''' + \nu''' \Sigma' : \Phi'''$.

Différentiant et supposant

$$z''' = \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)}{\left(\nu''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\nu'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \left(\nu''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\nu'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)}$$

$$\xi' = \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\nu'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\nu'}{\partial y}\right)}{\left(\nu''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\nu'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \left(\nu''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\nu'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)}$$

$$\varrho'' = \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\nu''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\nu''}{\partial y}\right)}{\left(\nu''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\nu'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \left(\nu''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\nu'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)},$$

$$\varrho''' = \frac{\nu'''\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)}{\left(\nu''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\nu'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \left(\nu''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\nu'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)},$$

on aura $z''' = \varrho' f : \Phi'' + \varrho'' \Sigma : \Phi''' + \Sigma' : \Phi''' + \varrho''' \Sigma'' : \Phi'''$.

Or pour que l'intégrale supposée conduise à une équation du troisième degré, il faut que

$$\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right) = 0,$$

ce qui donnera les équations suivantes:

I. $\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varrho'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varrho'}{\partial y}\right) = 0$

II. $\varrho'\left(\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right) = 0$

III. $\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varrho''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varrho''}{\partial y}\right) = 0$

IV. $\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varrho'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varrho'''}{\partial y}\right) = 0.$

La seconde équation donne $\varrho' = 0$, si l'on veut que les quantités Φ'' et Φ''' restent différentes; dans ce cas la prémiere devient identiquement nulle. La troisième donne $\varrho'' = A : \Phi''$, la quatrième $\varrho''' = B : \Phi'''$. ($(A : \Phi''')$, $(B : \Phi''')$ et toutes les dénominations analogues designeront toujours des fonctions arbitraires de Φ''', ou de telle autre semblable). La valeur $\varrho' = 0$, donne

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\nu'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\nu'}{\partial y}\right) = 0,$$

donc $\nu' = C : \Phi''$.

Maintenant on a

$$\frac{\varrho''}{\varrho'''} = \partial : \Phi''' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu''}{\partial y}\right)}{\nu'''\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\right)}. \quad \textbf{Donc}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\left(\frac{\partial \nu''}{\partial x}\right)}{\nu'''} + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\partial : \Phi'''\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\left(\frac{\partial \nu''}{y}\right)}{\nu'''} + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\partial : \Phi'''\right) = 0.$$

On tire de là

$$\int \frac{\partial \nu''}{\nu'''} + E : \Phi''' = S : \Phi'', \int \frac{\partial \nu''}{\nu'''} = S : \Phi'' - E : \Phi'''.$$

Pour que $\frac{\partial \nu''}{\nu'''}$ **soit intégrable il faut que** $\nu''' = H : \nu'''$, **ce qui donnera** $I\ \nu''' = S : \Phi' - E : \Phi'''$, **ou** $\nu''' = K : \Phi'' + L : \Phi'''$. **Substituant la valeur de** ν'', **savoir** $H : \nu'''$ **dans les équations que fournissent les valeurs de** ϱ'' **et** ϱ''', **on trouve après les réductions,**

$$\left(\left(\frac{\partial \nu'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \nu'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\right)\left(\nu''' H' : \nu''' - \nu''' A : \Phi''' - B : \Phi''' H : \nu''' H' : \nu'''\right) = 0,$$

d'où l'on tire $\nu''' = L : \Phi'''$. **Donc** $\nu'' = M : \Phi'''$. **Mais**

$$\nu'' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u''}{\partial y}\right)}{\mu'\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right)}, \quad \textbf{donc } \nu'' = 0,$$

donc $\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u''}{\partial y}\right) = 0$, **donc** $\mu'' = Q : \Phi'$.

La valeur de $\nu' = C : \Phi''$ **donne**

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\left(\frac{\partial \mu'}{\partial x}\right)}{\mu'} - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) C : \Phi''\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\left(\frac{\partial \mu'}{\partial y}\right)}{\mu'} - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) C : \Phi''\right) = 0.$$

Donc $l\,\mu' = N : \Phi' + P : \Phi''$. **Mais** $\nu''' = L : \Phi''' =$

$$\frac{\frac{\mu''}{\mu'}\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}.$$

Donc $\mu'' = \mu' = Q : \Phi'$. Donc

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \frac{\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}{L:\Phi'''}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \frac{\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)}{L:\Phi'''}\right) = 0.$$

donc $\Phi' = R : \Phi'' + S : \Phi'''$. Donc une des trois quantités Φ', Φ'', Φ''' doit être égale à la somme des fonctions des deux autres, comme nous l'avons trouvé ci-dessus §. 8. De plus on aura $z' = F : \Phi' + Q : \Phi' f : \Phi'' + Q : \Phi' \Sigma : \Phi''' = \frac{z}{\Pi'}$. Donc $\frac{z}{\Pi' Q:\Phi'} = F : \Phi' + f : \Phi'' + \Sigma : \Phi'''$. Donc en général $z = \Pi (F : \Phi' + f : \Phi'' + \Sigma : (\sigma : \Phi' + \varrho : \Phi'')$, comme nous l'avons trouvé ci-dessus.

10. On peut confirmer ce résultat en exécutant le procédé indiqué dans le §. 6. Reprenons l'équation du §. 7. $\frac{z}{\Pi} = F : \Phi' + f : \Phi'' + \Sigma : \Phi'''$, ou plus simplement $z = F : \Phi' + f : \Phi'' + \Sigma : \Phi'''$, on pourra faire dans les équations générales du §. 2. $\Pi = 1$, ce qui donnera $T = 0$, et les équations II et III. nous donneront les six équations suivantes :

I. $$\left(3\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)$$
$$+ \left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2 + \frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2 = 0;$$

II. $$\left(3\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)$$
$$+ \left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + \frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)^2 + \frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2 = 0;$$

III. $$\left(3\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right)$$
$$+ \left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + \frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)^2 + \frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)^2 = 0;$$

$$\text{IV.}\ \left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^3}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^2\partial x}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y\partial x^2}\right)+\frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial x^3}\right)+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)$$
$$+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{R}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{S}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=0;$$

$$\text{V.}\ \left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y^3}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y^2\partial x}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y\partial x^2}\right)+\frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial x^3}\right)+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)$$
$$+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)+\frac{R}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{S}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)=0;$$

$$\text{VI.}\ \left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial y^3}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial y^2\partial x}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial y\partial x^2}\right)+\frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial x^3}\right)+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right)$$
$$+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\partial y}\right)+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right)+\frac{R}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)+\frac{S}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)=0.$$

Multiplions réspectivement les trois dernieres équations par m', m'', m''', ajoutons les et égalons séparément à zéro les coëfficiens de $\frac{R}{F}$, $\frac{S}{F}$, l'équation résultante sera :

$$m'\left[\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^3}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^2\partial x}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y\partial x^2}\right)+\frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial x^3}\right)+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)\right]$$
$$+m''\left[\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y^3}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y^2\partial x}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y\partial x^2}\right)+\frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial x^3}\right)+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\right]$$
$$+m'''\left[\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial y^3}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial y^2\partial x}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial y\partial x^2}\right)+\frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial x^3}\right)+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\partial y}\right)+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right)\right]=0,$$

et les deux équations de condition seront :

$$m'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+m''\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+m'''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)=0,$$
$$m'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+m''\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+m'''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)=0,$$

d'où l'on tire en éliminant

$$\frac{m'''}{m'}=\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)},$$

$$\frac{m''}{m'} = -\frac{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)}.$$

L'on peut donc faire

$$m' = \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right),$$

$$m'' = -\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right),$$

$$m''' = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right).$$

11. Maintenant multiplions réspectivement les trois premieres équations et celle que nous venons d'obtenir par les quantités n', n'', n''', n^{IV} et égalons séparément à zéro les coëfficiens de $\frac{N}{F}$, $\frac{P}{F}$, $\frac{Q}{F}$, l'équation résultante sera :

$$n^{IV}\left(m'\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^3}\right) + m''\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y^3}\right) + m'''\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial y^3}\right)\right) + \frac{K}{F}n^{IV}\left(m'\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^2\partial x}\right) + m''\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y^2\partial x}\right) + m'''\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial y^2\partial x}\right)\right)$$

$$+\frac{L}{F}n^{IV}\left(m'\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y\partial x^2}\right) + m''\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y\partial x^2}\right) + m'''\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial y\partial x^2}\right)\right) + \frac{M}{F}n^{IV}\left(m'\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial x^3}\right) + m''\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial x^3}\right) + m'''\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial x^3}\right)\right)$$

$$+ n'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)\left(3\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right) + n'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right) + n'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)\left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)$$

$$+ n''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)\left(3\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right) + n''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right) + n''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + \frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)$$

$$+ n'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right)\left(3\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right) + n'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right) + n'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + \frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right) = 0.$$

Les trois équations de condition seront :

$$n'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2 + n''\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)^2 + n'''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)^2 + n^{IV}\left(m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) + m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) + m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right)\right) = 0$$

$$n'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+n''\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+n'''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)+n^{IV}\left(m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)+m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)+m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right)\right)=0$$

$$n'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2+n''\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2+n'''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)^2+n^{IV}\left(m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)+m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right)\right)=0;$$

d'où l'on tire en éliminant:

$$n'=m'\left\{\begin{array}{l}
m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)+m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\\
\quad+m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\\
-m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)-m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\\
\quad-m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\\
-m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)-m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\\
\quad-m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\\
+m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)+m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\\
\quad+m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)
\end{array}\right\}$$

$$n''=m''\left\{\begin{array}{l}
m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)+m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\\
\quad+m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\\
-m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)-m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\\
\quad-m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\\
-m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)-m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\\
\quad-m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\\
+m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)+m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\\
\quad+m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)
\end{array}\right\}$$

$$n''' = m''' \left\{ \begin{array}{l} m' \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) \\ \quad + m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) \\ - m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) - m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) \\ \quad - m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) \\ - m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) \\ \quad - m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) \\ + m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) \\ \quad + m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) \end{array} \right\}$$

$$n^{IV} = m' m'' m'''.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on aura l'équation de condition entre Φ', Φ'', Φ''' nécessaire pour que l'intégrale supposée conduise à une équation différentielle du troisième degré. Maintenant si l'on fait $\Phi''' = \sigma : \Phi' + \varrho : \Phi''$, on trouve $m'' = -m''' \varrho' : \Phi''$, $m' = -m''' \sigma' : \Phi'$, $n' = -m'''^4 \sigma' : \Phi' \sigma' : \Phi' \varrho' : \Phi''$, $n'' = -m'''^4 \sigma' : \Phi' \varrho' : \Phi'' \varrho'' : \Phi''$, $n''' = 0$, $n^{IV} = m'''^3 \sigma' : \Phi' \varrho' : \Phi''$. Et ces valeurs substituées dans l'équation de condition la rendent identiquement nulle, ce qui donne le résultat du §. 8. On peut arriver aussi au même résultat, en considérant que si l'on substitue la valeur $\Phi''' = \sigma : \Phi' + \varrho : \Phi''$ dans l'équation VI, elle devient identiquement nulle, pourvû qu'on y fasse usage des équations I, II, IV, V, ce qui n'arrive pas à l'équation III. Les six équations que nous avons rapportées se reduisent donc à cinq, par le moyen desquelles on déterminera les cinq inconnues $\frac{N}{F}$, $\frac{P}{F}$, $\frac{Q}{F}$, $\frac{R}{F}$, $\frac{S}{F}$.

12. Reprenons les équations du §. 4. faisons $\Pi' = \Pi'' = \Pi''' = \Pi$, et supposant pour abrêger

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = a,$$
$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) = b,$$
$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) = c,$$
$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) = u,$$

on aura

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\underline{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}_{\Pi} - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\underline{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}_{\Pi} = \frac{A'u}{ab};$$
$$-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\underline{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}_{\Pi} + \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\underline{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}_{\Pi} = \frac{A''u}{ac};$$
$$\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\underline{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}_{\Pi} - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\underline{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}_{\Pi} = \frac{A'''u}{bc}.$$

Eliminant $\underline{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}_{\Pi}$ des deux premieres équations, on a

$$\underline{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}_{\Pi} = \underline{\frac{A'u\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}{a^2b}} + \underline{\frac{A''u\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}{a^2c}}$$

et des deux dernières, on a

$$\underline{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}_{\Pi} = -\underline{\frac{A''u\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}{ac^2}} - \underline{\frac{A'''u\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}{bc^2}}.$$

Retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on obtient

$$\frac{A'}{a^2b}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + \frac{A''}{a^2c}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + \frac{A''}{ac^2}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) + \frac{A'''}{bc^2}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = 0, \text{ ou}$$
$$A'c^2\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + A''b\left(c\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + a\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right) + A'''a^2\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = 0.$$

Mais

$$c\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + a\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) = b\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right). \quad \text{Donc}$$
$$A'c^2 + A''b^2 + A'''a^2 = 0.$$

Eliminant ensuite $\frac{(\frac{\partial \Pi}{\partial x})}{\Pi}$ des deux premieres équations, on a

$$\frac{(\frac{\partial \Pi}{\partial y})}{\Pi} = -\frac{A'(\frac{\partial \Phi''}{\partial y})\,u}{a^2 b} + \frac{A''(\frac{\partial \Phi'}{\partial y})\,u}{a^2 c}$$

et des deux dernières, on a

$$\frac{(\frac{\partial \Pi}{\partial y})}{\Pi} = -\frac{A''(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y})\,u}{a c^2} - \frac{A'''(\frac{\partial \Phi''}{\partial y})\,u.}{b c^2}$$

Retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on obtient,

$$A' c^2 (\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}) + A'' b\,(c(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}) + a(\tfrac{\partial \Phi'''}{\partial y})) + A''' a^2 (\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}) = 0.$$

Mais $c(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}) + a(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}) = b(\frac{\partial \Phi''}{\partial y})$, donc

$$A' c^2 + A'' b^2 + A''' a^2 = 0.$$

comme ci-dessus. Supposant cette équation de condition, on a en multipliant la premiere valeur de $\frac{(\frac{\partial \Pi}{\partial x})}{\Pi}$ par ∂x et celle de $\frac{(\frac{\partial \Pi}{\partial y})}{\Pi}$ par ∂y et ajoutant ces valeurs, on aura dis-je,

$$\frac{\partial \Pi}{\Pi} = \frac{A' c\,((\frac{\partial \Phi''}{\partial x})\partial x + (\frac{\partial \Phi''}{\partial y})\partial y) + A'' b\,((\frac{\partial \Phi'}{\partial x})\partial x + (\frac{\partial \Phi'}{\partial y})\partial y)}{a^2\, bc}$$

ou bien $\frac{\partial \Pi}{\Pi} = \frac{(A' c\,\partial \Phi'' + A'' b\,\partial \Phi')\,u}{a^2\, bc}$ et partant

$$\Pi = e^{\int (\frac{A' c\,\partial \Phi'' + A'' b\,\partial \Phi'}{a^2\, bc})\,u}$$

On substituera cette valeur de Π dans les équations III et IV, et l'on aura de nouvelles équations de condition qui doivent être remplies, pour que l'intégrale

$$z = e^{\int (\frac{A' c\,\partial \Phi'' + A'' b\,\partial \Phi'}{a^2\, bc})\,u}\,(F:\Phi' + f:\Phi'' + \Sigma:\Phi'''),$$

puisse avoir lieu. Au reste, si au lieu de prendre les premieres valeurs de $\frac{(\frac{\partial \Pi}{\partial x})}{\Pi}$ et $\frac{(\frac{\partial \Pi}{\partial y})}{\Pi}$, on avait pris les secondes, on aurait trouvé

$$\frac{\partial \Pi}{\Pi} = - \frac{(A'' b \partial \Phi''' + A''' a \partial \Phi') u}{a b c^2}.$$

Egalant cette valeur à la précédente on obtient

$$\frac{A' c^2 \partial \Phi'' + A'' b (c \partial \Phi' + a \partial \Phi''') + A''' a^2 \partial \Phi''}{a^2 b c^2} = 0.$$

Mais $c\partial\Phi' + a\partial\Phi''' = b\partial\Phi''$, donc $A'c^2 + A''b^2 + A'''a^2 = 0$, ce qui est l'équation de condition trouvée ci-dessus. Ainsi ces deux intégrales reviennent au même. Si l'on fait usage de la valeur de Φ''' trouvée plus haut, savoir $\Phi''' = \sigma : \Phi' + \varsigma : \Phi''$, l'on aura $b = a\varsigma' : \Phi''$, $c = -a\sigma' : \Phi'$, l'équation de condition devient donc en la divisant par a^2, $A' (\sigma' : \Phi')^2 + A'' (\varsigma' : \Phi'')^2 + A''' = 0$.

13. Prenons pour exemple l'équation

$$(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}) + \frac{c}{e}(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}) + \frac{b}{e}(\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}) + \frac{a}{e}(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}) + \frac{h}{e}(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}) + \frac{g}{e}(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y})$$
$$\frac{f}{e}(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}) + \frac{k}{e}(\frac{\partial z}{\partial y}) + \frac{i}{e}(\frac{\partial z}{\partial x}) + \frac{l}{e} z = 0$$

(que traite M. de Condorcet Mém. de l'Ac. des Sc. de Paris pour 1772 P. 1. p. 30) $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l$ étant des constantes. Nous aurons $\frac{K}{F} = \frac{c}{e}$, $\frac{L}{F} = \frac{b}{e}$, $\frac{M}{F} = \frac{a}{e}$, $\frac{N}{F} = \frac{h}{e}$, $\frac{P}{F} = \frac{g}{e}$, $\frac{Q}{F} = \frac{f}{e}$, $\frac{R}{F} = \frac{k}{e}$, $\frac{S}{F} = \frac{i}{e}$, $\frac{T}{F} = \frac{l}{e}$.

On aura donc

$$\frac{(\frac{\partial \Phi}{\partial y})^3}{(\frac{\partial \Phi}{\partial x})^3} + \frac{\frac{c}{e}(\frac{\partial \Phi}{\partial y})^2}{(\frac{\partial \Phi}{\partial x})^2} + \frac{\frac{b}{e}(\frac{\partial \Phi}{\partial y})}{(\frac{\partial \Phi}{\partial x})} + \frac{a}{2} = 0.$$

Soyent les trois racines de cette équation

$\frac{(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})}{(\frac{\partial\Phi'}{\partial x})}, \frac{(\frac{\partial\Phi''}{\partial y})}{(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})}, \frac{(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y})}{(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x})}$, ou en faisant en général $\frac{(\frac{\partial\Phi}{\partial y})}{(\frac{\partial\Phi}{\partial x})} = m$,

on aura à intégrer l'équation $\partial x + m\partial y = 0$, ce qui donnera $\Phi = x + my$, donc

$\Phi' = x + m'y$, $\Phi'' = x + m''y$, $\Phi''' = x + m'''y$,

$(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}) = 0$, $(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}) = 1$, $(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}) = 1$,

$(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}) = m'$, $(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}) = m''$, $(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}) = m'''$,

toutes les différentielles ultérieures seront $= 0$. On aura

$a = m' - m''$, $b = m' - m'''$, $c = m'' - m'''$, $A' = \frac{h}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{f}{e}$,

$A'' = \frac{h}{e}m''^2 + \frac{g}{e}m'' + \frac{f}{e}$, $A''' = \frac{h}{e}m'''^2 + \frac{g}{e}m''' + \frac{f}{e}$. Donc

$$\frac{A'c\partial\Phi'' + A''b\partial\Phi'}{a\ b\ c} =$$

$$\frac{(\frac{h}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{f}{e})(m'' - m''')(\partial x + m''\partial y) + (\frac{h}{e}m''^2 + \frac{g}{e}m'' + \frac{f}{e}) \times (m' - m''')(\partial x + m\partial y)}{(m' - m'')^2 (m' - m''')(m'' - m''').}$$

Donc $\Pi = \varepsilon^{\frac{(\frac{h}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{f}{e})(m'' - m''')(x + m''y) + (\frac{h}{e}m''^2 + \frac{g}{e}m'' + \frac{f}{e}) \times (m' - m''')(x + m'y)}{(m' - m'')^2 (m' - m''')(m'' - m''')}}$,

ε étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$.

14. Maintenant l'équation de condition $A' c^3 + A'' b^2 + A''' a^2 = 0$, deviendra en y substituant les valeurs,

$$(\frac{h}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{f}{e})(m'' - m''')^2 + (\frac{h}{e}m''^2 + \frac{g}{e}m'' + \frac{f}{e})(m' - m''')^2 + (\frac{h}{e}m'''^2 + \frac{g}{e}m''' + \frac{f}{e})(m' - m'')^2 = 0$$

et au moyen de cette équation on satisfait aux trois équations que donne la seconde des équations générales. La roisième des équations générales donne, en mettant pour $\frac{K}{F}, \frac{L}{F}, \frac{M}{F}$ leurs valeurs en m', m'', m''', les trois équations suivantes :

$$(2m' - m'' - m''')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) - (2m''m''' - 2m'^2)\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)$$
$$+ (m'^2m'' + m'^2m''' - 2m'm''m''')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{2h}{e}m' + \frac{g}{e}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$$
$$+ \left(\frac{g}{e}m' + \frac{2f}{e}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \left(\frac{k}{e}m' + \frac{i}{e}\right)\Pi = 0,$$

$$(2m'' - m' - m''')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + (2m'm''' - 2m''^2)\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)$$
$$+ (m'm''^2 + m''^2m''' - 2m'm''m''')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{2h}{e}m'' + \frac{g}{e}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$$
$$+ \left(\frac{g}{e}m'' + \frac{2f}{e}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \left(\frac{k}{e}m'' + \frac{i}{e}\right)\Pi = 0,$$

$$(2m''' - m' - m'')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + (2m'm'' - 2m'''^2)\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)$$
$$+ (m'm'''^2 + m''m'''^2 - 2m'm''m''')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{2h}{e}m''' + \frac{g}{e}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$$
$$+ \left(\frac{g}{e}m''' + \frac{2f}{e}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \left(\frac{k}{e}m''' + \frac{i}{e}\right)\Pi = 0.$$

Nous savons a priori que ces trois équations se reduisent à deux, puisque $x + m'''y = \sigma : (x + m'y) + \varrho : (x + m''y)$; car en faisant $x + m'''y = p(x + m'y) + q(x + m''y)$, on trouve $p + q = 1$, $pm' + qm'' = m'''$, ce qui donne $p = \frac{m''' - m''}{m' - m''}$, $q = \frac{m' - m'''}{m' - m''}$. Or ajoutant ensemble la premiere équation multipliée par p et la seconde multipliée par q, on obtient la troisième, faisant pour abréger :

$$\alpha = \frac{\left(\frac{h}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{f}{e}\right)(m'' - m''') + \left(\frac{h}{e}m''^2 + \frac{g}{e}m'' + \frac{f}{e}\right)(m' - m''')}{(m' - m'')^2\,(m' - m''')\,(m'' - m''')}$$

$$\beta = \frac{\left(\frac{h}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{f}{e}\right)(m'' - m''')m'' + \left(\frac{h}{e}m''^2 + \frac{g}{e}m'' + \frac{f}{e}\right)(m' - m''')}{(m' - m'')^2\,(m' - m''')\,(m'' - m''')}$$

$\Pi = \varepsilon^{\alpha x + \beta y}$, donc $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) = \alpha\varepsilon^{\alpha x + \beta y}$, $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) = \beta\varepsilon^{\alpha x + \beta y}$, $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) = \alpha^2\varepsilon^{\alpha x + \beta y}$, $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right) = \alpha\beta\varepsilon^{\alpha x + \beta y}$, $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) = \beta^2\varepsilon^{\alpha x + \beta y}$.

Au moyen de ces valeurs les deux premieres équations deviendront

$$(2m' - m'' - m''')\beta^2 + (2m''m''' - 2m'^2)\alpha\beta$$
$$+ (m'^2m'' + m'^2m''' - 2m'm''m''')\alpha^2$$
$$+ (2\frac{h}{e}m' + \frac{g}{e})\beta + (\frac{g}{e}m' + \frac{2f}{e})\alpha + \frac{k}{e}m' + \frac{i}{e} = 0,$$
$$(2m'' - m' - m''')\beta^2 + (2m'm''' - 2m''^2)\alpha\beta$$
$$+ (m'm''^2 + m''^2m''' - 2m'm''m''')\alpha^2$$
$$+ (\frac{2h}{e}m'' + \frac{g}{e})\beta + (\frac{g}{e}m'' + \frac{f}{e})\alpha + \frac{k}{e}m'' + \frac{i}{e} = 0$$

équations de condition qui doivent être remplies pour que l'intégrale ait lieu. Enfin l'équation IV donnera, à cause de

$$(\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^3}) = \alpha^3,\ (\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^2\partial y}) = \alpha^2\beta,\ (\frac{\partial^3\Pi}{\partial x\partial y^2}) = \alpha\beta^2,\ (\frac{\partial^3\Pi}{\partial y^3}) = \beta^3,$$

l'équation de condition:

$$\beta^3 - (m' + m'' + m''')\beta^2\alpha + (m'm'' + m'm''' + m''m''')\beta\alpha^2$$
$$- m'm''m'''\alpha^3 + \frac{h}{e}\beta^2 + \frac{g}{e}\beta\alpha + \frac{f}{e}\alpha^2 + \frac{k}{e}\beta + \frac{i}{e}\alpha + \frac{l}{e} = 0.$$

Avec ces équations de condition on aura pour intégrale,

$$z = \Pi(F:(x + m'y) + f:(x + m''y) + \Sigma:(x + m'''y)),$$

Π ayant la valeur rapportée à la fin du §. préc.

15. On peut mettre l'intégrale sous la forme suivante:

$$z = \Pi' F:(x + m'y) + \Pi'' f:(x + m''y) + \Pi'''\Sigma:(x + m'''y).$$

Pour avoir la valeur de Π' on fera dans la valeur générale de Π, $x + m'y = 0$, ce qui donne $x = -m'y$, et l'on a

$$\Pi' = \varepsilon\frac{-(\frac{h}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{f}{e})\gamma}{(m' - m'')(m' - m''')}.$$

Pour avoir Π'', on fera dans la valeur générale de Π $x + m''y = 0$, ce qui donne $x = -m''y$, et l'on a

$$\Pi'' = \varepsilon \frac{(\frac{h}{e} m''^2 + \frac{g}{e} m'' + \frac{f}{e}) y}{(m' - m'')(m'' - m''')}.$$

Pour avoir Π''', on fera dans la valeur générale de Π, $x + m'''y = 0$, ce qui donne $x = -m'''y$, et l'on a

$$\Pi''' = \varepsilon \frac{(\frac{h}{e} m'^2 + \frac{g}{e} m' + \frac{f}{e})(m'' - m''')^2 y + (\frac{h}{e} m''^2 + \frac{g}{e} m'' + \frac{f}{e})(m' - m''')^2 y}{(m' - m'')^2 (m' - m''')(m'' - m''')} =$$

(à cause de l'équation de condition)

$$\varepsilon \frac{-(\frac{h}{e} m'''^2 + \frac{g}{e} m''' + \frac{f}{e}) y}{(m' - m''')(m'' - m''')}.$$

Soyent pour abréger

$$\Pi' = \varepsilon^{\alpha' y}, \quad \Pi'' = \varepsilon^{\alpha'' y}, \quad \Pi''' = \varepsilon^{\alpha''' y},$$

on aura, en substituant ces valeurs dans les équations qui résultent des équations III et IV,

$$(3m' + \tfrac{c}{e})\alpha'^2 + (\tfrac{2h}{e} m' + \tfrac{g}{e})\alpha' + \tfrac{k}{e} m' + \tfrac{i}{e} = 0;$$
$$\alpha'^3 + \tfrac{h}{e}\alpha'^2 + \tfrac{k}{e}\alpha' + \tfrac{l}{e} = 0,$$
$$(3m'' + \tfrac{c}{e})\alpha''^2 + (\tfrac{2h}{e} m'' + \tfrac{g}{e})\alpha'' + \tfrac{k}{e} m'' + \tfrac{i}{e} = 0;$$
$$\alpha''^3 + \tfrac{h}{e}\alpha''^2 + \tfrac{k}{e}\alpha'' + \tfrac{l}{e} = 0,$$
$$(3m''' + \tfrac{c}{e})\alpha'''^2 + (\tfrac{2h}{e} m''' + \tfrac{g}{e})\alpha''' + \tfrac{k}{e} m''' + \tfrac{i}{e} = 0;$$
$$\alpha'''^3 + \tfrac{h}{e}\alpha'''^2 + \tfrac{k}{e}\alpha''' + \tfrac{l}{e} = 0.$$

On tire des trois dernieres équations $\frac{h}{e} = -\alpha' - \alpha'' - \alpha'''$, ce qui donne, en substituant les valeurs de α', α'', α''', une

équation identique: $\frac{k}{e} = \alpha' \alpha'' + \alpha' \alpha''' + \alpha'' \alpha'''$, d'où l'on tire une équation de condition, où entre $\frac{k}{e}$; $\frac{l}{e} = -\alpha' \alpha'' \alpha'''$, d'où l'on tire une équation de condition, où entre $\frac{l}{e}$. Les trois premieres équations donnent, en éliminant $\frac{g}{e}$ et $\frac{l}{e}$ et substituant pour $\frac{h}{e}$, $\frac{k}{e}$ leurs valeurs en $\alpha' \alpha'' \alpha'''$ et reduisant, une équation identiquement nulle.

16. On voit que α' devient α'' ou α''', en y échangeant m' et m'' au lieu m' et m''', ensorte qu'en faisant en général

$$\alpha = -\frac{(\frac{h}{e} m^2 + \frac{g}{e} m + \frac{f}{e})}{3m^2 + \frac{2c}{e} m + \frac{b}{e}},$$

on aura en général $z = \varepsilon^{\alpha y} \mathrm{F}:(x + my)$, ce qui donnera les trois fonctions, en substituant au lieu de m, m', m'', m'''.

Ces valeurs de m se tireront de l'équation

$$m^3 + \frac{c}{e} m^2 + \frac{b}{e} m + \frac{a}{e} = 0,$$

que donne l'équation I. La valeur α, que donne l'équation II, se tirera de l'équation

$$(3m^2 + \frac{2c}{e} m + \frac{b}{e}) \alpha + \frac{h}{e} m^2 + \frac{g}{e} m + \frac{f}{e} = 0,$$

et l'on aura par les équations III et IV les équations de condition

$$(3m + \frac{c}{e}) \alpha^2 + (\frac{2h}{e} m + \frac{g}{e}) \alpha + \frac{k}{e} m + \frac{i}{e} = 0,$$
$$\alpha^3 + \frac{h}{e} \alpha^2 + \frac{k}{e} \alpha + \frac{l}{e} = 0.$$

C'est sous cette forme que M. de Condorcet présente l'intégrale dans l'endroit cité.

17. Nous avons supposé jusqu'ici les trois valeurs Φ', Φ'', Φ''', inégales. Si deux d'entr'elles sont égales, par exemple $\Phi'' = \Phi'''$, nous ferons, en employant la méthode du §. 9.

$$z = \Pi' F : \Phi' + \Pi'' f : \Phi'' + \Phi''' \Sigma : \Phi'',$$

ou en faisant

$\frac{z}{\Pi'} = z'$, $\frac{\Pi''}{\Pi'} = \nu$, $\frac{\Pi'''}{\Pi'} = \mu$, on aura

$$z' = F : \Phi' + \nu f : \Phi'' + \mu \Sigma : \Phi''.$$

Différentiant et supposant

$$z'' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)}{\mu\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right)},$$

$$p = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)}{\mu\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right)},$$

$$\varrho = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)}{\mu\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right)},$$

on aura $z'' = p f : \Phi'' + \nu' f' : \Phi'' + \varrho \Sigma : \Phi'' + \Sigma' : \Phi''$.

Différentiant et supposant

$$z''' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial y}\right)},$$

$$p' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial y}\right)},$$

$$\varrho' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial y}\right)},$$ on aura

$$z''' = p' f : \Phi'' + f' : \Phi'' + \varrho' \Sigma : \Phi''.$$

Pour que l'intégrale supposée conduise à une équation du troisième degré, il faut que

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right) = 0,$$

ce qui donne les équations suivantes:

I. $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial p'}{\partial y}\right) = 0,$

II. $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varrho'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varrho'}{\partial y}\right) = 0.$ Donc

$\varrho' = A:\Phi''$, $p' = B:\Phi''$, donc

$$\frac{p''}{\varrho'} = C:\psi = \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varrho}{\partial y}\right)}, \text{ donc}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}\right)C:\Phi''\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\varrho}{\partial y}\right)C:\Phi''\right) = 0.$$

Pour que cette équation soit intégrable, il faut que

$\varrho = D:\Phi''$, donc $p = E:\Phi''$, donc

$$\frac{p}{\varrho} = P:\Phi'' = \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\nu}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)}. \text{ Donc}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)P:\Phi''\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\left(\frac{\partial\nu}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)P:\Phi''\right) = 0.$$

Pour que cette équation soit intégrable, il faut que

$\mu = M:\Phi''$, donc $\nu = M:\Phi'' + \sigma:\Phi'$, donc

$\Pi'' = \Pi'(M:\Phi'' + \sigma:\Phi')$, $\Pi''' = \Pi' M:\Phi''$,

$z = \Pi'(F:\Phi' + (M:\Phi'' + \sigma:\Phi')f:\Phi'' + M:\Phi''\,\Sigma:\Phi'')$

$= \Pi'(F:\Phi' + \Sigma:\Phi'' + \sigma:\Phi' f:\Phi'').$

On parviendra aux mêmes résultats d'après les équations générales du §. 2. Car on déterminera par l'équation I les quantités $\frac{K}{F}$, $\frac{L}{F}$, $\frac{M}{F}$, substituant pour Φ dans l'équation II la valeur double Φ'', les coëfficiens de $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$ et $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)$ devien-

dront identiquement nuls, et le coëfficient de Π, égalé à zéro, déterminera la quantité $\frac{N}{F}$. Substituant la troisième valeur Φ', on aura une équation qui déterminera la quantité $\frac{P}{F}$. L'équation III fournira trois équations qui détermineront les valeurs $\frac{Q}{F}$, $\frac{R}{F}$, $\frac{S}{F}$. L'équation IV. fournira trois équations, en y substituant pour Π les quantités Π', Π'', Π'''; l'une d'elles déterminera la valeur $\frac{T}{F}$, et il restera deux équations, par le moyen desquelles on déterminera deux des quantités Π'', Π''', par le moyen de la troisième Π et des quantités Φ', Φ''. La méthode précédente est comme l'on voit plus abrégée, parce que celle-ci suppose des éliminations assez longues.

18. Reprenons l'intégrale

$$z = \Pi' (F : \phi' + \Sigma : \phi'' + \sigma : \phi' f : \phi'').$$

Les trois équations rapportées à la fin du §. 4. se reduiront à deux, savoir

$$\frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'} - \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'} - \frac{A'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)} = 0,$$

$A = 0$. La premiere de ces équations donnera la valeur de Π' par l'intégration d'une équation du premier degré. La seconde fournira une équation de condition. L'équation III du §. 2. fournira les trois équations suivantes:

$$\left(3\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial x \partial y}\right) +$$
$$\left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \frac{3M}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial x^2}\right)$$

$$+\left(3\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{2N}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)$$
$$+\left(\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{2Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)$$
$$+\left(\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^3}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^2\,\partial x}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y\,\partial x^2}\right)+\frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial x^3}\right)+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{R}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{S}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\Pi'=0;$$

$$\left(3\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\,\partial y}\right)+\left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)$$
$$+\left(3\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)+\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)+\frac{2N}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)$$
$$+\left(\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{2Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)$$
$$+\left(\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y^3}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y^2\,\partial x}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y\,\partial x^2}\right)+\frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial x^3}\right)+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)+\frac{R}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{S}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'=0,$$

$$\left[\left(3\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)2\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\right.\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)+\left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)2\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\left(3\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)$$
$$+\left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\left(3\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)+\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y\,\partial x}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2N}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{2Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)]\ \sigma':\Phi',$$
$$+\left(3\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)$$
$$+\left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2\sigma'':\Phi'=0.$$

Les deux premieres équations fourniront des équations de condition, et la troisième déterminera $\sigma:\Phi'$, en supposant la con-

dition que la valeur de $\frac{\sigma'' : \Phi'}{\sigma' : \Phi'}$ soit une fonction de Φ'. Enfin l'équation IV donnera l'équation de condition suivante :

$$\left(\frac{\partial^3 \Pi'}{\partial y^3}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3 \Pi'}{\partial y^2 \partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3 \Pi'}{\partial y \partial x^2}\right) + \frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3 \Pi'}{\partial x^3}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial y^2}\right) + \frac{P}{F}\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial x \partial y}\right)$$
$$+ \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial \partial \Pi'}{\partial x^2}\right) + \frac{R}{F}\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) + \frac{S}{F}\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) + \frac{T}{F}\Pi' = 0.$$

La seconde équation de condition qu'on pourrait croire en résulter, se reduit aux précédentes ; car en appellant I, II, III, IV les quatre équations générales du §. 2., cette équation sera $IV\ \sigma : \Phi' + III\ \sigma' : \Phi' + II\ \sigma'' : \Phi' + I\ \sigma''' : \Phi' = 0$.

19. Si nous appliquons cette Théorie à l'exemple du §. 13. et que nous fassions $m'' = m'''$, l'équation II donnera

$$\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) - m'\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) + \frac{\left(\frac{h}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{f}{e}\right)\Pi'}{(m' - m'')^2} = 0,$$

$$\frac{h}{e}m''^2 + \frac{g}{e}m'' + \frac{f}{e} = 0,$$

La valeur de m'' étant double par supposition, on aura

$$m'' = -\frac{g}{2h},\ f = \frac{gg}{4h}.\ \text{Donc}$$

$$\frac{h}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{f}{e} = \frac{h}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{gg}{4he} =$$

$$\frac{hhm'^2 + hgm' + \frac{gg}{4}}{e} = \frac{(hm' + \frac{g}{2})^2}{e}.$$

Faisons pour intégrer l'équation du premiere dégré, $\Pi' = e^{\alpha x + \beta y}$, cette équation deviendra

$$\beta - m'\alpha + \frac{(hm' + \frac{g}{2})^2}{e(m' - m'')} = 0, \text{ ou } \beta - m'\alpha + \frac{hm' + \frac{g}{2}}{e(m' + \frac{g}{2h})} = 0, \text{ ou}$$

$$\beta - m'\alpha + \frac{h}{e}, = 0, \text{ donc } \beta = m'\alpha - \frac{h}{e}, \Pi' = e^{\alpha(x + m'y)} - \frac{h}{e},$$

α étant une constante qui reste indéterminée, et que nous déterminerons par les équations de condition. L'équation III donnera:

$$(3m' + \tfrac{c}{e})(\tfrac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}) + (\tfrac{2c}{e}m' + \tfrac{2b}{e})(\tfrac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\,\partial y} + (\tfrac{b}{e}m' + \tfrac{3a}{e})(\tfrac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2})$$
$$+ (\tfrac{2h}{e}m' + \tfrac{g}{e})(\tfrac{\partial\Pi'}{\partial y}) + (\tfrac{g}{e}m' + \tfrac{2f}{e})(\tfrac{\partial\Pi'}{\partial x}) + (\tfrac{k}{e}m' + \tfrac{i}{e})\Pi' = 0,$$

où en mettant pour Π' sa valeur,

$$(3m' + \tfrac{c}{e})\beta^2 + (\tfrac{2c}{e}m' + \tfrac{2b}{e})\alpha\beta + (\tfrac{b}{e}m' + \tfrac{3a}{e})\alpha^2 + (\tfrac{2h}{e}m' + \tfrac{g}{e})\beta$$
$$+ (\tfrac{g}{e}m' + \tfrac{2f}{e})\alpha + (\tfrac{k}{e}m' + \tfrac{i}{e}) = 0,$$

on en mettant pour β, $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{e}$, $\frac{c}{e}$ leurs valeurs, $\frac{k}{e}m' + \frac{i}{e} = 0$, donc $\frac{i}{e} = -\frac{k}{e}m'$. On aura ensuite

$$(3m'' + \tfrac{c}{e})(\tfrac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}) + (\tfrac{2c}{e}m'' + \tfrac{2b}{e})(\tfrac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\,\partial y}) + (\tfrac{b}{e}m'' + \tfrac{3a}{e})(\tfrac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2})$$
$$+ (\tfrac{2b}{e}m'' + \tfrac{g}{e})(\tfrac{\partial\Pi'}{\partial y}) + (\tfrac{g}{e}m'' + \tfrac{2f}{e})(\tfrac{\partial\Pi'}{\partial x}) + (\tfrac{k}{e}m'' + \tfrac{i}{e})\Pi' = 0,$$

ou en mettant les valeurs trouvées

$$\beta^2 - 2m''\alpha\beta + m''^2\alpha^2 + \tfrac{k}{e} = 0,$$

ou en mettant la valeur de β,

$$\tfrac{a^2cc}{ee} - \tfrac{3a^2cg}{be} + \tfrac{2abc}{ee} - \tfrac{3ag}{e} + \tfrac{bb}{ee} + \tfrac{9a^2gg}{4bb} + \tfrac{k}{e} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \frac{\frac{b}{e} + \sqrt{-\frac{k}{e}}}{\frac{3g}{2b} - \frac{c}{e}},$$ en observant que $m' = -\frac{c}{e} - 2m'' = \frac{g}{b} - \frac{c}{e}$.

On aura enfin

$$((3m'' + \tfrac{c}{e})2\beta m' + (\tfrac{2c}{e}m'' + \tfrac{2b}{e})(\alpha m' + \beta) + (\tfrac{b}{e}m'' + \tfrac{3a}{e})2\alpha)\sigma' : \Phi'$$
$$+ ((3m'' + \tfrac{c}{e})m'^2 + (\tfrac{2c}{e}m'' + \tfrac{2b}{e})m' + (\tfrac{b}{e}m'' + \tfrac{3a}{e}))\sigma'' : \Phi' = 0,$$

ou $\dfrac{\frac{2b}{e}}{m' - m''} - 2\alpha = \dfrac{\sigma'' : \Phi'}{\sigma' : \Phi'} = \dfrac{-2\sqrt{-\frac{k}{e}}}{\frac{3g}{2b} - \frac{c}{e}}$, donc

$$\sigma : \Phi' = - \frac{2\sqrt{\frac{-k}{e}}}{\frac{3g}{2b} - \frac{c}{e}} \left(x + \left(\frac{g}{b} - \frac{c}{e}\right) y\right).$$

Enfin l'équation IV donnera l'équation de condition,

$$\beta^3 + \frac{c}{e}\beta^2\alpha + \frac{b}{e}\beta\alpha^2 + \frac{a}{e}\alpha^3 + \frac{b}{e}\beta^2 + \frac{g}{e}\beta\alpha + \frac{f}{e}\alpha^2 + \frac{k}{e}\beta + \frac{i}{e}\alpha + \frac{l}{e} = 0.$$

L'Intégrale aura donc cette forme :

$$z = \varepsilon^{\frac{\frac{b}{e} + \sqrt{\frac{-k}{e}}}{\frac{3g}{2b} - \frac{c}{e}} \left(x + \left(\frac{g}{b} - \frac{c}{e}\right) y\right) - \frac{b}{e} y} \left(\mathrm{F} : \left(x + \left(\frac{g}{b} - \frac{c}{e}\right) y\right)\right.$$

$$+ f : \left(x - \frac{g}{2b} y\right) + \varepsilon^{\frac{-2\sqrt{\frac{-k}{e}}}{\frac{3g}{2b} - \frac{c}{e}} \left(x + \left(\frac{g}{b} - \frac{c}{e}\right) y\right)} \Sigma : \left(x - \frac{g}{2b} y\right).$$

On peut mettre cette intégrale sous une autre forme. Dans le coëfficient de $\mathrm{F} : \left(x + \left(\frac{g}{b} - \frac{c}{e}\right) y\right)$ on peut faire

$$x + \left(\frac{g}{b} - \frac{c}{e}\right) y = 0,$$

ce qui réduit ce coëfficient à $\varepsilon^{-\frac{b}{e} y}$. Dans les coëfficiens de $f : \left(x - \frac{g}{2b} y\right)$ et $\Sigma : \left(x - \frac{g}{2b} y\right)$ on peut faire $x - \frac{g}{2b} = 0$, ce qui donne $x = \frac{g}{2b} y$; alors le premier coëfficient devient $\varepsilon^{y\sqrt{\frac{-k}{e}}}$ et le second $\varepsilon^{-y\sqrt{\frac{-k}{e}}}$. L'intégrale aura donc cette forme :

$$z = \varepsilon^{-\frac{b}{e} y} \mathrm{F} : \left(x + \left(\frac{g}{b} - \frac{c}{e}\right) y\right) + \varepsilon^{y\sqrt{\frac{-k}{e}}} f : \left(x - \frac{gy}{2b}\right) + \varepsilon^{-y\sqrt{\frac{-k}{e}}} \Sigma : \left(x - \frac{g}{2b} y\right).$$

Au reste la valeur $i = -km'$ donne l'équation de condition $\frac{i}{k} + \frac{g}{b} - \frac{c}{e} = 0$.

L'équation de condition en β du troisième degré se reduit à celle-ci, $hk - le = 0$.

De plus, comme $b = 2m'm'' + m''^2$, on a, en substituant les valeurs, l'équation de condition

$b = -\left(\frac{g}{b} - \frac{c}{e}\right)\frac{g}{b} + \frac{gg}{4b^2} = \frac{cg}{eb} - \frac{3gg}{4bb}$. De même

$a = -m'm''^2 = \left(\frac{c}{e} - \frac{g}{b}\right)\frac{gg}{4bb} = \frac{cgg}{4bbe} - \frac{g^3}{4b^3}$, $f = \frac{gg}{4b}$.

20. Soit l'équation

$by^3\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) + (1-2b)y^3\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}\right) + (b-2)y^3\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}\right) + y^3\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)$
$-3by^2\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right) - 2(1-2b)\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y \partial x}\right) - (b-2)y^2\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) + 6by\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$
$+2(1-2b)y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - 6bz = 0$. On a ici

$F = by^3$, $K = (1-2b)y^3$, $L = (b-2)y^3$, $M = y^3$, $N = -3by^2$,
$P = -2(1-2b)y^2$, $Q = -(b-2)y^2$, $R = 6by$, $S = 2(1-2b)y$,
$T = -6b$.

La première équation nous donnera donc

$$\frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^3}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^3} + \frac{(1-2b)}{b}\frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2} + \frac{(b-2)}{b}\frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)} + \frac{1}{b} = 0,$$

ou en faisant $\frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)} = u$,

$bu^3 + (1-2b)u^2 + (b-2)u + 1 = 0$, ou
$(bu+1)(u-1)^2 = 0$. Ce qui donne

$\frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)} = -\frac{1}{b}$, $\frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)} = 1$. Cette derniere équation est double.

L'on tire de là les deux équations :

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = 0.$$

La premiere équation donne $\Phi' = bx - y$, la seconde $\Phi'' = x + y$. La premiere valeur donne $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) = b$, $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) = -1$. L'équation II donne, en y substituant ces valeurs, $by\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right) + y\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right) - b\Pi' = 0$, d'où l'on tire en intégrant $\Pi' = \alpha y$, α étant une constante arbitraire. On a de plus $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = 1$. Les deux premieres équations que fournit l'équation III deviennent identiquement nulles, aussi bien que la seconde équation que fournit l'équation II. L'équation en $\sigma : \Phi'$ donne le coefficient de $\sigma' : \Phi'$ nul, donc $\sigma'' : \Phi' = 0$, donc $\sigma : \Phi' = \Phi' = bx - y$. L'équation que fournit l'équation IV devient identiquement nulle, en sorte que l'intégrale est

$$z = y\,(\mathrm{F} : (bx - y) + f : (x + y) + (bx - y)\,\Sigma : (x + y)) =$$
$$y\,(\mathrm{F} : (bx - y) + f : (x + y) + (bx - y - b\,(x + y))\,\Sigma : (x + y)) =$$
$$y\,(\mathrm{F} : (bx - y) + f : (x + y) - (b + 1)\,y\,\Sigma : (x + y)) =$$
$$y\,(\mathrm{F} : (bx - y) + f : (x + y) + y\,\Sigma : (x + y)).$$

21. Je remarquerai à cette occasion, que l'équation que propose M. Monge (Mémoires de Turin T. 5. p. 52),

$$z = y\,\mathrm{F} : (bx - y) + y\,y\,\Sigma : (x + y),$$

comme l'intégrale d'une équation différentielle du second degré, ne l'est pas réellement, mais est une intégrale incomplette d'une équation différentielle du troisième degré, et que pour la rendre complette il faut y ajouter le terme $yf : (x + y)$. Nous pouvons démontrer, par la méthode du §. 9, que dans l'intégrale qui résulte d'une équation du second degré, la quantité Π doit être la même pour les deux fonctions arbitraires. En effet soit

$$z = \Pi'\,\mathrm{F} : \Phi' + \Pi''\,f : \Phi'', \text{ supposons } z' = \frac{z}{\Pi'},\ \mu = \frac{\Pi''}{\Pi'},$$

on aura $z' = F : \Phi' + \mu f : \Phi''$. Différentiant et faisant

$$z'' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)},$$

$$\nu = \mu \frac{\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}, \text{ on aura}$$

$$z'' = f : \Phi'' + \nu f' : \Phi''.$$

Pour que l'intégrale supposée conduise à une équation différentielle du second degré, il faut qu'on ait

$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right) = 0$, ce qui donne

$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu}{\partial y}\right) = 0$, donc

$$\nu = A : \Phi'' = \mu \frac{\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}. \text{ Donc}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\mu} - \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)}{A : \Phi''}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\mu} - \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}{A : \Phi'}\right) = 0,$$

$l\mu = B : \Phi'' + C : \Phi''$, $\mu = B : \Phi'' C : \Phi'' = \frac{\Pi''}{\Pi'}$, $\Pi'' = \Pi' B : \Phi'' C : \Phi''$,

$z = \Pi F : \Phi' + \Pi' B : \Phi' C : \Phi'' f : \Phi'' = \Pi' F : \Phi' + \Pi' B : \Phi' \times$

$\times f : \Phi'' = \Pi' B : \Phi' (F : \Phi' + f : \Phi'') = \Pi' (F : \Phi' + f : \Phi'')$.

Si l'on fait $\nu = 0$, on aura $\Phi' = \Phi''$ et μ reste indéterminé, ce qui donnera $z = \Pi' F : \Phi' + \Pi'' f : \Phi''$. Ce sont les conclusions que nous avons obtenues dans le Mémoire précedent. L'équation dont il est ici question n'étant pas dans ce cas, on sait déjà *a priori* que cette intégrale ne peut pas conduire à une équation différentielle du second degré. On peut obtenir la même conséquence *a posteriori*. Car si l'on différencie l'intégrale proposée par M Monge, on obtient l'équation différentielle que nous venons de traiter. En effet soit $\frac{z}{y} = z'$, on aura, en prenant nos dénominations :

$z' = F : (bx - y) + y\,\Sigma : (x+y)$, donc

$\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) = -F' : (bx-y) + \Sigma : (x+y) + y\,\Sigma' : (x+y)$

$\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) = bF' : (bx-y) + y\,\Sigma' : (x+y)$. Soit

$z'' = b\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)$, on aura

$z'' = b\,\Sigma : (x+y) + (b+1)\,y\,\Sigma' : (x+y)$. Donc

$\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right) = (2b+1)\,\Sigma' : (x+y) + (b+1)\,y\,\Sigma'' : (x+y)$

$\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) = b\,\Sigma' : (x+y) + (b+1)\,y\,\Sigma'' : (x+y)$. Soit

$z''' = \left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)$, on aura $z''' = (b+1)\,\Sigma : (x+y)$. Donc

$\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right) = (b+1)\,\Sigma'' : (x+y)$, $\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) = (b+1)\,\Sigma'' : (x+y)$. Donc

$\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) = 0$. Mais

$\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial z''}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z''}{\partial x\,\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\partial z''}{\partial x\,\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\partial z''}{\partial x^2}\right)$, donc

$\left(\frac{\partial\partial z''}{\partial y^2}\right) - 2\left(\frac{\partial\partial z''}{\partial x\,\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\partial z''}{\partial x^2}\right) = 0$. Mais

$\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right) = b\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial z'}{\partial x\,\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) = b\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial x\,\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\partial z'}{\partial x^2}\right)$,

$\left(\frac{\partial\partial z''}{\partial y^2}\right) = b\left(\frac{\partial^3 z'}{\partial y^3}\right) + \left(\frac{\partial^3 z'}{\partial y^2\,\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial\partial z''}{\partial x\,\partial y}\right) = b\left(\frac{\partial^3 z'}{\partial x\,\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial z'}{\partial x^2\,\partial y}\right)$,

$\left(\frac{\partial\partial z''}{\partial x^2}\right) = b\left(\frac{\partial^3 z'}{\partial x^2\,\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^3 z'}{\partial x^3}\right) = 0$. Mais

$\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{z}{yy}$,

$\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \underline{2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)} + \frac{2z}{y^3}$,

$\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial y\,\partial x}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\,\partial x}\right) - \underline{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}$,

$\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)$, $\left(\frac{\partial^3 z'}{\partial y^3}\right) = \frac{1}{y}$

$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) - \frac{3}{yy}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + \underline{6\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)} - \frac{6z}{y^4}$,

$\left(\frac{\partial^3 z'}{\partial y^2\,\partial x}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x}\right) - \underline{2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\,\partial x}\right)} + \underline{2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}$,

$\left(\frac{\partial^3 z'}{\partial y\,\partial x^2}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}\right) - \underline{\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)}$, $\left(\frac{\partial^3 z'}{\partial x^3}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)$.

Donc

$$\frac{b}{y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)+\frac{1-2b}{y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x}\right)+\frac{b-2}{y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}\right)+\frac{1}{y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)-\frac{3b}{yy}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$$
$$\frac{-2(1-2b)}{yy}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\,\partial x}\right)\frac{-(b-2)}{yy}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)+\frac{6b}{y^3}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{2(1-2b)}{y^3}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{6bz}{y^4}=0,$$

ce qui revient à l'équation que nous avons traitée ci-dessus.

22. Supposons maintenant les trois valeurs Φ', Φ'', Φ''' égales, nous ferons, en suivant la méthode du §. 9.

$z=\Pi' F:\Phi'+\Pi'' f:\Phi'+\Pi''' \Sigma:\Phi'$, ou faisant

$z'=\frac{z}{\Pi'}$, $\mu'=\frac{\Pi''}{\Pi'}$, $\mu''=\frac{\Pi'''}{\Pi'}$,

$z'=F:\Phi'+\mu' f:\Phi'+\mu''\Sigma:\Phi'$, et en différentiant,

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right)F':\Phi'+\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x}\right)f:\Phi'+\mu'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)f':\Phi'$$
$$+\left(\frac{\partial\mu''}{\partial x}\right)\Sigma:\Phi+\mu''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\Sigma':\Phi'$$
$$\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)F':\Phi'+\left(\frac{\partial\mu'}{\partial y}\right)f:\Phi'+\mu'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)f':\Phi'$$
$$+\left(\frac{\partial\mu''}{\partial y}\right)\Sigma:\Phi'+\mu''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\Sigma':\Phi'.$$

Multipliant la seconde équation par $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)$ et la retranchant de la premiere multipliée par $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)$, on aura

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)=\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\mu'}{\partial y}\right)\right)f:\Phi'$$
$$+\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\mu''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\mu''}{\partial y}\right)\right)\Sigma:\Phi',$$

ou en faisant

$$z''=\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\mu'}{\partial y}\right)},$$

$$v=\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\mu''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\mu''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\mu'}{\partial y}\right)},$$

$z'' = f:\Phi' + \nu'\Sigma:\Phi'$. On a ensuite différentiant

$$(\tfrac{\partial z''}{\partial x}) = (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}) f':\Phi' + (\tfrac{\partial \nu'}{\partial x})\Sigma:\Phi' + \nu'(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y})\Sigma':\Phi'$$
$$(\tfrac{\partial z''}{\partial y}) = (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}) f':\Phi' + (\tfrac{\partial \nu'}{\partial y})\Sigma:\Phi' + \nu'(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y})\Sigma':\Phi'.$$

Multipliant la seconde équation par $(\frac{\partial \Phi'}{\partial x})$ et la retranchant de la premiere multipliée par $(\frac{\partial \Phi'}{\partial y})$, on aura

$$(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y})(\tfrac{\partial z''}{\partial x}) - (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x})(\tfrac{\partial z''}{\partial y}) = ((\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y})(\tfrac{\partial \nu'}{\partial x}) - (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x})(\tfrac{\partial \nu'}{\partial y}))\Sigma:\Phi',$$

ou en faisant

$$z''' = \frac{(\frac{\partial \Phi'}{\partial y})(\frac{\partial z''}{\partial x}) - (\frac{\partial \Phi'}{\partial x})(\frac{\partial z''}{\partial y})}{(\frac{\partial \Phi'}{\partial y})(\frac{\partial \nu'}{\partial x}) - (\frac{\partial \Phi'}{\partial x})(\frac{\partial \nu'}{\partial y})},$$

$z''' = \Sigma:\Phi'$. Donc en différentiant

$$(\tfrac{\partial z'''}{\partial x}) = (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x})\Sigma':\Phi',\ (\tfrac{\partial z'''}{\partial y}) = (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y})\Sigma':\Phi',\ \text{donc}$$
$$(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y})(\tfrac{\partial z'''}{\partial x}) - (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x})(\tfrac{\partial z'''}{\partial y}) = 0,$$

équation différentielle du troisième degré.

23. On parviendra au même résultat par la méthode du §. 3. Les formules de ce §. donnent

$$\frac{K}{F} = -3\frac{(\frac{\partial \Phi'}{\partial y})}{(\frac{\partial \Phi'}{\partial x})},\ \frac{L}{F} = 3\frac{(\frac{\partial \Phi'}{\partial y})^2}{(\frac{\partial \Phi'}{\partial x})^2},\ \frac{M}{F} = -\frac{(\frac{\partial \Phi'}{\partial y})^3}{(\frac{\partial \Phi'}{\partial x})^3}.$$

En vertu des formules du §. 4. on aura

$$3(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y})^2 + \tfrac{2K}{F}(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y})(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}) + \tfrac{L}{F}(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x})^2 = 0$$
$$\tfrac{K}{F}(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y})^2 + \tfrac{2L}{F}(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y})(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}) + \tfrac{3M}{F}(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x})^2 = 0.$$

On a de même

$$3\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=0,\ \frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=0,$$
$$\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=0.$$

L'équation II du §. 2. deviendra donc

$$\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2=0.$$

Maintenant l'équation III se reduit à

$$\left(3\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{2N}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\ (a)$$
$$+\left(\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{2Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)$$
$$+\left(\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^3}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^2\partial x}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y\partial x^2}\right)+\frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial x^3}\right)+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{R}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{S}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\Pi=0.$$

Si l'on retranche le coëfficient de $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$ de cette équation, multiplié par $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)$, du coëfficient de Π de l'équation II, lequel est $=0$, par ce que nous avons démontré, on aura en supposant ce coëfficient de $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)=0$ et divisant par $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)$:

$$\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)-\frac{N}{F}\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=0.$$

Or puisque

$$\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2=0,\ \text{on a}$$

$$-\frac{N}{F}\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}=\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right).$$

Substituant cette valeur, on obtient:

$$\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{2Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=0.$$

Or cette quantité est précisément le coëfficient de $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)$ Donc si le coëfficient de $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)$ est $= 0$, le coëfficient de $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)$ est aussi $= 0$. Donc en égalant à zéro les coëfficiens de $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)$, on ne déterminera qu'une seule quantité $\frac{P}{F}$. Ensuite le coëfficient de Π de cette même équation III, égalé à zéro, déterminera la quantité $\frac{Q}{F}$. Enfin l'équation IV donnera, en y substituant les trois valeurs de $\Pi : \Pi'$, Π'', Π''', trois équations qui détermineront les quantités $\frac{R}{F}$, $\frac{S}{F}$, $\frac{T}{F}$. Ainsi la supposition $z = \Pi' F : \Phi' + \Pi'' f : \Phi' + \Pi''' \Sigma : \Phi'$ ne conduit qu'à une équation différentielle du troisième degré.

24. On procedera encore plus simplement, en mettant l'équation sous la forme : $\frac{z}{\Pi'} = F : \Phi' + \frac{\Pi''}{\Pi'} f : \Phi' + \frac{\Pi'''}{\Pi'} \Sigma : \Phi'$, ou $z' = F : \Phi' + \pi' f : \Phi' + \pi'' \Sigma : \Phi'$, en faisant $z' = \frac{z}{\Pi'}$, $\pi' = \frac{\Pi''}{\Pi'}$, $\pi'' = \frac{\Pi'''}{\Pi'}$, on aura dans ce cas $\frac{T}{F} = 0$, l'équation

$$\frac{N}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)^2 + \frac{P}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

déterminera $\frac{N}{F}$. Mettant ensuite dans l'équation (a) du §. préc. pour Π ses deux valeurs π' et π'', on aura deux équations qne détermineront $\frac{P}{F}$ et $\frac{Q}{F}$. Substituant enfin dans l'équation IV pour Π ses deux valeurs π', π'' on aura deux équations qui détermineront $\frac{R}{F}$, $\frac{S}{F}$. Cette intégrale ne conduit donc qu'à une équation du troisième degré, comme nous l'avons trouvé ci-dessus. Et il est aisé de faire coincider cette méthode avec celle du §. préc. Car on a $\Pi'' = \pi' \Pi'$, $\Pi''' = \pi'' \Pi'$. Soit maintenant pour abréger E' le coëfficient de $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)$ dans l'équation (a), E'' le coëfficient de $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)$ dans la même équation,

E''' le coëfficient de Π dans la même équation, cette équation deviendra

$$E'\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+E'''\Pi=0.$$

Cette équation donnera, en y substituant les trois valeurs Π', Π'', Π''', les trois équations suivantes :

$$E'\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)+E'''\Pi'=0,$$
$$E'\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)+E'''\Pi''=0,$$
$$E'\left(\frac{\partial\Pi'''}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial\Pi'''}{\partial x}\right)+E'''\Pi'''=0.$$

Substituant maintenant pour Π'', Π''' leurs valeurs $\pi'\Pi'$, $\pi''\Pi'$, les deux dernieres équations deviendront :

$$E'\left(\Pi'\left(\frac{\partial\pi'}{\partial y}\right)+\pi'\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)\right)+E''\left(\Pi'\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)+\pi'\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\right)+E'''\pi'\Pi'=0,$$
$$E'\left(\Pi'\left(\frac{\partial\pi''}{\partial y}\right)+\pi''\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)\right)+E''\left(\Pi'\left(\frac{\partial\pi''}{\partial x}\right)+\pi''\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\right)+E'''\pi''\Pi'=0,$$
$$\pi'\left(E'\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)+E'''\Pi'\right)+\Pi'\left(E'\left(\frac{\partial\pi'}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial\pi'}{\partial x}\right)\right)=0,$$
$$\pi''\left(E'\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)+E'''\Pi'\right)+\Pi'\left(E'\left(\frac{\partial\pi''}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial\pi''}{\partial x}\right)\right)=0,$$

ou $E'\left(\frac{\partial\pi'}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial\pi'}{\partial x}\right)=0,$

$$E'\left(\frac{\partial\pi''}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial\pi''}{\partial x}\right)=0.$$

Mais nous avons vu §. préc. qu'appellant D le coëfficient de Π dans l'équation II, on a $\dfrac{D-E'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}=E''$. Mais nous avons démontré que $D=0$, donc $E''=-\dfrac{E'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}$.

Substituant cette valeur on a

$$E'\left(\left(\frac{\partial\pi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\pi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\right)=0.$$

Si l'on faisait:

$$\left(\frac{\partial\pi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\pi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) = 0,$$

on auroit $\pi' = \sigma : \Phi'$, ou $\pi' = 1$, ce qui ne donnerait plus d'intégrale complette, donc $E' = 0$, et $E'' = 0$, donc $E''' = 0$, donc les suppositions du §. 23. sont les seules légitimes, et l'on peut affirmer en général que si les trois valeurs de Φ sont égales, les équations II, III, du §. 2. deviennent identiquement nulles. Il ne reste donc, pour déterminer les trois valeurs de Π, que l'équation IV.

$$\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial y^3}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial y^2\partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial y\partial x^2}\right) + M\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^3}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + \frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right) + \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + \frac{R}{F}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \frac{S}{F}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + T\Pi = 0.$$

Si l'on trouve trois valeurs particulieres de Π dans cette équation, on aura Π', Π'', Π'''. Au reste on peut regarder dans cette équation Φ' comme constant; or Φ' étant une fonction de x et y, on tirera de là la valeur de y en Φ' et x, ou de x en Φ' et y, qu'on substituera dans l'équation, et l'on n'aura plus à intégrer qu'une équation aux différences ordinaires. Mais si l'équation est trop compliquée, pour qu'on puisse en tirer la valeur de y ou de x, on rencontre alors les mêmes difficultés que nous avons détaillées pour les équations du second degré. Le détail de ces difficultés pour ce cas-ci nous menerait trop loin.

25. Reprenons l'exemple du §. 13. et supposons les trois valeurs de m égales, on aura $\Phi = x + my$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = m$, et toutes les autres differentielles égales à zéro. La premiere équation donnera donc $m^3 + \frac{c}{e}m^2 + \frac{b}{e}m + \frac{a}{e} = 0$, et l'égalité des racines donnera $\frac{c}{e} = -3m$, $\frac{b}{e} = 3m^2$ $\frac{a}{e} = -m^3$. Substituant ces valeurs dans l'équation II, on aura $hm^2 + gm + f = 0$, ce qui donne, à cause de l'égalité des racines, $\frac{g}{h} = -2m$, $\frac{f}{h} = m^2$. Substituant ces valeurs dans l'équa-

tion III, celle-ci devient $km + i = 0$, ce qui donne $\frac{i}{k} = -m$. On tire delà les deux équations de condition $\frac{c}{3e} + \frac{g}{2h} = 0$, $\frac{c}{3e} + \frac{i}{k} = 0$. Il ne reste maintenant que l'équation IV en Π du 3e degré. Or comme dans cette équation on peut faire Φ constant, ou nul, on peut tirer de là la valeur de x en y, par conséquent dans cette équation du 3e degré, on peut supposer x constant, pourvu que dans les coëfficiens on substitue la valeur de x en y, tirée de l'équation $\Phi =$ const. Mais comme ici les coëfficiens sont eux mêmes constans, cette substitution devient inutile. L'équation deviendra donc:

$$\left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial y^3}\right) + \frac{h}{e}\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial y^2}\right) + \frac{k}{e}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + \frac{l}{e}\Pi = 0.$$

Les coëfficiens étant constans, je fais $\Pi = \varepsilon^{\alpha y}$, α étant une constante, et l'équation devient $\alpha^3 + \frac{h}{e}\alpha^2 + \frac{k}{e}\alpha + \frac{l}{e} = 0$. Soyent α', α'', α''' les racines de cette équation, l'intégrale complette sera:

$$z = \alpha' \mathrm{F}:(x - \tfrac{c}{3e}y) + \alpha'' f:(x - \tfrac{c}{3e}y) + \alpha''' \Sigma:(x - \tfrac{c}{3e}y).$$

26. Soit l'équation

$$y^3\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) + 3xy^2\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}\right) + 3x^2 y\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}\right) + x^3\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) + hy^2\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right)$$
$$+ 2hxy\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y}\right) + hx^2\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) + iy\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + ix\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + kz = 0.$$

Nous avons ici $\mathrm{F} = y^3$, $\mathrm{K} = 3xy^2$, $\mathrm{L} = 3x^2 y$, $\mathrm{M} = x^3$, $\mathrm{N} = hy^2$, $\mathrm{P} = 2kxy$, $\mathrm{Q} = hx^2$, $\mathrm{R} = iy$, $\mathrm{S} = ix$, $\mathrm{T} = k$.

L'équation I donnera donc

$$y^3\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^3 + 3xy^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + 3x^2 y\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + x^3\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^3 = 0,$$

ou

$$(y\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+x\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right))^3=0, \text{ donc}$$

$$y\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+x\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=0.$$

Il s'agit donc d'intégrer l'équation $y\partial y - x\partial y = 0$, ce qui donne $\Phi = \frac{x}{y}$, donc

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=\frac{1}{y},\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)=-\frac{x}{yy},\ \left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)=-\frac{1}{yy},\ \left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right)=\frac{2x}{y^3},\ \left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\,\partial y^2}\right)=0,\ \left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial y\,\partial x^2}\right)=\frac{2}{y^3},\ \left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}\right)=-\frac{6x}{y^4}.$$

Ces valeurs rendent identiques les deux équations en Π des secondes et troisiemes degrés. Il ne restera que l'équation du 3e degré, laquelle, en supposant $x=0$, deviendra

$$y^3\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial y^3}\right)+hy^2\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)+iy\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+K\Pi=0.$$

Faisant $\Pi = y^n$, on aura

$$n\,(n-1)\,(n-2)\,y^n+hn\,(n-1)\,y^n+inyn+ky^n=0,$$

ou en divisant par y^n,

$$n\,(n-1)\,(n-2)+hn\,(n-1)+in+k=0.$$

Soyent n', n'', n''' les racines de cette équation, l'intégrale complette sera: $z = x^{n'}\,\mathrm{F}:\frac{x}{y}+x^{n''}f:\frac{x}{y}+x^{n'''}\,\Sigma:\frac{x}{y}$.

27. Si dans l'exemple du §. 13., on fait $h=g=f=k=i=l=0$, ce qui est le cas que traite M. Euler (Calc. Int. T. 3. p. 383), on aura §. 21. $\Pi=0$, et les équations de condition deviendront identiquement nulles. Donc

$$z=\mathrm{F}:(x+m'y)+f:(x+m''y)+\Sigma:(x+m'''y).$$

S'il y a deux racines égales, on a alors, en reprenant le procédé du §. 26.

$$\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) - m' \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) = 0, \text{ et } \beta - m'\alpha = 0, \text{ donc } \beta = m'\alpha.$$

L'on aura ensuite

$$(3m'' + \tfrac{c}{e})\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{2c}{e}m'' + \frac{2b}{e}\right)\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial y \partial x}\right) + \left(\frac{b}{e}m'' + \frac{3a}{e}\right)\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x^2}\right) = 0,$$

ou $\beta^2 - 2m''\alpha\beta + m''^2\alpha^2 = 0$, ou $(\beta - m''\alpha)^2 = 0$, ou $\beta = m''\alpha$. Donc puisque m'' est différent de m', $\alpha = \beta = 0$, $\Pi' = 1$, l'équation qui détermine $\sigma : \Phi'$ donnera $(m' - m'')^2\, \sigma'' : \Phi' = 0$, donc $\sigma'' : \Phi' = 0$, $\sigma' : \Phi' = A$, $\sigma : \Phi' = A\Phi' + B$, A et B étant des constantes arbitraires. L'intégrale sera donc

$$z = F : (x + m'y) + f : (x + m''y) + (A\Phi' + B)\, \Sigma : (x + m''y).$$

Les équations de condition deviennent identiquement nulles. Si les trois racines sont égales, en suivant le procédé du §. 27., l'équation se reduit à $\left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial y^3}\right) = 0$, ce qui donne $\Pi' = 1$, $\Pi'' = y$, $\Pi''' = y$, l'intégrale sera donc

$$z = F : (x - \tfrac{c}{3e}y) + yf : (x - \tfrac{c}{3e}y) + y^2\, \Sigma : (x - \tfrac{c}{3e}y).$$

28. Soit l'équation

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) - \frac{3y^2}{x^4}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}\right) + \frac{3y^4}{x^4}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}\right) - \frac{y^6}{x^6}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) - \left(\frac{6}{y} + \frac{3y^2}{x^3}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$$
$$+ \frac{6y}{x^2}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right) + \frac{3y^6}{x^7}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{10}{y^2} + \frac{2y^4}{x^6} + \frac{6y}{x^3}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{6y^6}{x^8}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{6y^6}{x^9}z = 0,$$

on aura d'abord à résoudre l'équation du 3e degré,

$$\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y}\right)^3 - \frac{3y^2}{x^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{3y^4}{x^4}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{y^6}{x^6}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^3 = 0,$$

qui se reduit à

$$\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) - \frac{y^2}{x^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\right)^3 = 0, \text{ ou}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) - \frac{y^2}{x^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = 0,$$

ce qui donne la valeur triple $\Phi = x^3 + y^3$. Voilà ce que donne l'équation I du §. 2. Les équations II et III deviennent identiquement nulles. L'équation IV. revient à l'équation proposée, pourvu qu'on y mette Π au lieu de z. Dans cette équation on peut faire $x^3 + y^3$ constant ou nul. On peut donc ne supposer Π variable que relativement à x, pourvu qu'on substitue dans l'équation qui restera, la valeur de y en x. L'équation sera donc

$$-\frac{y^6}{x^6}\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^3}\right)+\frac{3y^6}{x^5}\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)-\frac{6y^6}{x^6}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+\frac{6y^6}{x^6}\Pi=0, \text{ ou}$$

$$\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^3}-\frac{3}{x}\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^2}\right)+\frac{6}{x^2}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)-\frac{6}{x^3}\Pi=0.$$

Je fais $\Pi = \alpha x^n$, et substituant les valeurs, α disparoît et j'ai $n^3 - 6n^2 + 11n - 6 = 0$, d'où l'on tire $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ce qui donne les trois valeurs $\Pi = x$, $\Pi = x^2$, $\Pi = x^3$. L'intégrale sera donc

$$z = x\,F:(x^3+y^3) + x^2 f:(x^3+y^3) + x^3\,\Sigma:(x^3+y^3).$$

29. Il faudrait passer à présent la forme $z = \Pi' F:\Phi + \Pi F':\Phi$, et la méthode générale d'intégration employée dans ce Mémoire subsisterait toujours, c'est à dire qu'on trouverait d'abord Π en intégrant aussi une équation du premier degré, dans laquelle on auroit substitué la valeur de Π. Ensuite les autres équations fourniraient des équations de condition, qui devraient avoir lieu, pour que l'intégrale satisfit. Mais il est bon de s'assurer *a priori* de la possibilité de cette forme, parceque si elle n'était pas possible, la méthode serait nécessairement illusoire. Pour cela je mets l'intégrale sous cette forme: $z' = F:\Phi + \Pi F':\Phi$, et j'obtiendrai, en différentiant comme dans le §. 1., la même équation différentielle du troisième degré dans le §. 2., à cela près que $T = 0$, parceque $\Pi' = 1$, et les quatre équations de condition suivantes:

I. $F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^3 + K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^3 = 0;$

II. $\left(3F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + 2K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \left(K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + 2L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + 3M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \left(3F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + 2K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right) + K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + 2L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right) + L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + 3M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + N\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right)\Pi = 0;$

III. $\left(3F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + \left(2K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + 2L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right) + \left(L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + 3M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + \left(3F\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + 2K\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right) + L\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + 2N\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \left(K\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + 2L\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right) + 3M\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + 2Q\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + F\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}\right) + K\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}\right) + L\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}\right) + M\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right) + N\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + P\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + S\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\Pi + 3F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + 2K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right) + K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + 2L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right) + L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + 3M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + N\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 = 0;$

IV. $F\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial y^3}\right) + K\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial x\partial y^2}\right) + L\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^2\partial y}\right) + M\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^3}\right) + N\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + P\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + R\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + S\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + F\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}\right) + K\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^2\partial x}\right) + L\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial y\partial x^2}\right) + M\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right) + N\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + P\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + S\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = 0.$

Substituant dans l'équation III les trois valeurs Φ', Φ'', Φ''', on obtiendra les trois équations suivantes:

$$a'\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)+b'\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)+c'\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)+e'\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+f'\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+g'\Pi+A'=0,$$

$$a''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)+b''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)+c''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)+e''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+f''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+g''\Pi+A''=0,$$

$$a'''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)+b'''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)+c'''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)+e'''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+f'''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+g'''\Pi+A'''=0;$$

en prenant pour a', b', etc. les coëfficiens réspectifs tels qu'ils résultent de l'équation générale. On tire de là en eliminant,

$$(a''b'-a'b'')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)+(a''c'-a'c'')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)+(a''e'-a'e'')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+(a''f'-a'f'')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+(a''g'-a'g'')\Pi+a''A'-a'A''=0,$$

$$(a'''b'-a'b''')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)+(a'''c'-a'c''')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)+(a'''e'-a'e'''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+(a'''f'-a'f''')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+(a'''g'-a'g''')\Pi+a'''A'-a'A'''=0,\ \text{ou}$$

$$\alpha'\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)+\beta'\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)+\gamma'\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+\delta'\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+\varepsilon'\Pi+\zeta'=0$$

$$\alpha''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)+\beta''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)+\gamma''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+\delta''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+\varepsilon''\Pi+\zeta''=0\ (u)$$

en prenant pour α', α'', etc. les coëfficiens réspectifs de deux équations précédentes. On tire delà en éliminant

$$(\alpha''\beta'-\alpha'\beta'')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)+(\alpha''\gamma'-\alpha'\gamma'')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+(\alpha''\delta'-\alpha'\delta'')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+(\alpha''\varepsilon'-\alpha'\varepsilon'')\Pi+\alpha''\zeta'-\alpha'\zeta''=0\ (b).$$

Mais on a en vertu du §. 12.

$$\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi}=\frac{A'u\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}{a^2b}+\frac{A''u\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}{a^2e},\ \text{ou}\ \left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)=M'\Pi,$$

en faisant

$$M'=\frac{A'u\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}{a^2b}+\frac{A''u\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}{a^2e},$$

donc

$$\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) = M'\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \Pi\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right) = M'M'\Pi + \Pi\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right).$$

On aura par le même §.,

$$\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi} = -\frac{A'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)u}{a^2b} + \frac{A''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)u}{a^2c} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) = M''\Pi$$

en faisant

$$M'' = -\frac{A'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)u}{a^2b} + \frac{A''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)u}{a^2c}, \text{ donc}$$

$$\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right) = M''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \Pi\left(\frac{\partial M''}{\partial x}\right) = M''^2\Pi + \Pi\left(\frac{\partial M''}{\partial x}\right),$$

$$\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) = M''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \Pi\left(\frac{\partial M''}{\partial y}\right) = M''^2\Pi + \Pi\left(\frac{\partial M''}{\partial y}\right).$$

Pour que la valeur de $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)$, qu'on vient de trouver, s'accorde avec celle de l'équation (b), il faut que l'on ait $\alpha''\zeta' - \alpha'\zeta'' = 0$. Mais $\alpha'' = a'''b' - a'b'''$, $\alpha' = a''b' - a'b''$, $\zeta'' = a'''A' - a'A'''$, $\zeta' = a''A' - a'A''$. Donc

$(a'''b' - a'b''')(a''A' - a'A'') - (a''b' - a'b'')(a'''A' - a'A''') = 0$,

ou en développant et reduisant

$(a'''b'' - a''b''')A' + (a'b''' - a'''b')A'' + (a''b' - a'b'')A''' = 0$.

Mais

$$a' = 3F\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + K\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right),$$

$$a'' = 3F\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + K\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right),$$

$$a''' = 3F\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + K\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right),$$

$$b' = 2K\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + 2L\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right),$$

$$b'' = 2K\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + 2L\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right),$$

$$b''' = 2K\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + 2L\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right).$$

Substituant ces valeurs et divisant toute l'équation par $2KK - 6FL$, on a

$cA' - bA'' + aA''' = 0$, mais l'on a par le §. 12.

$c^2A' + b^2A'' + a^2A''' = 0$, donc

$$A'' = \frac{c(a-c)}{b(a+b)}A', \quad A''' = -\frac{c(b+c)}{a(a+b)}A'.$$

Nous aurons donc en substituant ces valeurs dans les équations de la fin du §. 4.,

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) = \frac{A'\Pi u}{ab},$$

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) = -\frac{A'\Pi(a-c)u}{ab(a+b)},$$

$$\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) = -\frac{A'(b+c)u}{ab(a+b)}.$$

Donc substituant dans les deux dernieres équations la valeur de $\frac{A'\Pi u}{ab}$, tirée de la premiere, on aura les deux équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{a+b}{a-c}\right) = 0\\ &\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \left(\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{a+b}{b-c}\right) = 0\end{aligned}\right\} (1)$$

ou

$$\left.\begin{aligned}&\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \left(\frac{a+b}{a-c}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) - \left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + \left(\frac{a+b}{a+c}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) = 0\\ &\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \left(\frac{a+b}{a-c}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) - \left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + \left(\frac{a+b}{a-c}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) = 0\end{aligned}\right\} (2)$$

Retranchant la seconde équation de la premiere et divisant par $\frac{a+b}{a-c}$, on a

$$\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) - \left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) = 0,$$

équation dont l'intégrale est $\Pi = \sigma : (\Phi'' - \Phi''')$. Donc

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) = \left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)\sigma' : (\Phi'' - \Phi'''),$$

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) = \left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)\sigma' : (\Phi'' - \Phi'''),$$

Substituant ces valeurs dans les équations (1) on aura:

$(a-b)\,\sigma' : (\Phi'' - \Phi''') - \frac{c(a+b)}{a-c}\,\sigma' : (\Phi'' - \Phi''') = 0$, ou

$a - b - \frac{c(a+b)}{a-c} = 0$, ce qui donne

$a - b - 2c = 0$, ou $c = \frac{a-b}{2}$, donc $\frac{a+c}{a-c} = 2$.

Les équations (2) deviennent donc

$$\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + 2\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) - \left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + 2\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + 2\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) - \left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + 2\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) = 0.$$ Donc

$\Pi = \varrho : (\Phi' + 2\Phi'') = \tau : (\Phi' + 2\Phi''')$, donc

$\Phi' + 2\Phi''' = \mu : (\Phi' + 2\Phi'')$ et $\Phi''' = \frac{\mu : (\Phi' + 2\Phi'') - \Phi'}{2}$, donc

$\Phi'' - \Phi''' = \frac{\Phi' + 2\Phi'' - \mu : (\Phi' + 2\Phi'')}{2} = \nu : (\Phi' + 2\Phi')$, donc

$\Pi = \sigma : (\Phi'' - \Phi''') = \varrho : (\Phi' + 2\Phi'')$,

comme cela doit être. Nous avons maintenant, en combinant entre elles les trois équations du §. 4., l'équation suivante:

$$\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) - \left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) = \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}{a\,b\,c}\,(A'c - A''b + A'''a).$$

Mais nous avons trouvé ci-dessus $A'c - A''b + A'''a = 0$, donc

$$\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) - \left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) = 0,$$

ce qui donne $\Pi = \sigma : (\Phi' + \Phi'' + \Phi''')$. Mais nous venons de trouver $\Pi = \varrho : (\Phi' + 2\Phi'')$, d'où l'on tire $\Phi''' = \Phi''$, c'est à dire $\mu(\Phi' + 2\Phi'') = \Phi' + 2\Phi''$. On ne peut donc trouver une Intégrale complette par le moyen de cette forme, puisque la troisième fonction arbitraire disparaît et se reduit à la seconde.

30. Au reste, on parvient à la même équation $A'c - A''b + A'''a = 0$, en cherchant les valeurs de $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)$ et de $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)$.

En effet on tire des équations (u)

$$(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)+(\beta''\gamma'-\beta'\gamma'')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$$
$$+(\beta''\delta'-\beta'\delta'')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+(\beta''\varepsilon'-\beta'\varepsilon'')\,\Pi+\beta''\zeta'-\beta'\zeta''=0.$$

Comparant la valeur de $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)$, qui résulte de cette équation, avec celle que nous avons obtenue ci-dessus, on en conclura que $\beta''\zeta'-\beta'\zeta''=0$. Or

$$\beta'=a''c'-a'c'',\quad \beta''=a'''c'-a'c''', \text{ donc}$$
$$(a'''c'-a'c''')(a''A'-a'A'')-(a''c'-a'c'')(a'''A'-a'A''')=0,$$

ou en développant et reduisant

$$(c''a'''-c'''a'')\,A'+(a'c'''-a'''c')\,A''+(a''c'-a'c'')\,A'''=0,$$

Mais

$$c'=L\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+3M\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right),$$
$$c''=L\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+3M\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right),$$
$$c'''=L\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)+3M\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right).$$

Substituant ces valeurs et divisant toute l'équation par LK−9FM, on obtient $cA'-bA''+aA'''=0$, comme ci-dessus. Pour avoir maintenant $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)$, on reprendra les équations (t), desquelles on tirera

$$(c''a'-c'a'')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)+(c''b'-c'b'')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)+(c''e'-c'e'')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$$
$$+(c''f'-c'f'')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+(c''-c')\,g'\Pi+c''A'-c'A''=0;$$
$$(c'''a'-c'a''')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)+(c'''b'-c'b''')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)+(c'''e''-c'e''')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$$
$$+(c'''f'-c'f''')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+(c'''-c')\,g'\Pi+c'''A'-c'A'''=0;$$
$$\alpha'''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)+\beta'''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)+\gamma'''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+\delta'''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+\varepsilon'''\Pi+\zeta'''=0;$$
$$\alpha^{IV}\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)+\beta^{IV}\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)+\gamma^{IV}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+\delta^{IV}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+\varepsilon^{IV}\Pi+\zeta^{IV}=0;$$

en prenant pour α''', α^{IV} etc. les coëfficiens réspectifs des deux équations précédentes. On tire de là en éliminant

$$(\beta^{IV}\,\alpha''' - \beta'''\,\alpha^{IV})\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + (\beta^{IV}\,\gamma''' - \beta'''\,\gamma^{IV})\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$$
$$+ (\beta^{IV}\,\delta''' - \beta'''\,\delta^{IV})\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + (\beta^{IV}\,\varepsilon''' - \beta'''\,\varepsilon^{IV})\,\Pi$$
$$+ \beta^{IV}\,\zeta''' - \beta'''\,\zeta^{IV} = 0.$$

Comparant la valeur de $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)$, qui résulte de cette équation, avec celle que nous avons obtenue ci-dessus, on obtient $\beta^{IV}\zeta''' - \beta'''\zeta^{IV} = 0$. Or $\beta''' = c''b' - c'b''$, $\beta^{IV} = c'''b' - c'b'''$, $\zeta''' = c''\,A' - c'\,A''$, $\zeta^{IV} = c'''\,A' - c'\,A'''$, donc

$$(c'''b' - c'b''')(c''A' - c'A'') - (c''b' - c'b'')(c'''A' - c'A''') = 0,$$

ou en développant et reduisant:

$$(c'''b'' - c''b''')\,A' + (c'b''' - c'''b')\,(A'' + c''b' - c'b'')\,A''' = 0.$$

Substituant les valeurs et divisant par $LL - 6KM$, on a $cA' - bA'' + aA''' = 0$, comme ci-dessus.

ESSAI
DE DÉMONTRER RIGOUREUSEMENT
UN
THÉOREME FONDAMENTAL
DES
ÉQUATIONS DE CONDITION DE LA DIFFÉRENTIELLE DES FONCTIONS À PLUSIEURS VARIABLES, ET DU CALCUL DES VARIATIONS.

PAR
S. GOURIEF.

Présenté à l'Académie le 20 Juillet 1797.

Après avoir entrepris de démontrer le calcul différentiel dans toute la rigueur mathématique, sans le secours des quantités infiniment grandes et infiniment petites, en ne faisant usage que d'accroissemens et décroissemens *indéfinis*, tels qu'admettoient les Géomètres anciens, et que le plus faible esprit peut saisir aussi facilement que le plus grand génie : il étoit naturel que je portasse mon attention sur les équations de condition de la différentielle exacte des fonctions à deux et plusieurs variables, et sur le calcul des variations. Et comme j'ai remarqué dans les livres nouvellement mis au jour, que les Géomètres du premier rang commencent déjà à rejetter les infinis, j'ai cru que le pré-

sent mémoire pourrait aussi contribuer quelque chose à en dégager de plus en plus les Mathématiques.

I. Des équations de condition de la différentielle exacte.

Soit z une fonction dont la différentielle est $M\partial y + N\partial x$ Π la quantité en laquelle se change z, en mettant $y + \Delta y$ pour y, Λ ce que devient z, en mettant $x + \Delta x$ au lieu de x, et enfin Z ce que devient z quand on substitue $x + \Delta x$ et $y + \Delta y$ au lieu de x et de y; alors $\Pi - z$ sera la différence de la fonction z, prise par rapport à y, et $\Lambda - z$ sera la différence de la même fonction z, prise par rapport à x. Supposons $\Pi - z$ $(= \Delta z) = P$ et $\Lambda - z$ $(= \Delta z) = Q$ et prenons les différences de $\Pi - z$ par rapport à x et de $\Lambda - z$ par rapport à y; pour cela dans $\Pi - z$ mettons $x + \Delta x$ au lieu de x, et du résultat soustrayons $\Pi - z$; de même dans $\Lambda - z$ mettons $y + \Delta y$ au lieu de y, et du résultat soustrayons $\Lambda - z$; nous aurons $Z - \Lambda - \Pi + z = \Delta P$ et $Z - \Pi - \Lambda + z = \Delta Q$, et de cette maniere ΔP sera $=$ à ΔQ, c'est-à-dire, quand d'une fonction z à deux variables y et x on prend séparément les différences finies P et Q par rapport à y et par rapport à x, et puis les autres différences de P par rapport à x et de Q par rapport à y, ces deux dernieres différences ΔP et ΔQ sont toujours égales entr' elles.

Cette propriété, autant que je sache, n'a pas encore été remarquée dans les différences finies, et nous donne l'éspérence d'intégrer les équations aux différences finies par le moyen de multiplicateurs convenables. Prenons l'équation $\Delta P = \Delta Q$ et divisons ses termes par le produit $\Delta y \, \Delta x$; nous aurons

$\frac{\Delta P}{\Delta y \Delta x} = \frac{\Delta Q}{\Delta y \Delta x}$ et $\frac{\Delta\left(\frac{P}{\Delta y}\right)}{\Delta x} = \frac{\Delta\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\Delta y}$. Car on prend la différence de P par rapport à x et la différence de Q par rapport à y seulement, de manière que dans le premier cas Δy et dans le second cas Δx peuvent être régardés comme des quantités constantes.

Cela posé, commençons par diminuer la différence Δy, en la divisant successivement en deux parties égales; alors d'après ce qui a été dit dans mes Principes de Géométrie transcendante, le rapport $\frac{\Delta M}{\Delta x}$ sera la limite du rapport $\frac{\Delta\left(\frac{P}{\Delta y}\right)}{\Delta x}$ et le rapport $\frac{\partial\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\partial y}$ la limite du rapport $\frac{\Delta\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\Delta y}$. Car 1°) quand dans le cas de la différentielle de la fonction z par rapport à une variable, on a $\partial z = M\partial y$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = M$, alors la limite du rapport $\frac{P}{\Delta y}\left(= \frac{\Delta z}{\Delta y}\right)$ est M, parceque $\frac{\partial z}{\partial y}$ est l'expression de la limite du rapport $\frac{\Delta z}{\Delta y}$; puis en vertu d'une des XII vérités secondaires de la méthode des limites, la limite du rapport $\frac{\Delta\left(\frac{P}{\Delta y}\right)}{\Delta x}$ sera $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. 2°) Puisque on diminue seulement Δy, et qu'on prend la différence de $\frac{Q}{\Delta x}$ seulement par rapport à y, on pourra regarder x et Δx comme des quantités constantes, et $\frac{Q}{\Delta x}$ comme fonction seulement de y; donc la limite du rapport $\frac{\Delta\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\Delta y}$ sera $\frac{\partial\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\partial y}$. Ainsi deux quantités $\frac{\Delta\left(\frac{P}{\Delta y}\right)}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\Delta y}$, qui sont toujours égales entr'elles, ont deux limites $\frac{\Delta M}{\Delta x}$ et $\frac{\partial\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\partial y}$, donc par la premiere vérité fondamentale de la méthode des limites, on aura $\frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{\partial\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\partial y}$.

Ayant obtenu cette égalité commençons à diminuer Δx de la même maniere; alors la limite du rapport $\frac{\Delta M}{\Delta x}$ sera $\frac{\partial M}{\partial x}$, et la limite du rapport $\frac{\partial(\frac{Q}{\Delta x})}{\partial y}$ sera le rapport $\frac{\partial N}{\partial y}$. Car 1°) Puisqu'on prend la différence de M seulement par rapport à x, on peut regarder M comme fonction de la seule quantité x, et ainsi, par ce qui a été dit dans mes Principes de Géométrie transcendante, la limite du rapport $\frac{\Delta M}{\Delta x}$ sera $\frac{\partial M}{\partial x}$. 2°) Puisque $\partial z = N \partial x$ et $\frac{\partial z}{\partial x} = N$, si on prend la différentielle de z seulement par rapport à x, la limite du rapport $\frac{Q}{\Delta x}$ $(= \frac{\Delta z}{\Delta x})$ est N, et $\frac{\partial N}{\partial y}$ sera la limite du rapport $\frac{\partial \frac{Q}{\Delta x}}{\partial y}$; car d'après les XII vérités secondaires de la méthode des limites on voit que si on fait une opération sur une quantité qui augmente ou diminue et qui a une limite, le résultat de cette opération a pour limite le résultat de la même opération faite sur la limite de cette quantité qui augmente ou diminue. Ainsi deux grandeurs $\frac{\Delta M}{\Delta x}$ et $\frac{\partial (\frac{Q}{\Delta x})}{\partial y}$, toujours égales entr'elles ont deux limites $\frac{\partial M}{\partial x}$ et $\frac{\partial N}{\partial y}$; par conséquent en vertu de la premiere vérité fondamentale de la méthode des limites, ces limites $\frac{\partial M}{\partial x}$ et $\frac{\partial N}{\partial y}$ sont égales entr' elles.

Peut-être on ne sera pas content de la démonstration que j'ai donné sur ce que le rapport $\frac{\partial (\frac{Q}{\Delta x})}{\partial y}$ ait pour limite $\frac{\partial N}{\partial y}$ ainsi pour ne laisser aucun doute, je présenterai une autre démonstration plus rigoureuse de la même vérité.

Supposons $\frac{Q}{\Delta x} - N = u$, dans le cas où $\frac{Q}{\Delta x}$ diminue, et $N - \frac{Q}{\Delta x} = u$, dans le cas où $\frac{Q}{\Delta x}$ augmente; on aura

$\frac{\partial\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$; je dis que le rapport $\frac{\partial u}{\partial y}$, par la diminution de Δx, peut devenir plus petit que chaque quantité donnée. Car puisque u est la différence entre $\frac{Q}{\Delta x}$ et N, qui sont des fonctions de y, u est aussi une fonction de y, et par conséquent elle représente quelque courbe dont l'arc pris d'un point quelconque, est ou concave ou convexe : 1°) Supposons qu'il soit concave,

Tab. I. Fig. 4.

comme l'arc BC, et soit le point A l'origine des abscisses, de manière que $AP = y$, $PM = u$, $Ap = y'$ et $pC = u'$; ayant pris sur l'axe le point N correspondant à l'origine de l'arc BC, faisons le rapport $\frac{EP}{NP}$ plus petit qu'une quantité donnée D, et menant NEQ, diminuons PM ($= u$) et pC ($= u'$) par la bisection successive de Δx, desorte que u soit plus petit que PE, et u' plus petit que pQ; ce qui est toujours possible, puisque u est la différence entre la quantité croissante ou décroissante $\frac{Q}{\Delta x}$ et sa limite N; d'après cela la courbe BMC prendra la position bmc et coupera dans quelque point e la droite NEQ, parceque le point b ne peut jamais tomber sur le point N. Ensuite tirez par le point m la droite nmq, parallèlement à NEQ; cette droite passant au dessus du prolongement de la droite qui unit les points e et m, ira audessus de la tangente mr de l'arc bmc dans le point m; donc le rapport $\frac{ro}{mo}$ des cathètes de la tangente, lequel, d'après la notation que nous avons prise dans les principes de la Géometrie transcendante, doit être représenté par $\frac{\partial u}{\partial y}$, sera plus petit que le rapport $\frac{qo}{mo}$; mais ce dernier est égal à $\frac{PE}{NP}$, c'est-à-dire égal à un rapport qui est plus petit qu'une quantité donnée D; donc etc.

Tab. I. Fig. 5.

2°) Soit l'arc convexe, comme BC, et soit le point A l'origine des abscisses, de manière que $AP = y$, $PM = u$,

$Ap = y'$ et $pC = u'$; faites au point P le rapport $\frac{Qp}{Pp}$ plus petit que la quantité donnée D, et diminuez pC $(= u')$, desorte que u' soit plus petit que pQ ; d'après cela la courbe BMC prendra la position bmc, et coupera la droite PQ dans un certain point e, parceque le point m ne peut jamais se confondre avec le point P. Par le point m menez la droite mq parallèlement à PQ ; cette droite passant au dessus de la droite qui unit les points m et e, et par conséquent aussi au dessus de l'arc me, passera au dessus de la tangente mr de l'arc bmc au point m ; donc le rapport $\frac{ro}{mo}$ des cathètes de la tangente, lequel, par la notation que nous avons citée, est exprimé ici par $\frac{\partial u}{\partial y}$, sera plus petit que le rapport $\frac{qo}{mo}$ $(= \frac{Qp}{Pp})$, et par conséquent, à plus forte raison, plus petit que la quantité donnée D.

Dans ces deux cas nous avons supposé que les ordonnées soyent croissantes ; mais d'après cette exposition chacun pourra facilement déduire la même chose pour le cas où les ordonnées sont décroissantes.

Ainsi la différence entre les rapports $\frac{\partial \left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\partial y}$ et $\frac{\partial N}{\partial x}$ peut être faite plus petite que chaque grandeur donnée, et puisque le premier rapport $\frac{\partial \left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\partial y}$ croît ou décroît, et que l'autre est toujours constant, ce second rapport est la limite du premier. C. Q. F. D.

Corollaire 1.

La condition de la différentielle exacte $M\partial y + N\partial x$ de la fonction z à deux variables y et x, consiste donc en

ce que la différentielle de M prise par rapport à x et divisée par ∂x est égale à la différentielle de N prise par rapport à y et divisée par ∂y. Soit $d\mathrm{M} = m\partial x$ $d\mathrm{N} = n\partial y$, la condition de la différentielle exacte $\mathrm{M}\partial y + \mathrm{N}\partial x$ de la fonction z sera contenue dans l'équation $m = n$.

Corollaire 2.

Que si la fonction z étoit une fonction à trois variables, c'est-à-dire si au lieu de deux termes la différentielle exacte de la fonction z avoit les trois termes $\mathrm{M}\partial y + \mathrm{N}\partial x + \mathrm{P}\partial u$; alors on aura: 1°) le coëfficient m de ∂x dans la différentielle de M égal au coëfficient n de ∂y dans la différentielle de N; 2°) le coëfficient m de ∂u dans la différentielle de M égal au coëfficient p de ∂y dans la différentielle de P; et enfin 3°) le coëfficient n' de ∂u dans la différentielle de N égal au coëfficient p' de ∂x dans la différentielle de P. En effet, puisque $\mathrm{M}\partial y + \mathrm{N}\partial x$ est la différentielle exacte de la fonction par rapport aux deux grandeurs variables y et x, par ce qui a été dit ci-dessus, on aura $m = n$; de même quand dans l'expression $\mathrm{M}\partial y + \mathrm{N}\partial x + \mathrm{P}\partial u$ les deux termes $\mathrm{M}\partial y + \mathrm{P}\partial u$ forment la différentielle exacte de la fonction z de deux variables y et u, il doit être $m' = p$; et enfin par la même raison on aura $n' = p'$.

Corollaire 3.

En général on aura autant de ces équations de condition que les termes de la différentielle exacte pourront être combinés de fois deux à deux.

En admettant la notation de M. Fontaine, nous aurons, au lieu de $\partial z = M\partial y + N\partial x$, l'expression suivante:

$\partial z = \frac{\partial z}{\partial y}\partial y + \frac{\partial z}{\partial x}\partial x$; d'où il résulte

$\partial . \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\partial y + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\partial x$;

$\partial . \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\partial y + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\partial x$;

et ainsi de suite.

Par le moyen de cette notation les équations de condition de ces différentielles seront exprimées de la maniere suivante:

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} \left(= \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\right)$;

$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \left(= \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}\right)$;

et ainsi de suite.

II. Calcul des variations.

Soit β une fonction des variables y, x, lesquelles soyent des fonctions de z et de la grandeur constante a; il est clair que quand on donnera à a un changement quelconque, alors x, y aussi bien que β se changeront, mais z restera constant. Supposons que d'un changement quelconque de a les fonctions x, y et β se changent en X, Y et B, alors les différences $X-x$, $Y-y$ et $B-\beta$ sont ce que nous appellons *les différences de variation;* et pour les désigner brièvement, nous prendrons la lettre majuscule latine D, en l'écrivant au devant des fonctions x, y et β, pour les distinguer des différences ordinaires que nous

sommes convenus de désigner par la lettre majuscule Grecque Δ, mise au devant de ces fonctions. Ainsi $X - x$, $Y - y$ et $B - \beta$ seront désignées par $D x$, $D y$ et $D \beta$.

Cela posé, je dis que la différence de la variation prise de la différence d'une fonction quelconque est égale à la différence prise de la différence de la variation.

Démonstration.

Soit y la fonction donnée, Y ce que devient y en vertu du changement attribué à la quantité a, y' ce que devient y en vertu de l'incrément que prend la variable z et enfin Y ce que devient y' en vertu du changement attribué à la grandeur a; on aura $Y = y + Dy$, $y' = y + \Delta y$ et $Y' = y' + Dy$, et puisque Y en vertu de l'incrément que prend z dans le même changement de a, doit aussi devenir Y, on aura $Y' = Y + \Delta Y$, et par conséquent $y' + Dy' = Y + \Delta Y$; mettez au lieu de y' et Y leurs grandeurs, vous aurez $y + \Delta y + D(y + \Delta y) = y + Dy + \Delta(y + Dy)$ et enfin $D\Delta y = \Delta Dy$. C. Q. F. D.

Il est clair que tout cela n'est autre chose qu'une répétition exacte de ce que nous avons dit dans le premier article sur les différences finies.

Puisque en attribuant un changement à la grandeur constante a, nous lui attribuons une variabilité, ont peut içi regarder a comme une grandeur variable; pour cela on peut prendre les différentielles des fonctions β, y et x par rapport à a, comme par rapport à z, et ces différentielles prises par rapport à a sont ce que nous appellons *variations des fonctions* β, y et x; et pour les désigner nous prendrons la lettre minuscule Greque pour δ, pour les distinguer des différentielles ordinaires

que nous sommes convenus de désigner par la lettre minuscule latine.

Cela posé, je dis que la variation de la différentielle d'une fonction quelconque est égale à la différentielle de la même fonction.

Démonstration.

Soit la fonction donnée y, on aura par ce qui a été démontré plus haut $\mathrm{D}\Delta y = \Delta \mathrm{D} y$; divisez cette équation par $\mathrm{D}a\,\Delta z$ et raisonnez de la même maniere, comme on a fait dans le premier article sur le théorème fondamental des équations de condition, vous aurez d'abord

$$\frac{\mathrm{D}\left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)}{\mathrm{D}a} = \frac{\Delta\left(\frac{\mathrm{D}y}{\mathrm{D}a}\right)}{\Delta z}, \text{ puis } \frac{\mathrm{D}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{\mathrm{D}a} = \frac{\partial\left(\frac{\mathrm{D}y}{\mathrm{D}a}\right)}{\partial z} \text{ et enfin}$$

$$\frac{\delta\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{\delta a} = \frac{\partial\left(\frac{\delta y}{\delta a}\right)}{\partial z}.$$

À présent pour derniere conclusion raisonnez ainsi: Puisque dans l'expression $\frac{\delta\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{\delta a}$ on prend la différentielle de $\frac{\partial y}{\partial z}$ par rapport seulement à a, quelque valeur que puisse avoir ∂z, le résultat sera le même; ou ce qui revient au même, la prise de la différentielle de $\frac{\partial y}{\partial z}$ par rapport à a, n'influe en rien sur ∂z; et pour cela au lieu de $\frac{\delta\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{\delta a}$ nous pouvons prendre cette expression $\frac{\delta\,\partial y}{\delta a\,\partial z}$; aussi par la même raison au lieu de $\frac{\partial\left(\frac{\delta y}{\delta a}\right)}{\partial z}$ nous pouvons prendre l'expression suivante $\frac{\partial\,\delta y}{\partial z\,\delta a}$, et de cette maniere on aura $\delta\partial y = \partial\delta y$. C. Q. F. D.

D'après cela il ne sera plus surprenant que M. Fontaine, ait pû déduire le théorème fondamental exposé dans le premier article sur les équations de condition de la différentielle exacte, du calcul des variations, car l'un à l'égard de l'autre n'est autre chose qu'une répétition.

Et cela posé il ne me reste plus, pour finir cette matiere, que de citer l'excellent ouvrage de M. Cousin, intitulé *Leçons de calcul differentiel et de calcul intégral*, depuis la page 330 jusqu'à 339.

Mais en recommendant ce livre, il est nécessaire de faire de petits changemens dans la démonstration de quelques vérités et d'ajouter encore une remarque.

1) M. Cousin démontre l'équation $\delta \int \beta\, dx = \int . \delta\, (\beta\, dx)$ par le moyen des différences finies, mais elle peut se démontrer plus aisement de cette maniere: puisque $\partial \int \beta\, dx = \beta\, dx$, par conséquent $\delta \partial \int \beta\, dx = \delta\, (\beta\, dx)$ à cause de $\delta \partial \int . \beta\, dx = \partial\, \delta \int . \beta dx$, on a $\partial\, \delta \int . \beta\, dx = \delta\, (\beta\, dx)$ et $\delta \int . \beta\, dx = \int . \delta\, (\beta\, dx)$.

2) De même M. Cousin démontre l'équation $\int . \beta\, d\, \delta x = \beta\, \delta x - \int d\, \beta\, \delta x$ par le moyen des différences finies, mais on peut s'en passer en suivant la même méthode.

3) Enfin il reste à remarquer que les principes exposés ci-dessus s'appliquent très convenablement à tout ce que M. Cousin a dit depuis la page 330. Par exemple le calcul des variations a les mêmes regles que le calcul différentiel; pour cela en prenant comme lui le produit xy, où x, y sont des fonctions de z et de la quantité constante a, et supposant a comme variable, vous aurez par ce qui a été dit dans mes Prin-

cipes de Géométrie transcendante, d'abord $D\beta = xDy + yDx + DxDy$ ensuite $\frac{D\beta}{Da} = x\frac{Dy}{Da} + (y + Dy)\frac{Dx}{Da}$, et enfin par le secours des XII vérités secondaires et la premiere fondamentale de la méthode des limites

$$\frac{\delta\beta}{\delta a} = \frac{x\delta y}{\delta a} + \frac{y\delta x}{\delta a} \text{ et } \delta\beta\,(= \delta xy) = x\delta y + y\delta x.$$

Je ne trouve pas nécessaire d'aller plus loin, parceque tout s'accorde parfaitement, comme le lecteur peut en juger lui même.

DE
POLYGONIS
SYMMETRICE IRREGULARIBUS CIRCULO
SIMUL
INSCRIPTIS ET CIRCUMSCRIPTIS

Auctore
NICOLAO FUSS.

Conventui exhibit. d. 19. April. 1798.

§. 1.

In Tomo X Novorum Actorum, pro anno 1792, varia et ex parte nova problemata, ad quadrilatera spectantia circulo inscripta simul et circumscripta, soluta dederam. Hic in alia polygona circulo simul inscripta et circumscripta inquirere constitui. Ex eo scilicet jam tempore postquam postremas quaestiones, in memorata commentatione tractatas, absolvissem: de quadrilatero nimirum dato circulo ita inscribendo, ut ei itidem circulus inscribi queat; nec non de distantia centrorum circuli inscripti et circumscripti determinanda, varios interdum tentavi modos eadem problemata etiam polygonis plus quam quatuor laterum resolvendi. Ast scopum attingere mihi non licuit. Crescente enim numero laterum formulae fundamentales jam tantopere fiunt perplexae, ut oleum et opera in iis extricandis frustra impenduntur. Derelicto igitur problemate generali, maximis obsepto difficultatibus, ad ea me contuli polygona, quae

Symmetrice irregularia vocare licet, utpote diametro praedita, qui per ambo centra transit et polygonum propositum in duo polygona aequalia et similia secat. Imo etiam hac limitatione stabilita, problema, ut infra videbimus, nodis non caret, quos tamen, ope congruae electionis terminorum ad ineundem calculum idoneorum, deinceps vero, aptarum substitutionum subsidio solvere licet. Incipiam igitur a pentagono; ante autem quam problema de pentagono symmetrice irregulari circulo inscripto *simul* et circumscripto aggrediar, ex datis angulis latera pentagoni cujuscunque circulo dato *sive* inscripti, *sive* circumscripti determinabo, quibus in sequentibus opus est.

Problema I.

§. 2. *Datis angulis pentagoni, investigare ejus latera, ita ut ei circulus datae magnitudinis circumscribi possit.* Tab. III. Fig. 1.

Solutio.

Sit O centrum circuli pentagono ABCDE circumscripti, radius vero AO = R, ductisque diagonalibus AC et AD erunt latera

$$AB = 2R \sin. \tfrac{1}{2} AOB = 2R \sin. ACB;$$
$$BC = 2R \sin. \tfrac{1}{2} BOC = 2R \sin. BAC;$$
$$CD = 2R \sin. \tfrac{1}{2} COD = 2R \sin. CAD;$$
$$DE = 2R \sin. \tfrac{1}{2} DOE = 2R \sin. DAE;$$
$$EA = 2R \sin. \tfrac{1}{2} EOA = 2R \sin. EDA.$$

Quodsi igitur vocentur anguli $BAC = \alpha$, $CAD = \beta$, $DAE = \gamma$, erit $\alpha + \beta + \gamma = A$; tum vero, ob quadrilatera ABCD et

A C D E circulo inscripta, erit $\alpha + \beta = \pi - C$, nec non $\beta + \gamma = \pi - D$, unde sequitur fore

$$\alpha = A - (\beta + \gamma) = A + D - \pi;$$
$$\gamma = A - (\alpha + \beta) = A + C - \pi;$$
$$\beta = \pi - C - \alpha = 2\pi - (A + C + D).$$

Est vero $A + B + C + D + E = 3\pi$, unde sequitur $\beta = B + E - \pi$; tum vero erunt anguli

$$A C B = \pi - \alpha - B = 2\pi - (A + B + D) = C + E - \pi;$$
$$E D A = \pi - \gamma - E = 2\pi - (A + C + E) = B + D - \pi;$$

quibus substitutis latera pentagoni sequenti modo prodibunt expressa:

$$A B = -2R \sin. (E + C);$$
$$B C = -2R \sin. (A + D);$$
$$C D = -2R \sin. (B + E);$$
$$D E = -2R \sin. (C + A);$$
$$E A = -2R \sin. (D + B).$$

Corollarium 1.

§. 3. Designetur perimeter pentagoni littera Γ, superficies vero littera Σ, atque ex modo traditis intelligitur fore

$$\Gamma = -2R\,[\sin.(A+D) + \sin.(B+E) + \sin.(C+A) + \sin.(D+B) + \sin.(E+C)]$$
$$\Sigma = -\tfrac{1}{2}R^2[\sin.2(A+D) + \sin.2(B+E) + \sin.2(C+A) + \sin.2(D+B) + \sin.2(E+C)]$$

quae expressiones in sequentibus opus erunt.

Corollarium 2.

§. 4. Quod diagonales attinet, unamquamque duplici modo exprimere licet. Cum enim sit verbi gratia $B E = 2R \sin. \frac{BOE}{2}$, ob $\frac{BOE}{2} = \pi = A$, erit $B E = 2R \sin. A$. Tum vero,

si latera pentagoni vocentur $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $EA = e$, etiam erit $BE = \sqrt{aa + ee - 2ae \cos. A}$. His autem binis valoribus inter se comparatis nanciscimur radium circuli circumscripti

$$R = \frac{\sqrt{aa + ee - 2ae \cos. A}}{2 \sin. A}$$

cujusmodi expressiones pro radio R etiam ex reliquis diagonalibus derivari possunt.

Corollarium 3.

§. 5. Hinc autem porro sequitur, si latera pentagoni ut data spectentur, una cum radio circuli circumscripti, angulos ipsos sequenti modo determinatum iri:

$$\cos. A = \frac{ae \pm \sqrt{aa\,ee - 4(aa + ee)R^2 + 16R^4}}{4RR}$$

$$\cos. B = \frac{ba \pm \sqrt{bb\,aa - 4(bb + aa)R^2 + 16R^4}}{4RR}$$

$$\cos. C = \frac{cb \pm \sqrt{cc\,bb - 4(cc + bb)R^2 + 16R^4}}{4RR}$$

$$\cos. D = \frac{dc \pm \sqrt{dd\,cc - 4(dd + cc)R^2 + 16R^4}}{4RR}$$

$$\cos. E = \frac{ed \pm \sqrt{ee\,dd - 4(ee + dd)R^2 + 16R^4}}{4RR}.$$

Problema II.

§. 6. *Datis angulis pentagoni, investigare ejus latera, ita ut ei circulus datae magnitudinis inscribi possit.*

Solutio.

Tab. III. Fig. 2. Sit o centrum et $oP = r$ radius circuli inscripti, et cum sit $AP = r \cot. \frac{A}{2}$ et $BP = r \cot. \frac{B}{2}$, habebimus

$$AB = r\left(\cot. \tfrac{A}{2} + \cot. \tfrac{B}{2}\right) = \frac{r \sin. \frac{A+B}{2}}{\sin. \frac{A}{2} \sin. \frac{B}{2}};$$

similique modo reperietur

$$BC = r\left(\cot. \tfrac{B}{2} + \cot. \tfrac{C}{2}\right) = \frac{r \sin \frac{B+C}{2}}{\sin. \frac{B}{2} \sin. \frac{C}{2}};$$

$$CD = r\left(\cot. \tfrac{C}{2} + \cot. \tfrac{D}{2}\right) = \frac{r \sin. \frac{C+D}{2}}{\sin. \frac{C}{2} \sin. \frac{D}{2}};$$

$$DE = r\left(\cot. \tfrac{D}{2} + \cot. \tfrac{E}{2}\right) = \frac{r \sin. \frac{D+E}{2}}{\sin. \frac{D}{2} \sin. \frac{E}{2}};$$

$$EA = r\left(\cot. \tfrac{E}{2} + \cot. \tfrac{A}{2}\right) = \frac{r \sin. \frac{E+A}{2}}{\sin. \frac{E}{2} \sin. \frac{A}{2}};$$

Problema III.

§. 7. *Datis lateribus pentagoni et uno quolibet puncto contactus, invenire radium circuli inscripti.*

Solutio.

Servatis laterum denominationibus supra §. 4. introductis, vocentur insuper segmenta

$$AP = AT = f;$$
$$BQ = BP = a - f = g;$$
$$CR = CQ = b - g = h;$$
$$DS = DR = c - h = i;$$
$$ET = ES = d - i = k;$$

ita ut habeamus

$$\cot.\frac{A}{2} = \frac{f}{r};$$

$$\cot.\frac{B}{2} = \frac{g}{r};$$

$$\cot.\frac{C}{2} = \frac{b}{r};$$

$$\cot.\frac{D}{2} = \frac{i}{r};$$

$$\cot.\frac{E}{2} = \frac{k}{r}.$$

Cum igitur sit $A + B + C + D + E = 3\pi$, fieri oportet

$$\cot.\left(\frac{A+B+C}{2} + \frac{D+E}{2}\right) = 0, \text{ atque adeo}$$

$$\cot.\left(\frac{A+B+C}{2}\right) \times \cot.\frac{D+E}{2} - 1 = 0.$$

Componendo autem colligitur

$$\cot.\frac{A+B+C}{2} = \frac{fgh-(a+b)rr}{r(fg+ab-rr)},$$

$$\cot.\frac{D+E}{2} = \frac{ik-rr}{r(i+k)} = \frac{ik-rr}{dr}$$

unde sequens emergit aequatio:

$$(a+d+h)r^4 - (adh+ik(a+h)+fg(d+h))r^2 + fghik = 0$$

atque hinc elicitur radius quaesitus

$$r = \sqrt{\frac{M}{2} \pm \sqrt{\frac{MM}{4} - N}}$$

existentibus nempe

$$M = \frac{adh+ik(a+h)+fg(d+h)}{a+d+h};$$

$$N = \frac{fghik}{a+d+h}.$$

Problema IV.

§. 8. *Si pentagoni circulo simul inscripti et circumscripti anguli fuerint cogniti, invenire relationem inter radios* R *et* r.

Solutio.

Cum sit area $\Sigma = \frac{1}{2} \Gamma r$, erit $\frac{1}{r} = \frac{\Gamma}{2\Sigma}$, ubi si loco Γ et 2Σ valores supra §. 3. inventos substituamus, nanciscemur hanc relationem:

$$\frac{R}{2r} = \frac{\sin.(A+D) + \sin.(B+E) + \sin.(C+A) + \sin.(D+B) + \sin.(E+C)}{\sin.2(A+D) + \sin.2(B+E) + \sin.2(C+A) + \sin.2(D+B) + \sin.2(E+C)}$$

quae propter ordinem in ea conspicuum notari merebatur.

Scholion.

§. 9. Si latera pentagoni, prout §. 2. sunt inventa, aequalia statuantur lateribus §. 6. exhibitis, prodibunt sequentes relationes inter radios R et r:

$$\frac{R}{r} = \frac{\cot.\frac{A}{2} + \cot.\frac{B}{2}}{-2\sin.(E+C)};$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\cot.\frac{B}{2} + \cot.\frac{C}{2}}{-2\sin.(A+D)};$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\cot.\frac{C}{2} + \cot.\frac{D}{2}}{-2\sin.(B+E)};$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\cot.\frac{D}{2} + \cot.\frac{E}{2}}{-2\sin.(C+A)};$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\cot.\frac{E}{2} + \cot.\frac{A}{2}}{-2\sin.(D+B)}.$$

quibus inter se comparatis adipiscimur relationes angulorum, prout eos assumi oportet, quo pentagonum sit simul circulo inscriptum et circumscriptum.

Problema V.

§. 10. *Invenire distantiam centrorum circuli pentagono symmetrice irregulari tam inscripti quam circumscripti.* Tab. III. Fig. 3.

Solutio.

Sit ABCDE pentagonum symmetrice irregulare, a recta AP ex angulo A in latus oppositum CD perpendiculariter demissa, in duo quadrilatera similia et aequalia partitum; ac statim perspicuum est ambo centra fore in hac recta AP sita. Sit O centrum circuli circumscripti, o vero centrum circuli inscripti, eritque $OA = R$ et $oP = op = r$. Vocetur distantia centrorum quaesita $Oo = d$, tum vero $Ao = R + d = p$ et $oQ = R - d = q$, ita ut sit $R = \frac{p+q}{2}$ et $d = \frac{p-q}{2}$, eritque $OP = r + d = R \sin. OCP$. Est vero angulus $OBA = OAB = \frac{A}{2}$, hinc $OCB = OBC = B - \frac{A}{2}$, adeoque $OCP = C - B + \frac{A}{2}$. Quoniam autem in quadrilatero ABCP est $\frac{A}{2} + B + C + P = 360°$, erit $\frac{A}{2} + C = 270° - B$, hinc $OCP = 270° - 2B$, ergo $OP = r + d = -R \cos. 2B$, unde consequimur $\cos. 2B = -\frac{r-d}{R} = \frac{q-p-2r}{p+q}$, ac proinde $\cos. B = \pm\sqrt{\frac{q-r}{p+q}}$.

Jam ex §. 2. est $AB = -2R \sin. (E + C)$, hinc ob $E + C = B + C = 270° - \frac{A}{2}$, erit $AB = 2R \cos. \frac{A}{2}$. Tum vero ex §. 6. est

$$AB = \frac{r \sin. \frac{A+B}{2}}{\sin. \frac{A}{2} \sin. \frac{B}{2}}, \text{ unde ob } r = p \sin. \frac{A}{2} \text{ habebimus}$$

$$AB = \frac{p \sin. \frac{A+B}{2}}{\sin. \frac{B}{2}} = 2R \cos. \frac{A}{2}.$$

Pervenimus igitur ad hanc aequationem:

$$2\,\mathrm{R}\sin.\tfrac{\mathrm{B}}{2}\cos\tfrac{\mathrm{A}}{2} = p\sin.\tfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$$

quam ita repraesentare licet:

$$\mathrm{R}\,(\sin.\tfrac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{2} + \sin.\tfrac{\mathrm{B}+\mathrm{A}}{2}) = p\sin.\tfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$$

ex qua, ob $p - \mathrm{R} = d$, colligitur

$$\mathrm{R}\sin.\tfrac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{2} = d\sin.\tfrac{\mathrm{B}+\mathrm{A}}{2}$$

unde evolvendo prodit

$$\mathrm{R}\,(\sin.\tfrac{\mathrm{B}}{2}\cos.\tfrac{\mathrm{A}}{2} - \cos.\tfrac{\mathrm{B}}{2}\sin.\tfrac{\mathrm{A}}{2}) = d\,(\sin.\tfrac{\mathrm{B}}{2}\cos.\tfrac{\mathrm{A}}{2} + \cos.\tfrac{\mathrm{B}}{2}\sin.\tfrac{\mathrm{A}}{2})$$

et dividendo per $\cos.\frac{\mathrm{B}}{2}\cos.\frac{\mathrm{A}}{2}$

$$\mathrm{R}\,(\mathrm{tag}.\tfrac{\mathrm{B}}{2} - \mathrm{tag}.\tfrac{\mathrm{A}}{2}) = d\,(\mathrm{tag}.\tfrac{\mathrm{B}}{2} + \mathrm{tag}.\tfrac{\mathrm{A}}{2})$$

hincque tandem intelligitur fore

$$\mathrm{tag}.\tfrac{\mathrm{B}}{2} = \tfrac{\mathrm{R}+d}{\mathrm{R}-d}\,\mathrm{tag}.\tfrac{\mathrm{A}}{2} = \tfrac{p}{q}\,\mathrm{tag}.\tfrac{\mathrm{A}}{2}.$$

Nunc autem, cum sit $\sin.\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{r}{p}$, erit

$\cos.\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{\sqrt{pp-rr}}{p}$ et $\mathrm{tag}.\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{r}{\sqrt{pp-rr}}$, ideoque

$\mathrm{tag}.\frac{\mathrm{B}}{2} = \frac{pr}{q\sqrt{pp-rr}}$, unde fit $\sin.\frac{\mathrm{B}}{2} = \frac{pr}{\sqrt{ppqq+rr(pp-qq)}}$ et

$\cos.\mathrm{B} = \frac{ppqq-rr(pp+qq)}{ppqq+rr(pp-qq)}$. Supra autem jam invenimus $\cos.\mathrm{B} = \pm\sqrt{\frac{q-r}{p+q}}$, unde sequens resultat aequatio:

$$\frac{ppqq-rr(pp+qq)}{ppqq+rr(pp-qq)} = \pm\sqrt{\frac{q-r}{p+q}}$$

quae autem ita est comparata, ut vix quicquam ad perficiendam nostram solutionem adferret, nisi attentius eam consideranti quasi sponte se praeberent valores satisfacturi $r = -p$ et $r = \frac{pq}{p+q}$; ex quibus intelligitur, aequationem ad rationalitatem perductam et ordinatam divisibilem fore

per $p + r$ et per $pq - r(p + q)$. His igitur operationibus institutis nanciscimur hanc aequationem:

$$p^3 q^3 + pp\,qqr\,(p+q) - pqrr\,(p+q)^2 - r^3 (p+q)(p-q)^2 = 0.$$

Quodsi nunc statuatur $r = \frac{pq}{s}$, aequatio nostra hanc induet formam:

$$s^3 + (p+q)\,s^2 - (p+q)^2 s - (p+q)(p-q)^2 = 0$$

quae porro, sumto radio $R = 1$, ob $p = 1 + d$, $q = 1 - d$, $p + q = 2$ et $p - q = 2d$, abit in hanc:

$$s^3 + 2s^2 - 4s - 8dd = 0,$$

unde denique adipiscimur distantiae centrorum quaesitae quadratum

$$dd = \frac{s^3 + 2s^2 - 4s}{8}.$$

Expedito hoc problemate etiam sequens facillime resolvere poterimus.

Problema VI.

§. 11. *Dato circulo pentagonum symmetrice irregulare inscribere, cui itidem circulum inscribere liceat.*

Solutio.

Ex ipso quaestionis statu perspicitur fieri debere $d^2 > 0$ et $d^2 < 1$; valores igitur, quos littera s recipere potest, hos intra limites $s > \sqrt{5} - 1$ et $s < 2$ contineantur necesse est. Prior enim conditio, $d^2 > 0$, postulat ut sit $ss + 2s > 4$, ideoque $s > \sqrt{5} - 1$. Altera conditione $d^2 < 1$, requiritur ut fiat $s^3 + 2s^2 - 4s < 8$, hoc est $(s+2)^2 (s-2) < 0$, ergo $s < 2$. Tribuendo igitur quantitati s valorem determinatum quemcunque, intra hos limites contentum, habebimus distantiam

centrorum d, hincque porro p, q et r, tum vero innotescit sin. $\frac{A}{2} = \frac{r}{p}$ et tag. $\frac{B}{2} = \frac{p}{q}$ tag. $\frac{A}{2}$. Inventis autem angulis A et B etiam reliqui innotescunt. Ex angulis autem, secundum §. 2. vel §. 6, ipsa latera derivantur, quorum ope pentagonum construi poterit proposito problemati satisfaciens.

Corollarium.

§. 12. Si distantia centrorum fuerit nulla, evidens est pentagonum fore regulare: videamus quid ex nostra solutione consequamur. Sit igitur $d = 0$, erit $s = \sqrt{5} - 1$, $p = 1$, $q = 1$ et $r = \frac{1}{\sqrt{5}-1}$, hinc sin. $\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, ergo $\frac{A}{2} = 54°$, unde fit tag. $\frac{B}{2} =$ tg. $54°$, ideoque $\frac{B}{2} = 54°$, denique $C = 270° - \frac{A}{2} - B = 108°$. Pentagonum igitur est regulare, uti requiritur.

Exemplum.

§. 13. Sumatur $s = \frac{3}{2}$, erit $dd = \frac{15}{64}$, hinc $d = 0,4841$, unde $p = 1,4841$ et $q = 0,5159$, ergo $r = 0,5104$, ita ut sit sin. $\frac{A}{2} = \frac{0,5104}{1,4841}$, ideoque $\frac{A}{2} = 20°, 7'$ et $A = 40°, 14'$. Tum vero erit tag. $\frac{B}{2} = \frac{1,4841}{0,5159}$ tag. $\frac{A}{2}$, unde $\frac{B}{2} = 46°, 30'$, ergo $B = 93°, 0'$, hinc $C = 156°, 53'$, quibus inventis latera polygoni problemati satisfacientis ita determinantur:

$AB = AE = 1,8780;$
$BC = ED = 0,5886;$
$CD = \ldots 0,2090;$

existente radio circuli, cui inscribendum est polygonum, $R = 1$.

Scholion 1.

§. 14. Cum aequationi nostrae generali (§. 10.) satisfacerint valores $r = -p$ et $r = \frac{pq}{p+q}$, iis solutiones particu-

lares problematis propositi contineantur necesse est, quae quomodo sint explicandae, breviter hic ostendisse juvabit, ne, quae tantummodo respectu propositi problematis *incongrue vera* sunt, pro *falsis* habeantur. Prior valor $r = -p$ dat $\sin.\frac{A}{2} = -1$, $\cos. B = -1$, ergo $\frac{A}{2} = -90°$, $A = -180°$, $B = E = +180°$ et $C = D = +180°$, unde omnia quinque latera in nihilum abeunt et puncta A, B, C, D, E in unicum A coalescunt, in quod, ob $AP = p + r = 0$, etiam punctum contactus P incidit, radii autem R et r hoc casu manent indeterminati. Et profecto, si pentagonum in unicum punctum redigitur, tum quilibet circulus per hoc punctum transiens ut circumscriptus et quilibet alius ut inscriptus spectari potest. Quod alterum valorem $r = \frac{pq}{p+q}$ attinet, cum ex eo oriatur $\sin.\frac{A}{2} = \frac{q}{p+q}$ et $\cos. B = \pm\frac{q}{p+q}$, erit vel $B = E = 90° - \frac{A}{2}$, vel $B = E = 90° + \frac{A}{2}$. Prior casus dat $C = D = 180°$, ergo

$$AB = AE = 2R \cos.\tfrac{A}{2};$$

$$BC = DE = 2R \sin. A;$$

$$CD = -2R \sin. A;$$

diagonales vero $BD = 2R, \sin. C = 0$ et $CE = 2R \sin. D = 0$. Punca igitur B et D, item C et E, in unum coalescunt, latera BC, DE et DC in unum confunduntur et loco pentagoni oritur triangulum isosceles. Altero casu $B = E = 90° + \frac{A}{2}$ erit $C = D = 180° - A$, unde latera

$$AB = AE = 2R \cos.\tfrac{A}{2};$$

$$BC = DE = 2R \sin. 180° = 0;$$

$$CD = 2R \sin. A.$$

Tab. III. Fig. 4. Hic igitur puncta B et C in unum coalescunt, itemque D et E, et polygonum abit in id ipsum triangulum quod casus praecedens habuit, quippe in quo utique est $r = \frac{pq}{p+q}$. Nam

$$\text{angulus } BoQ = \frac{BAo + ABo}{2};$$

$$\text{angulus } oBQ = \frac{PBQ + PBo}{2};$$

at $BAo = PBQ$ et $ABo = PBo$, ergo $BoQ = oBQ$, ideoque $BQ = oQ$. Cum igitur sit

$$AQ : BQ = oA : oR$$

erit $p + q : q = p : r$, unde fit $r = \frac{pq}{p+q}$.

Scholion 2.

§. 15. Simili modo quo distantiam centrorum circuli eidem pentagono symmetrice irregulari inscripti et circumscripti in problemate 5to determinavimus, nunc quoque problema pro Hexagono resolvere licet; eo tantum discrimine, quod aequatio finalis inter p, q et r hoc casu facilius ad commodiorem formam reduci se patitur, neque ad hoc tam taediosa divisione opus sit. Statim igitur istud problema aggrediar, praetermissus quaestionibus de Hexagono circulo sive inscripto sive circumscripto, quippe quas, mutatis mutandis, sine ullo negotio, ad ductum quatuor priorum problematum, absolvere licet. Unicam interea, in quam incidi, praeterire non possum proprietatem, novam, ni fallor, et egregiam Hexagoni circulo inscripti, quam sequenti Theoremate complectar.

Theorema.

§. 16. *In qnocunque hexagono circulo inscripto, si duo quaelibet latera opposita ducantur, utrumque in productum sinuum binorum angulorum ad latus oppositum sitorum, differentia binorum horum productorum est eadem pro quolibet laterum oppositorum pari, aequatur scilicet differentiae productorum ex ternis lateribus alternis divisae per quadratum circuli circumscripti.*

Demonstratio.

Cum, ducta diagonali AD, in quadrilatero ABCD sit AC.BD = AB.CD + BC.AD, in quadrilatero ADEF vero AE.DF = AF.DE + EF.AD, habebimus Tab. III. Fig. 5.

$$AD = \frac{AC.BD - AB.CD}{BC} = \frac{AE.DF - AF.DE}{EF}$$

unde fit

$$EF.AC.BD - BC.AE.DF = AB.CD.EF - BC.DE.AF.$$

Est vero

$$AC = 2R \sin. B, \quad AE = 2R \sin. F$$
$$BD = 2R \sin. C; \quad DF = 2R \sin. E$$

quibus substitutis enascitur

$$EF \sin. B \sin. C - BC \sin. E \sin. F = \frac{AB.CD.EF - BC.DE.AF}{4RR}.$$

Eodemque modo demonstrare licet fore

$$AB \sin. D \sin. E - DE \sin. A \sin. B = \frac{AB.CD.EF - BC.DE.AF}{4RR}$$
$$CD \sin. A \sin. F - AF \sin. D \sin. C = \frac{AB.CD.EF - BC.DE.AF}{4RR}$$

Q. E. D.

Problema VII.

§. 17. *Invenire distantiam centrorum circuli Hexagono symmetrice irregulari tam inscripti quam circumscripti.* Tab. III. Fig. 6.

Solutio.

Sit ABCDEF hexagonum symmetrice irregulare, a recta AD, per angulos oppositos A et D ducta, in duo quadrilatera similia et aequalia partitum. Sit O centrum circuli circumscripti et *o* centrum circuli inscripti, ita ut $AO = R$, $op = r$. Sit ut supra $Oo = d$, $Ao = d$, $Ao = R + d = p$, $Do = R - d = q$, eritque $\sin. \frac{A}{2} = \frac{r}{p}$, $\sin. \frac{D}{2} = \frac{r}{q}$, hincque $\text{tag.} \frac{A}{2} = \frac{r}{\sqrt{pp - rr}}$ et $\text{tag.} \frac{D}{2} = \frac{r}{\sqrt{qq - rr}}$, et ob $B + \frac{D}{2} = \pi$, $\text{tag. } B = -\text{tag.} \frac{D}{2} = -\frac{r}{\sqrt{qq - rr}}$.

Jam vero est, ut supra §. 6. pro pentagono invenimus,

$$AB = \frac{r \sin. \frac{A+B}{2}}{\sin. \frac{A}{2} \sin. \frac{B}{2}} = \frac{p \sin. \frac{A+B}{2}}{\sin. \frac{B}{2}};$$

tum vero quoque $AB = 2R \cos. \frac{A}{2}$, unde fit

$$2R \sin. \frac{B}{2} \cos. \frac{A}{2} = p \sin. \frac{A+B}{2}$$

ex qua aequatione conficitur, ut supra §. 10.,

$$\text{tag.} \frac{B}{2} = \frac{R+d}{R-d} \text{tag.} \frac{A}{2} = \frac{p}{q} \text{tag.} \frac{A}{2}, \text{ ideoque}$$

$$\text{tag.} \frac{B}{2} = \frac{pr}{q\sqrt{pp-rr}}, \text{ ex quo valore fit}$$

$$\text{tag. } B = \frac{2pqr\sqrt{pp-rr}}{ppqq-rr(pp+qq)} = -\frac{r}{\sqrt{qq-rr}}$$

Hinc, sublatis irrationalitate et fractionibus, aequatio exoritur sequens:

$$3p^4q^4 - 2ppqqrr(pp+qq) = r^4(pp-qq)^2$$

quae solutionem nostri problematis complectitur.

Statuatur nunc, ut supra, $r = \frac{pq}{s}$, et nostra aequatio in hanc transfunditur:

$$3s^4 - 2ss(pp+qq) = (pp-qq)^2.$$

Deinde ponamus, ut ante fecimus, $R = 1$, ita ut $p = 1+d$, $q = 1-d$, $pp+qq = 2+2dd$ et $pp-qq = 4d$, eritque aequatio

$$3s^4 - 4ss(1+dd) = 16dd$$

ex qua elicitur quadratum distantiae centorum quaesitae

$$dd = \frac{ss(3ss-4)}{4(ss+4)}$$

hacque inventa solutionem sequentis problematis in promtu habemus.

Problema VIII.

§. 18. *Datis circulo hexagonum symmetrice irregulare inscribere, cui itidem circulum inscribere liceat.*

Solutio.

Sumatur s pro lubitu, dummodo, ne fiat $dd < 0$, vel $dd > 1$, ejus valor intra limites $s > \sqrt{\frac{4}{3}}$ et $s < 2$ contineatur, et ex praecedente solutione habebitur distantia centrorum d, unde porro conficitur $p = 1 + d$, $q = 1 - d$, et $r = \frac{pq}{s}$, quibus inventis innotescit sin. $\frac{A}{2} = \frac{r}{p}$ et sin. $\frac{D}{2} = \frac{r}{q}$. Ex cognitis autem angulis $\frac{A}{2}$ et $\frac{D}{2}$, deducuntur anguli $B = 180° - \frac{D}{2}$ et $C = 180° - \frac{A}{2}$, unde denique etiam latera determinari poterunt.

Exemplum 1.

§. 19. Sit $s = \frac{2}{\sqrt{3}}$, erit $d = 0$, $p = 1$, $q = 1$, $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$, hinc sin. $\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et sin. $\frac{D}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ergo $\frac{A}{2} = 60°$, $B = 120°$, $C = 120°$, ideoque Hexagonum regulare.

Exemplum 2.

§. 20. Sit $s = \frac{4}{3}$, erit $dd = \frac{4}{39} = 0,10256$ et $d = 0,32026$, $p = 1,32026$, $q = 0,67974$, hinc $r = 0,67308$, unde $\frac{A}{2} = 30°, 39'$ atque $\frac{D}{2} = 81°, 58'$, hinc $B = F = 98°, 2'$; $C = E = 149°, 21'$, unde denique latera hexagoni deducuntur, scilicet:

$AB = AF = 1,72059$;
$BC = FE = 0,76913$;
$CD = ED = 0,27950$;

existente radio circuli, cui hexagonum inscribitur, $R = 1$.

Problema IX.

§. 21. *Dato circulo heptagonum symmetrice irregulare inscribere, cui circulum inscribere liceat.*

Solutio.

Tab. III. Fig. 7. Sit, ut hactenus, O centrum et $AO = R$ radius circuli heptagono circumscripti, o centrum et $oP = r$ radius circuli inscripti, distantia centrorum $Oo = d$, tum vero $Ao = R + d = p$, $oQ = R - d = q$, ita ut sit $R = \frac{p+q}{2}$ et $d = \frac{p-q}{2}$. Jam notetur esse angulos

$$OBA = OAB = \tfrac{A}{2};$$
$$OCB = OBC = B - \tfrac{A}{2};$$
$$ODC = OCD = C - B + \tfrac{A}{2};$$
$$ODP = D - C + B - \tfrac{A}{2};$$

At vero est $\frac{A}{2} + B + C + D = \frac{5\pi}{2}$, ideoque $B + D = \frac{5\pi}{2} - C - \frac{A}{2}$, et $ODP = \frac{5\pi}{2} - A - 2C$, ergo sin. $ODP =$ cos. $(A + 2C)$. Cum igitur sit sin. $ODP = \frac{OP}{OD} = \frac{d+r}{R}$, habebimus

$$\text{cos. } (A + 2C) = \frac{d+r}{R} = \frac{2r+p-q}{p+q}$$

ex quo sequentes valores facile deducuntur:

$$\text{sin. } (\tfrac{A}{2} + C) = \sqrt{\tfrac{q-r}{p+q}};$$
$$\text{cos. } (\tfrac{A}{2} + C) = \sqrt{\tfrac{p+r}{p+q}};$$

tum vero quoque erit

$$\text{sin. } (B + D) = \text{cos. } (\tfrac{A}{2} + C) = \sqrt{\tfrac{p+r}{p+q}}.$$

Jam notetur esse tag. $\frac{D}{2} = \frac{oP}{DP}$. At quoniam

$DP = DO \cos. ODP = R \sin. (A + 2C)$, sive etiam

$DP = 2R \sin. (\frac{A}{2} + C) \cos. (\frac{A}{2} + C) = \frac{2R\sqrt{(q-r)}\,(p+r)}{p+q}$

sive denique $DP = \sqrt{(q-r)}\,(p-r)$, erit

$$\text{tag.}\frac{D}{2} = \frac{r}{\sqrt{(p-r)(p+r)}},$$

ex quo porro valore conficitur

$$\sin. D = \frac{2r\sqrt{(q-r)}\,(p+r)}{pq-r(p-q)},$$

$$\cos. D = \frac{pq-r(p-q)-2rr}{pq-r(p-q)}.$$

Tandem eodem modo, quo supra §. 10. usi sumus, demonstrabitur fore

$$\cos. B = \frac{ppqq-rr(pp+qq)}{ppqq+rr(pp-qq)},$$

$$\sin. B = \frac{2pqr\sqrt{pp-rr}}{ppqq+rr(pp-qq)}$$

unde sequens componitur expressio:

$$\sin. (B+D) = \frac{\left\{\begin{array}{l}+2pqr\sqrt{pp-rr}\,(pq-r(p-q)-2rr)\\+(ppqq-rr(pp+qq))\,2r\sqrt{(q-r)}\,(p+r)\end{array}\right\}}{(pq-r(p-q))\,(ppqq+rr(pp-qq))}.$$

Ad hanc igitur pervenimus aequationem:

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}+(pq-r(p-q)-2rr)\cdot 2pqr\sqrt{pp-rr}\\+(ppqq-rr(pp+qq))\cdot 2r\sqrt{(q-r)}\,(p+r)\end{array}\right\}}{(pq-r(p-q))\,(ppqq+rr(pp-qq))} = \pm\sqrt{\frac{p+r}{p+q}}$$

quae per $\sqrt{p+r}$ divisa, sublatis fractionibus sequenti modo se habebit:

$$\left\{\begin{array}{l}(pq-r(p-q)-2rr)\cdot 2pqr\sqrt{(p-r)\,(p+q)}\\+(ppqq-rr(pp+qq))\cdot 2r\sqrt{(q-r)\,(p+q)}\end{array}\right\} = \pm(pq-r(p-q))(ppqq+rr(pp-qq)).$$

Ponatur, ut in superioribus fecimus, $r = \frac{pq}{s}$ et facta divisione per $\frac{p^3q^3}{s^3}$ aequatio nostra in hanc concinniorem formam redigitur:

$$\left\{\begin{matrix}\pm(ss-s(p-q)-2pq)\frac{\sqrt{p(p+q)(s-q)}}{s} \\ \pm(ss-pp-qq)\frac{\sqrt{q(p+q)(s-p)}}{s}\end{matrix}\right\} = \pm\left(\frac{s-p+q}{2}\right)(ss+pp-qq).$$

Sumto igitur radio $R = 1$, ob $p = 1+d$, $q = 1-d$, $pq = 1-dd$, $p-q = 2d$, $p+q = 2$, $pp-qq = 4d$ et $pp+qq = 2+2dd$, nanciscimur

$$\left\{\begin{matrix}\pm(ss-2ds-2(1-dd))\frac{\sqrt{2(1+d)(s-1+d)}}{s} \\ \pm(ss-2(1+dd))\frac{\sqrt{2(1-d)(s-1-d)}}{s}\end{matrix}\right\} = \pm\left(\frac{s}{2}-d\right)(ss+4d)$$

qua igitur aequatione non parum perplexa solutio nostri problematis continetur.

Exemplum 1.

§. 22. Sit $d = 0$, et aequatio nostra fit $4(ss-2)\sqrt{\frac{2s-2}{s}} = \pm s^3$, cui satisfacit propemodum valor $s = \frac{10}{9}$, unde per notas approximationis regulas facile deducitur valor vero proprior $s = 1,109916$, ex quo obtinetur $r = 0,900969$, hinc sin. $\frac{A}{2} = r = 0,900969$, et (ob tg. $\frac{D}{2} = \frac{r}{\sqrt{(q-r)(p+r)}}$) sin. $\frac{D}{2} = \frac{r}{\sqrt{pq-(p-q)r}} = r = 0,900969$, tum vero cos. $B = 1-2rr = -0,623490$, unde colligitur $\frac{A}{2} = 64^\circ, 17', 8\frac{1}{2}''$; $\frac{D}{2} = 64^\circ, 17', 8\frac{1}{2}''$, $B = 128^\circ, 34', 17''$ hincque etiam $C = 128^\circ, 34', 17''$, ergo heptagonum regulare, ut positio $d = 0$ requirebat.

Exemplum 2.

§. 23. Statuatur $s = 4d$, eritque aequatio:

$$(5dd-1)\sqrt{\tfrac{2(1+d)(5d-1)}{d}} + (7dd-1)\sqrt{\tfrac{2(1-d)(3d-1)}{d}} = \pm 4dd(4d+1),$$

cui proxime satisfit, ponendo $d = \frac{1}{3}$, ex quo valore approximando elicitur valor vero proprior $d = 0,3339$, unde fit, $p = 1,3339$, $q = 0,6661$ et $r = 0,6652$; tum vero $\frac{A}{2} = 29°, 55'$; $\frac{D}{2} = 86°, 25'$; $\frac{A}{2} + C = 181°, 13'$, ideoque $A = 59°, 50'$, $D = 172°, 50'$, $C = 151°, 18'$ et $B = 95°, 57'$. Hinc autem ipsa latera heptagoni evadunt

$$\begin{aligned} AB = AG &= 1,7335 \\ BC = GF &= 0,8124 \\ CD = FE &= 0,1650 \\ DE \;\ldots\; &= 0,0849. \end{aligned}$$

Problema X.

§. 24. *Dato circulo octogonum symmetrice irregulare inscribere, cui circulus inscribi possit.*

Solutio.

Sint, ut hactenus, O et o centra circulorum circumscripti et inscripti, eorum distantia $Oo = d$, radii $AO = EO = R = 1$, $op = oq = r$, tum vero $Ao = 1 + d = p$, $Eo = 1 - d = q$, ubi pro casu, ubi centrum o, ut in figura 8va evenit, supra centrum O cadit, distantia d fiet negativa, eritque $\sin.\frac{A}{2} = \frac{r}{p}$ et $\sin.\frac{E}{2} = \frac{r}{q}$, hinc $\text{tag.}\frac{A}{2} = \frac{r}{\sqrt{pp-rr}}$ et $\text{tag.}\frac{E}{2} = \frac{r}{\sqrt{qq-rr}}$. Supra autem (§. 10) jam demonstravimus esse $\text{tag.}\frac{B}{2} = \frac{p}{q}$, $\text{tag.}\frac{A}{2} = \frac{p}{q\sqrt{pp-rr}}$. Eo-

Tab. III. Fig. 8.

demque modo demonstrari potest fore tag. $\frac{D}{2} = \frac{q}{p}$. tag. $\frac{E}{2} = \frac{qr}{p\sqrt{qq-rr}}$. Cum enim sit latus

$$DE = 2\cos.\frac{E}{2} = \frac{r\sin.\frac{D+E}{2}}{\sin.\frac{D}{2}\sin.\frac{E}{2}} = \frac{q\sin.\frac{D+E}{2}}{\sin.\frac{D}{2}},$$ erit

$2\sin.\frac{D}{2}\cos.\frac{E}{2} = q\sin.\frac{D+E}{2}$, sive

$\sin.\frac{D+E}{2} + \sin.\frac{D-E}{2} = 9\sin.\frac{D+E}{2}$, hincque fit

$\sin.\frac{D-E}{2} = -d\sin.\frac{D+E}{2}$, unde evolvendo nanciscimur

$\sin.\frac{D}{2}\cos.\frac{E}{2} - \cos.\frac{D}{2}\sin.\frac{E}{2} = -d\sin.\frac{D}{2}\cos.\frac{E}{2} - d\cos.\frac{D}{2}\sin.\frac{E}{2}$

et devidendo per $\cos.\frac{D}{2}\cos.\frac{E}{2}$

$\text{tag.}\frac{D}{2} - \text{tag.}\frac{E}{2} = -d\,\text{tag.}\frac{D}{2} - d\,\text{tag.}\frac{E}{2}$, hoc est

$(1+d)\,\text{tag.}\frac{D}{2} = (1-d)\,\text{tag.}\frac{E}{2}$, unde fit

$\text{tag.}\frac{D}{2} = \frac{q}{p}\,\text{tag.}\frac{E}{2}$.

Ex his autem valoribus:

$\text{tag.}\frac{A}{2} = \frac{pr}{q\sqrt{pp-rr}}$ et $\text{tag.}\frac{D}{2} = \frac{qr}{p\sqrt{qq-rr}}$ conficitur

$$\text{tag.}\frac{B+D}{2} = \frac{pp\,r\sqrt{qq-rr} + qq\,r\sqrt{pp-rr}}{pq\sqrt{pp-rr}.\sqrt{qq-rr} - pqrr}$$

Quoniam autem in omni octogono circulo inscripto est summa angulorum alternorum $B+D+F+H = 540°$, nostro casu erit $2B+2D = 540°$, ideoque $\frac{B+D}{2} = 135°$ et $\text{tag.}\frac{B+D}{2} = -1$, ita ut hanc habeamus aequationem resolvendam:

$$ppr\sqrt{qq-rr} + qqr\sqrt{pp-rr} = pqrr - \sqrt{(pp-rr)(qq-rr)}.$$

Ponamus jam, ut antehac fecimus, $r = \frac{pq}{s}$ et aequatio nostra reducetur ad hanc formam:

$$p\sqrt{ss-pp} + q\sqrt{ss-qq} = pq - \sqrt{(ss-pp)\,(ss-qq)},$$

quam etiam ita repraesentare licet:

$$(q + \sqrt{ss - pp})\ (p + \sqrt{ss - qq}) = 2pq.$$

Cum autem fit $\frac{p}{s} = \frac{r}{q} = \sin.\frac{E}{2}$, nec non $\frac{q}{s} = \frac{r}{p} = \sin.\frac{A}{2}$, erit $\sqrt{ss - pp} = s\cos.\frac{E}{2}$ et $\sqrt{ss - qq} = s\cos.\frac{A}{2}$, quibus substitutis prodit

$$(\sin.\tfrac{A}{2} + \cos.\tfrac{E}{2})\ (\sin.\tfrac{E}{2} + \cos.\tfrac{A}{2}) = 2\sin.\tfrac{A}{2}\sin.\tfrac{E}{2}$$

et facta evolutione ad hanc perducimur aequationem perquam simplicem:

$$\cos.\tfrac{A+E}{2} + \tfrac{1}{2}\sin.A + \tfrac{1}{2}\sin.E = 0$$

quam tamen ad formam adhuc simpliciorem reducere licet, ponendo $\frac{A+E}{2} = \mu$ et $\frac{A-E}{2} = \nu$; tum enim fit $A = \mu + \nu$ et $E = \mu - \nu$, ideoque

$$\cos.\mu + \tfrac{1}{2}\sin.(\mu+\nu) + \tfrac{1}{2}\sin.(\mu-\nu) = 0, \text{ sive}$$

$$\cos.\nu = -\cot.\mu.$$

Solutio igitur nostri problematis ita se habet: Sumatur pro lubitu angulus ν, habebitur quoque μ, hinc $A = \mu + \nu$ et $E = \mu - \nu$; tum vero, ob $p + q = 2 = s\,(\sin.\frac{A}{2} + \sin.\frac{E}{2})$ erit

$$s = \frac{2}{\sin.\frac{A}{2} + \sin.\frac{E}{2}}, \text{ ac proinde } p = \frac{2\sin.\frac{E}{2}}{\sin.\frac{A}{2} + \sin.\frac{E}{2}} \text{ et}$$

$$q = \frac{2\sin.\frac{A}{2}}{\sin.\frac{A}{2} + \sin.\frac{E}{2}}, \text{ hincque } d = \frac{p-q}{2} = \frac{\sin.\frac{E}{2} - \sin.\frac{A}{2}}{\sin.\frac{E}{2} + \sin.\frac{A}{2}} \text{ et}$$

$$r = p\sin.\tfrac{A}{2} = \frac{2\sin.\frac{A}{2}\sin.\frac{E}{2}}{\sin.\frac{A}{2} + \sin.\frac{E}{2}}. \text{ Porro autem est}$$

$$\text{tag.}\frac{B}{2} = \frac{p}{q}\,\text{tag.}\frac{A}{2} = \frac{\text{sin.}\frac{E}{2}}{\text{cos.}\frac{A}{2}} \text{ et } \text{tag.}\frac{D}{2} = \frac{q}{p}\,\text{tag.}\frac{E}{2} = \frac{\text{sin.}\frac{A}{2}}{\text{cos.}\frac{E}{2}}.$$

Inventis autem hoc modo angulis A, B, D, E, ob $A + C + E + G = 540°$, sive $A + 2C + E = 540°$, habebitur quoque $C = 270° - \frac{A+E}{2}$ et denique latera:

$$AB = AH = 2\,\text{cos.}\frac{A}{2}$$
$$BC = HG = 2\,\text{cos.}\left(B - \frac{A}{2}\right)$$
$$CD = GF = 2\,\text{cos.}\left(D - \frac{E}{2}\right)$$
$$DE = FE = 2\,\text{cos.}\frac{E}{2}.$$

Exemplum 1.

§. 25. Sit angulus $\nu = 0$, erit $\mu = 135°$, hinc $A = 135°$ et $E = 135°$; tum vero erit $s = \frac{2}{2\,\text{sin.}\,67\frac{1}{2}°} = \text{cosec.}\,67\frac{1}{2}°$ $= 1,08239$, deinde $p = 1$, $q = 1$, ergo $d = 0$ et $r = 0,92388$, porro $\text{tag.}\frac{B}{2} = \text{tag.}\frac{A}{2}$ et $\text{tag.}\frac{D}{2} = \text{tag.}\frac{E}{2}$, hinc $B = 135°$ et $D = 135°$ et denique $C = 135°$, ideoque Octogonum erit regulare.

Exemplum 2.

§. 26. Sit $\nu = 60°$, eritque $\mu = 116°, 34'$, ergo $A = 176°, 34'$ et $E = 56°, 34'$; $s = 1,35742$, $p = 0,64319$, $q = 1,35681$, ergo $d = -0,35681$ et $r = 0,64290$; ubi signum negativum, distantiae centrorum d praefixum, indicat centrum o a cento O versus A esse capiendum. Tum vero erit $\frac{B}{2} = 86°, 23'$ et $\frac{D}{2} = 48°, 37'$, ergo $B = 172°, 46'$ et $D = 97°, 14'$,

hinc $C = 153°, 26'$. Ipsa denique latera Octogoni quaesiti erunt:

$$AB = AH = 0,0599$$
$$BC = HG = 0,1923$$
$$CD = GF = 0,7184$$
$$DE = FE = 1,7612.$$

§. 27. Ulterius has disquisitiones non prosequor: ex solutionibus enim hic successive pro pentagono, hexagono, heptagono et octogono traditis jam abunde perspicere licet, quemadmodum pro aliis polygonis symmetrice irregularibus calculus sit instituendus, ut ad aequationem perveniatur distantiam quaesitam centrorum d, una cum alia quantitate s intra datos limites pro lubitu accipienda, complectentem; unde, concessa aequationum algebraicarum resolutione, distantia ipsa d, ejusque ope omnia reliqua elementa, ita determinari possint, ut polygono, circulo dato inscripto, itidem circulus inscribi queat.

DE EVOLUTIONE SECTIONUM CYLINDRI.

Auctore

F. T. SCHUBERT.

Conventui exhibit. die 25. Octobr. 1798.

§. 1.

Commentationes Academiae Berolinensis ad annos 1790 et 1791 pervolventi sese mihi obtulit animadversio celeberrimi Burja, ubi dicit, *sectionis cylindri obliquae evolutionem in planum*, notatu quamvis dignam examini nondum esse objectam *). Quod quidem non parum singulare cum mihi videretur, examine instituto inveni, curvam evolutione ista oriundam proprietatibus quibusdam gaudere notatu haud indignis. Prius autem quam hoc negotium aggrediamur, non e re erit, Theorema illud satis quidem cognitum breviter demonstrare, omnem Cylindri recti (qualem primo contemblabimur) sectionem esse *ellipsin*, quia ellipsis hujus elementis in sequentibus opus erit.

*) *pag.* 261. „Cette courbe mériteroit que quelque Géomètre l'examinât avec soin.“

§. 2. Sit itaque A L H G cylindrus rectus, cujus axis C T, radius basis C A $= a$, sitque F Y F′ plani cujuspiam intersectio cum cylindro, quod ab axe in puncto E secatur, e quo puncto ducta E e normali ad planum F F Y, per lineam E e axemque cylindri ponatur planum A L F′ F, quod igitur erit normale et planum F Y F′. Deinde per quodvis curvae F Y F′ punctum Y ducatur Y X ad rectam F F′ normalis, quae non minus ad planum A L F′ F normalis erit, quia F F′ est intersectio hujus plani cum plano normali F F′ Y. Ducta itaque X K ad axem perpendiculari planum Y X K normale erit cum ad planum A L F F, quia per Y X transit, tum ad axem, quoniam axis in plano A L F intersectioni ejus cum plano Y X K normaliter insistit. Est itaque planum Y X K basi parallelum, unde ejus cum cylindro intersectio H Y G erit circulus radii a, et angulus Y X K erit rectus, unde per circuli naturam est $YX^2 = a^2 - KX^2$. Angulum F X G $=$ F′ X H, quo situs plani secantis F F′ Y determinatur, appellemus α. Tum vero aequatione ad curvam F Y F′ expressa per coordinatas orthogonales E X $= x$, X Y $= y$, est K X $= x \cos. \alpha$, unde nanciscimur aequationem

Tab. I. Fig. 6.

$$y^2 = a^2 - x^2 \cos.^2 \alpha,$$

quae est ellipsis definitio, cujus centrum in E, cujusque axis transversus est F′F. Positis igitur axibus transverso et conjugato, $2p$ et $2q$, ut aequatio ad ellipsin sit

$$y^2 = q^2 - \frac{q^2}{p^2} x^2,$$

sequitur $\frac{q}{p} = \cos. \alpha$, et $q = a$, $p = a \sec. \alpha$, ideoque semidistantia focorum $\sqrt{(p^2 - q^2)} = a \operatorname{tg}. \alpha$, et excentricitas

$$\frac{\sqrt{(p^2 - q^2)}}{p} = \frac{\operatorname{tg}. \alpha}{\sec. \alpha} = \sin. \alpha.$$

§. 3. Exploremus jam curvam quae oritur, quando haec ellipsis cum integra cylindri superficie evolvitur in planum cylindrum tangens ideoque axi parallelum. Primum quidem notasse juvabit, eandem curvam productum iri, sive planum evolutionis ponatur per rectam L F′ per verticem ellipsis transeuntem, sive per aliud quodpiam cylindri *latus*, h. e. rectam in ejus superficie axi parallelam, e. gr. Y Z. Evoluto scilicet arcu elliptico F Y in planum per Y Z ad K Y normale, curva ita genita minime mutabitur, plano hoc circumvoluto, donec cum plano per L H ad HK normali coincidat, quia curva semper cum hoc plano progredietur. Dissecto itaque cylindro per latus A G, elementa ellipsis F *f* ab initio in planum per rectam *f g* lineae F G infinite propinquam, deinde gradatim in alia atque alia plana evolvitur, quae evolutio quousque lubet continuari potest sine ulla mutatione arcus F *f* vel F Y jam evoluti. Hinc simul patet, evolutam fore curvam in infinitum sese extendentem seu innumeris ramis gaudentem, quoniam una revolutione cylindri peracta, eum ulterius circumvolvere continuo licet. Supponamus itaque, ellipsin in planum per L H seu per verticem ellipsis F′ cylindrum tangens esse evolutam, sitque A M B haec ellipsis, cujus axis transversus A B, inclinatio ad basin A B I $= \alpha$.

§. 4. Per verticem ellipsis B ducto plano B N I ad axem, ideoque et ad planum evolutionis per L B normali, evolutio circuli B N I, cujus centrum in O, gignet rectam, quam pro axe abscissarum assumere convenit. Per quodvis itaque punctum M ellipsis ducto latere cylindri M N, quod cum sit axi parallelum ideoque ad circulum B N normale, tanquam ordinata orthogonalis accipi potest, aequatio erit quaerenda ad curvam evolutione genitam inter coordinatas B N $= x$ et N M $= y$. Quem in finem ducamus e punctis M et N, normales M P, N Q, ad planum A L B, quae igitur erunt parallelae, atque puncta P, Q, erunt in rectis A B, I B, h. e. intersectionibus planorum A M B, I N B, cum plano A L B ad utrumque normali. Quare cum lineae M P, N Q,

sint etiam aequales, distantia nempe lateris M N a plano parallelo A L B, quadrilaterum M P Q N est parallelogrammum, unde sequitur P Q = M N = y. Cum praeterea sit N Q ad B I perpendicularis, habemus

$$O Q = O N \cos. I O N = - a \cos. B O N = - a \cos. \frac{x}{a},$$

$$\text{et } B Q = a (1 - \cos. \frac{x}{a}).$$

Aequatio quaesita est igitur P Q = B Q tang. α, h. e.

$$y = a \text{ tg. } \alpha (1 - \cos. \frac{x}{a}).$$

§. 5. Curvam evolutione hac oriundam et e circulo exemtam ob oculos proponit *Figura septima*, ubi est B L latus illud cylindri, per quod planum evolutionis transit, circulus B I in rectam B I abit, puncta M, N, A, I, (*Fig.* 6.) punctis M, N, A, I, (*Fig.* 7.) respondent, atque posito B N = x, N M = y, aequatio fundamentalis est

$$y = a \text{ tg. } \alpha (1 - \cos. \frac{x}{a}).$$

Evanescit igitur y casu $x = 0$, $x = 2 a \pi = BB'$, $x = 4 a \pi = BB''$, et generatim casu $\frac{x}{a} = 2 n \pi$, denotante nempe π numerum 3, 14. . . . et n numerum quemcunque integrum. Cum praeterea cos. $\frac{x}{a}$ fieri nequeat unitate major, y nunquam induet valorem negativum, *maximus* autem ejus valor erit I A = I′ A′ = 2 a tg. α, qui respondet valoribus abscissarum $x = a\pi = BI$, $x = 3 a \pi = BI'$, et in genere $\frac{x}{a} = (2 n + 1) \pi$.

§. 6. Cuivis abscissae x unicus ordinatae valor competit; singulis autem ordinatis y innumerae respondent abscissae x, tum positivae tum negativae, ob cos. $\frac{x}{a}$ = cos. $(2 n \pi \pm \frac{x}{a})$ et cos. $(\frac{\pm x}{a})$ = cos. $(\frac{-x}{a})$. Curva igitur ad utramque partem in

infinitum se extendit, innumerosque habet ramos aequales ac similes, qui omnes intra parallelas B B′, A A′, comprehensi sunt, easque in punctis A, A′, B, B′ etc. tangunt. Prima nempe cylindri revolutione peracta (§. 3.) ramus B A B′ conficitur, secunda revolutione ramus B′ A′ B″, et sic porro: quod expressio analytica vel aequatio generalis exprimat oportet.

§. 7. Posito $x = \frac{1}{2} a\pi = BR$, vel $x = \frac{3}{2} a\pi = BR'$ vel generaliter $\frac{x}{a} = (n + \frac{1}{2})\pi$, fit $y = a$ tg. $\alpha = RS$, ideoque $RS = \frac{1}{2} IA$ (§. 5.) medius omnium ordinatarum valor est. Unde cum quoque sit $BR = \frac{1}{2} BI$ (§. 5.), sequitur, rectas AB, AB′, A′B′ etc. per puncta S, S′, S″, transire, quae puncta ductae per S parallelae cum rectis BI, LA, intersectiones cum curva sunt: est enim $BR : BI = 1 : 2 = RS : IA$, $BR' : BI = RS' : AI$, et sic porro. In genere a puncto S vel S′ ad utramque partem coordinatae x, y, in eadem proportione crescunt atque decrescunt. Capto nempe $RN = RN'' = a\xi$, h. e. $x = a(\frac{1}{2}\pi \pm \xi)$, ob cos. $(\frac{1}{2}\pi + \xi) = -$ sin. ξ, erit $NM = a$ tg. α $(1 +$ sin. $\xi)$ et $N'M' = a$ tg. α $(1 -$ sin. $\xi)$, ideoque ob $RS = a$ tg. α, $nM = a$ tg. α sin. $\xi = n'M'$, h. e. incrementa ordinatarum sunt aequalia. Verum est etiam $nm = n'm'$, quoniam in triangulis rectangulis Snm, $Sn'm'$, anguli verticales nSm, $n'Sm'$, lineaeque Sn, Sn', aequales sunt: unde sequitur $nM - nm = n'M' - n'm'$, h. e. $Mm = M'm'$.

§. 8. Capto jam infinite parvo $NP = N'P'$, erit $\mu\nu = \mu'\nu'$ ob $RP = RP'$, uti modo demonstravimus; praeterea vero $m\nu = m'\nu'$, ob rectas Nm, $P\nu$, $N'm'$, $P'\nu'$, parallelas, atque anguli ad m, ν, m', ν', sub quibus recta AB ab his parallelis secatur, erunt aequales. Sunt itaque trapezia $Mm\nu\mu$, $M'm'\nu'\mu'$, aequalia, ideoque et integrae areae segmentorum SMAS, SM′BS, quorum illa sunt elementa.

§. 9. Hinc simul alia sequitur insignis curvae nostrae proprietas. Possunt nempe puncta S, S′, etc. ceu totidem curvae centra considerari, quia quaelibet curvae chorda per S transiens in puncto S bisecatur. Recta scilicet M S quoque per M′ transit, estque S M = S M′. Nam ob N M, R S, N′ M′, parallelas, et R N = R N′, habemus in triangulis S M m, S M′ m', angulos ad S, et m, m', aequales, ac S m = S m', unde sequitur S M = S M′, et M m = M′ m'; h. e. punctum intersectionis rectae M S cum ordinata N′ M′ in ipsum curvae punctum M′ cadit. Idem aequatio nostra fundamentalis generaliter monstrat. Ducta nempe quacunque recta per S″, quae curvae ramis in punctis X, X′, occurrat, demissis ordinatis X T, X′ T′, atque posito R″ T = $a\xi$, erit T X = y = a tg. α $(1 - \cos. \frac{B'T}{a})$ = a tg. α $(1 - \cos. (\frac{1}{2}\pi + \xi))$ = a tg. α $(1 + \sin. \xi)$, et V X = a tg. α sin. ξ. Quapropter cum in triangulis similibus S″ V X, S″ V′ X′, sit R″ T : V X = R″ T′ : V′ X′, nascitur V′ X′ = $\frac{tg.\,\alpha\,sin.\,\xi}{\xi}$. R″ T′, et T′ X′ = tg. α $(a - \frac{R''T'\,sin.\,\xi}{\xi})$. Praeterea habemus T′ X′ = y' = a tg. α $(1 - \cos. \frac{B'T}{a})$ = a tg. α $(1 - \cos. (\frac{R''T'}{a} - \frac{\pi}{2}))$ = a tg. α × $(1 - \sin. \frac{R''T'}{2})$. Quo valore cum priore comparato oritur a sin. $\frac{R''T'}{a}$ = $\frac{R''T'\,sin.\,\xi}{\xi}$, h. e. sin. $\frac{R''T'}{a}$: $\frac{R''T'}{a}$ = sin. ξ : ξ; unde sequitur $\frac{R''T'}{a}$ = ξ, sive R″ T′ = $a\xi$ = R″ T, S″ V′ = S″ V, et S″ X′ = S″ X. Omnis itaque chorda X X′ per punctum S vel S′ vel S″ etc. transiens in S′ bifariam secatur: unde perspicimus, omnes rectas per puncta S ductas curvae esse *diametros*, atque puncta S curvae *centra*. Eodem quoque modo ut supra demonstrari potest, areas sectorum S″ A′ X S″, S″ B′ X′ S″, esse aequales.

§. 10. In quovis puncto F ducta curvae *tangente* FG et ordinata FH, erit posito angulo $\frac{x}{a} = \Phi$, *subtangens* $HG = \frac{y\partial x}{\partial y} = \frac{a(1-\cos.\Phi)}{\sin.\Phi} = a$ tg. $\frac{1}{2}\Phi$, ideoque $B'G = x - \frac{y\partial x}{\partial y} = a(\Phi - \text{tg. } \frac{1}{2}\Phi)$. Angulo FGH, sub quo *tangens* ad axem abscissarum inclinatur, posito $= \gamma$, est tang. $\gamma = \frac{\partial y}{\partial x} =$ tg. α sin. Φ, ergo γ semper minor angulo α qui est ejus limes. Ipsa *tangens* est $FG = V(HG^2 + HF^2) = a(1 - \cos.\Phi) V(\text{tg.}^2\alpha + \text{cosec.}^2\Phi)$, atque recta HK ad tangentem FG normalis $= HG \times \sin.\gamma = \frac{a\,tg.\alpha(1-\cos.\Phi)}{V(1+tg^2\alpha\sin.^2\Phi)}$. Punctum curvae, ubi recta curvam tangens per initium abscissarum, h. e. unum alterumve punctorum B, B', etc. transit, definitur aequatione $BG = 0$, h. e. $\Phi =$ tg. $\frac{1}{2}\Phi$, cui aequationi satisfit valoribus $\Phi = 133° 33' 48''$, $\Phi = 527° 36' 16''$, etc. Sunt illae nempe tangentes BM, BM'', etc. per puncta M, M'', quae abscissis $BN = a$ $(133° 33' 48'')$ et $BN'' = BB' + a$ $(167° 36' 16'')$ respondent.

§. 11. Maximus rectae B'G valor (§. 10.) determinatur aequatione $\partial\Phi = \partial$. tg. $\frac{1}{2}\Phi$, seu $1 = \frac{\frac{1}{2}}{(\cos.\frac{1}{2}\Phi)^2}$, proinde $(\cos.\frac{1}{2}\Phi)^2 = \frac{1}{2}$, unde sequitur $\frac{1}{2}\Phi = 45°$, $\Phi = 90°$, et $x = a\Phi = B'R''$, cui abscissae respondet punctum curvae S''. Puncto huic formulae superiores (§. 10.) accommodantur ponendo $\Phi = \frac{\pi}{2} = 90°$, unde sit angulus $\gamma = \alpha$, subtangens $= a$, recta $B'G = a(\frac{\pi}{2} - 1)$, tangens $FG = a V(\text{tg.}^2\alpha + 1) = a$ sec. α, atque normalis $HK = a$ sin. α. Hisce formulis exhibetur insignis ac elegantissima curvae nostrae proprietas. Est scilicet a sec. $\alpha = p$ ellipsis evolutae semiaxis transversus (§. 2.), $a = q$ semiaxis conjugatus, sin. $\alpha = \frac{V(p^2-q^2)}{p}$ excentricitas, et cos. $\alpha = \frac{q}{p}$ ratio axium. Quare ducta per quodpiam

punctorum S, S′, S″, S‴, tangente curvae S‴ G′, ordinata S‴ R‴, tumque e puncto R‴ ad tangentem normali R‴ K′, triangulum rectangulum G′ K′ R‴ omnia continebit ellipsis evolutae elementa. Est nempe S‴ G′ semiaxis major, R‴ G′ semiaxis minor, R‴ K′ semidistantia focorum, sin. K′ G′ R‴ excentricitas, et cos. K′ G′ R‴ ratio axium principalium $\frac{q}{p}$, ideoque G′ K′ semiparameter.

Quadratura curvae.

§. 12. Posita area B S M N B $=$ S, area B S M C B $=$ S′, habemus

$$\partial S = y\,\partial x = a.\,\text{tg.}\,\alpha\,\partial x\,(1-\cos.\tfrac{x}{a}),\ \partial S' = x\,\partial x\,\text{tg.}\,\alpha\,\sin.\tfrac{x}{a},$$

consequenter

$$S = a\,\text{tg.}\,\alpha\,(x - a\sin.\tfrac{x}{a}),\ \text{et}\ S' = a\,\text{tg.}\,\alpha\,(a\sin.\tfrac{x}{a} - x\cos.\tfrac{x}{a}),$$

quod facilius reperitur, si meminerimus esse

$$S' = xy - S = a\,\text{tg.}\,\alpha\,(a\sin.\tfrac{x}{a} - x\cos.\tfrac{x}{a}),$$

unde vice versa sequitur, in genere esse

$$\int \Phi\,\partial\Phi\,\sin.\Phi = \sin.\Phi - \Phi\cos.\Phi.$$

Posito $\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2}$, vel $x =$ BR, obtinemus aream B R S M′ B $\leqq$ S $= a^2\,\text{tg.}\,\alpha\,(\frac{\pi}{2} - 1) = a\,\text{tg.}\,\alpha\,(x-a) = xy - ay$, et aream B M′ S E B $=$ S′ $= a^2\,\text{tg.}\,\alpha = ay$. Ducta itaque per punctum G′, ubi tangens curvae S‴ G′ axi abscissarum occurrit, recta G′ F′ ad lineam S‴ S normali, area B M″ S‴ E B aequalis erit rectangulo R‴ F′, area vero B M‴ S‴ R‴ B aequalis rectangulo B F′ (§. 11.).

Casu $\frac{x}{a} = \pi$ seu $x = BI$, fit area $BM'SMAIB = S = \pi a^2 \text{ tg. } \alpha = ax \text{ tg. } \alpha = \frac{1}{2} xy$, atque area $BMALB = S' = \frac{1}{2} xy$, ergo $S' = S$, unde sequitur, segmenta $BM'SB$ et $AMSA$ esse aequalia, quod jam supra demonstravimus (§. 8.). Cum sit area $BM'N'B = S = a \text{ tg. } \alpha \left(x - a \text{ sin. } \frac{x}{a}\right)$, et triangulum $Bm'N' = \frac{1}{2} x . N'm' = \frac{1}{2} x . \frac{RS}{BR} x = \frac{x^2 tg. \alpha}{\pi}$, resultat area $BM'm'B = \text{tg. } \alpha \left(\frac{x^2}{\pi} - ax + a^2 \text{ sin. } \frac{x}{a}\right)$, quae posito $x = BR = \frac{a\pi}{2}$, abit in aream segmenti $BM'SB = a^2 \text{ tg. } \alpha \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = y \left(a - \frac{x}{2}\right)$, cui segmentum $AMSA$ est est aequale. Bisecta itaque BR''' in H', et erecta $H'h$ ad $S'''S$ normali, segmenta $BM'SB$, $AMSA$, etc. singula sunt aequalia rectangulo $G'h$, ob $R'''G' = a$ (§. 11.), $R'''H' = \frac{1}{2} x$.

§. 13. Cum area superficiei cylindri $BNMB$ (*Fig.* 6.) inter circulum BNI et ellipsin BMA comprehensa evolutione non mutetur, expressiones modo inventae aream cylindri non minus definiunt. Posito itaque $\frac{x}{a} = 2\pi$, integra cylindri superficies circulo et ellipse circumscripta $BIAB$ est $= 2 \pi a^2 \text{ tg. } \alpha$ (§. 12.) $= BNI \times IA$, dimidium nempe superficiei cylindri $BLAI$.

Sin autem area frusti vel *unguli* cylindrici MWA inter circulum basi parallelum MW et ellipsin comprehensi desideratur, posito arcu $BN = a\beta$, ideoque $NI = MW = a(\pi - \beta)$, assumamus (*Fig.* 7.) MW rectae BN parallelam pro axe, M pro initio abscissarum u, appellenturque v ordinatae normales super MW. Quapropter ob $BN = a\beta$, ideoque $NM = a \text{ tg. } \alpha (1 - \cos. \beta)$, erit $x = a\beta + u$, $y = a \text{ tg. } \alpha \times$

$(1 - \cos.\beta) + v$: quibus valoribus in aequatione $y = a \text{ tg. } \alpha \times (1 - \cos.\frac{x}{a})$ (§. 4.) substitutis, nascitur aequatio

$$v = a \text{ tg. } \alpha \, (\cos.\beta - \cos.(\beta + \tfrac{u}{a})).$$

Differentiale areae MAW est itaque $= v\partial u$, cujus integrale est $\int v\partial u = a \text{ tg. } \alpha \, (u \cos.\beta - a \sin.(\beta + \frac{u}{a}) + a \sin.\beta)$, ubi substituto $u = \text{MW} = a(\pi - \beta)$, prodit

$$\text{area MAWM} = a^2 \text{ tg. } \alpha \, (\pi \cos.\beta - \beta \cos.\beta + \sin.\beta).$$

Si MP (*Fig.* 6.) per axem D transit, MW seu NI et BN fiunt quadrantes circuli, punctum M in S cadit, estque $\beta = 90°$, BN = BR (*Fig.* 7.), et M cum puncto S coincidit, unde fit

$$v = a \text{ tg. } \alpha \sin.\tfrac{u}{a}, \text{ area SM}n\text{S} = a^2 \text{ tg. } \alpha \, (1 - \cos.\tfrac{u}{a}),$$

ac posito $u = \text{SO} = \frac{\pi}{2} a$, area SMAO $= a^2 \text{ tg. } \alpha = a \,.\, \text{OA}$, h. e. DV × VA' (*Fig.* 6.). Est igitur area unguli SAV aequalis rectangulo ACDV vel rectangulo R'''F' (*Fig.* 7.).

§. 14. Supra (§. 12.) jam invenimus aream BM'SRB, seu BSR (*Fig.* 6.) $= a^2 \text{ tg. } \alpha \, (\frac{\pi}{2} - 1)$, unde resultat summa ungulorum BSR + SAV $= \frac{\pi}{2} a^2 \text{ tg. } \alpha = \frac{1}{2}$ BNI × IV. Est autem frustum RSVI quarta pars superficiei cylindri, cujus altitudo = IV, proinde RSVI $= \frac{1}{2}$ BNI×IV, areaque integra BNIAB = BNI × IV, quarta nempe pars superficiei cylindri BLAI, quod jam supra reperimus (§. 13.).

Si ab area SMAO (*Fig.* 7.) $= a^2 \text{ tg. } \alpha$ (§. 13.) subtrahatur triangulum SAO $= \frac{1}{2}$ SO.OA $= \frac{\pi}{4} a^2 \text{ tg. } \alpha$, restat segmentum SMAS $= a^2 \text{ tg. } \alpha \, (1 - \frac{\pi}{4})$, ut supra (§. 12.). Area

$S''A'XVS''$ est $= a^2$ tg. α $(1 - \cos. \frac{u}{a})$ (§. 13.), et triangulum $S''XV = \frac{1}{2} u v = \frac{1}{2} au$ tg. α sin. $\frac{u}{a}$, unde oritur area segmenti $S''M''A'XS'' = a$ tg. α $(a - a \cos. \frac{u}{a} - \frac{1}{2} u \sin. \frac{u}{a})$, et area sectoris $S''A'XS'' = a$ tg. α $(\frac{\pi}{4} a - a \cos. \frac{u}{a} - \frac{1}{2} u \sin. \frac{u}{a})$.

Rectificatio curvae.

§. 15. Arcus $BM'SM = s$ elementum definitur aequatione $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$. Est autem $\partial y = \partial x$ tg. α sin. $\frac{x}{a}$ (§. 4.),

$(\sin. \frac{x}{a})^2 = \frac{y\,(2a\,tg.\,\alpha - y)}{a^2\,tg.^2\alpha}$, unde fit $\partial x^2 = \frac{a^2\,\partial y^2}{y\,(2a\,tg.\,\alpha - y)}$,

consequenter

$$\partial s = \partial x \sqrt{(1 + tg.^2\,\alpha \sin.^2 \tfrac{x}{a})}, \text{ sive}$$
$$\partial s = \partial y \sqrt{\frac{a^2 + 2ay\,tg.\,\alpha - y^2}{y\,(2a\,tg.\,\alpha - y)}}.$$

Expressio arcus expeditior erit assumtis coordinatis $Sn = u$, $nM = v$, nt sit $v = a$ tg. α sin. $\frac{u}{a}$ (§. 13.). Tunc enim erit

$$\partial v = \partial u \text{ tg. } \alpha \cos. \tfrac{u}{a}, \quad (\sin. \tfrac{u}{a})^2 = \frac{v^2}{a^2\,tg.^2\,\alpha},$$
$$(\cos. \tfrac{u}{a})^2 = \frac{a^2 tg.^2\alpha - v^2}{a^2\,tg.^2\alpha}, \text{ proinde } \partial u = \frac{a\,\partial v}{\sqrt{(a^2 tg.^2\alpha - v^2)}}, \text{ atque}$$
$$\partial s = \partial v \sqrt{\frac{a^2\,sec.^2\,\alpha - v^2}{a^2\,tg.^2\,\alpha - v^2}},$$

cujus integratio rectificatione ellipseos nititur. Aequatio ad ellipsin per coordinatus x, y, e centro in axe transverso $= 2p$ et conjugato $= 2q$ captas est enim $p^2 y^2 = q^2 (p^2 - x^2)$, unde fit $\partial y = -\frac{qx\,\partial x}{p\sqrt{(p^2 - x^2)}}$, ideoque $\partial s = \frac{\partial x}{p} \sqrt{\frac{p^4 - (p^2 - q^2)x^2}{p^2 - x^2}}$, quae cum nostra expressione prorsus convenit, si $q = a$, $p = a$ sec. α, et $x = \frac{v}{\sin. \alpha} = \frac{pv}{\sqrt{(p^2 - q^2)}}$. Arcus itaque SM aequalis est arcui, qui in ellipse axium $2a$ et $2a$ sec. α, abscissae a centro in axe majore captae $= \frac{v}{\sin. \alpha}$ respondet.

Figura sexta Tab. I. clarius id ostendet. Cum enim arcus elliptici BSA longitudo evolutione mutari nequeat, arcus qui hic quaeritur, est $s = SM$. Unde per S ducto plano S V basi cylindri parallelo, atque recta SD ad planum LI normali, ista recta nec non intersectio DV plani SV cum plano LI, per axem atque centrum ellipsis transibit. Ductis itaque MP, nd, ad planum LI normalibus quarum posterior nd per rectam D V transire debet, habemus, $Pd = Mn = v = PD$ sin. ADV. Est autem DV ad axem normalis et rectae BI parallela, unde sequitur $ADV = ABI = \alpha$, ideoque $v = PD$ sin. α. Nuncupatis igitur axibus ellipsis BMA majore ac minore $2p$ et $2q$, et abscissa DP arcui SM respondente $= x$, ordinata $PM = y$, est $p^2 y^2 = q^2 (p^2 - x^2)$, et $\partial s = \frac{\partial x}{p} \sqrt{\frac{p^4 - (p^2+q^2)x^2}{p^2 - x^2}}$. Est autem $p = DA = a$ sec. α, $q = DS = a$, et $x = DP = \frac{v}{\sin.\ \alpha}$, quibus valoribus substitutis formula superior $\partial s = \partial v \sqrt{\frac{a^2 \sec.^2 \alpha - v^2}{a^2 tg.^2 \alpha - v^2}}$ oritur. Non inutile igitur erit, expressionem hanc ulterius evolvere, quoniam ad rectificationem ellipsis perducit.

§. 16. Expressionis hujus integrale non nisi serie infinita exhiberi posse constat. Posito nempe

$$\frac{v}{a} \text{ cot. } \alpha = z, \text{ fit } \partial s = a \partial z \text{ sec. } \alpha \sqrt{\frac{1 - z^2 \sin^2. \alpha}{1 - z^2}}.$$

Posito vero sin. $\alpha = \delta$, est $\sqrt{(1 - z^2 \sin.^2 \alpha)} =$

$$1 - \frac{\delta^2}{2} \cdot z^2 - \frac{\delta^4}{2} \cdot \frac{z^4}{4} - \frac{\delta^6}{2} \cdot \frac{3.z^6}{4.6} - \frac{\delta^8}{2} \cdot \frac{3.5.z^8}{4.6.8} - \frac{\delta^{10}}{2} \cdot \frac{3.5.7.z^{10}}{4.6.8.10} - \text{cet.}$$

Unde compendii causa substituto $\sqrt{(1 - z^2)} = Z$, fit

$$\frac{s}{a} \text{ cos. } \alpha = \int \frac{\partial z}{Z} - \frac{\delta^2}{2} \int \frac{z^2 \partial z}{Z} - \frac{\delta^4}{2.4} \int \frac{z^4 \partial z}{Z} - \frac{3.\delta^6}{2.4.6} \int \frac{z^6 \partial z}{Z} - \text{cet.}$$

Quare cum singula haec integralia cognita sint, puta

$$\int \frac{\partial z}{Z} = \text{Arc. sin. } z,$$

$$\int \frac{z^2 \partial z}{Z} = \tfrac{1}{2} \text{ Arc. sin. } z - \tfrac{1}{2} z Z,$$

$$\int \frac{z^4 \partial z}{Z} = \frac{1.3}{2.4} \text{ Arc. sin. } z - \left(\frac{3.z}{2.4} + \frac{z^3}{4}\right) Z,$$

$$\int \frac{z^6 \partial z}{Z} = \frac{1.3.5}{2.4.6} \text{Arc. sin. } z - \left(\frac{3.5.z}{2.4.6} + \frac{5.z^3}{4.6} + \frac{z^5}{6}\right) Z,$$

$$\int \frac{z^8 \partial z}{Z} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \text{Arc. sin. } z - \left(\frac{3.5.7.z}{2.4.6.8} + \frac{5.7.z^3}{4.6.8} + \frac{7.z^5}{6.8} + \frac{z^7}{8}\right) Z,$$

et sic porro *) obtinemus $\frac{s}{a} \cos. \alpha =$

$$\text{Arc. sin. } z \left[1 - \frac{\delta^2}{2^2} - \frac{3.\delta^4}{2^2.4^2} - \frac{3^2.5.\delta^6}{2^2.4^2.6^2} - \frac{3^2.5^2.7.\delta^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \frac{3^2.5^2.7^2.9.\delta^{10}}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2} - \text{cet.}\right]$$

$$+ \frac{\delta^2}{2^2} . zZ \left[1 + \frac{3.\delta^2}{4^2} + \frac{3^2.5.\delta^4}{4^2.6^2} + \frac{3^2.5^2.7.\delta^6}{4^2.6^2.8^2} + \frac{3^2.5^2.7^2.9.\delta^8}{4^2.6^2.8^2.10^2} + \text{cet.}\right]$$

$$+ \frac{\delta^4}{4^2} . \frac{z^3}{2} Z \left[1 + \frac{3.5.\delta^2}{6^2} + \frac{3.5^2.7.}{6^2.8^2} \delta^4 + \frac{3.5^2.7^2.9}{6^2.8^2.10^2} \delta^6 + \frac{3.5^2.7^2.9^2.11}{6^2.8^2.10^2.12^2} \delta^8 + \text{cet.}\right]$$

$$+ \frac{\delta^6}{6^2} . \frac{3.z^5}{2.4} . Z \left[1 + \frac{5.7}{8^2} \delta^2 + \frac{5.7^2.9}{8^2.10^2} \delta^4 + \frac{5.7^2.9^2.11}{8^2.10^2.12^2} \delta^6 + \text{cet.}\right]$$

$$+ \frac{\delta^8}{8^2} . \frac{3.5.z^7}{2.4.6} . Z \left[1 + \frac{7.9}{10^2} \delta^2 + \frac{7.9^2.11}{10^2.12^2} \delta^4 + \frac{7.9^2.11^2.13}{10^2.12^2.14^2} \delta^6 + \text{cet.}\right]$$

$$+ \frac{\delta^{10}}{10^2} . \frac{3.5.7.z^9}{2.4.6.8} . Z \left[1 + \frac{9.11}{12^2} \delta^2 + \frac{9.11^2.13}{12^2.14^2} \delta^4 + \text{cet.}\right]$$

$$+ \text{etc. etc. etc.}$$

§. 17. Notatu maxime digna est lex, secundum quam quilibet coëfficiens e proxime antecedente formatur. Quod si enim aequationi hanc formam tribuimus

$$\frac{s}{a} \cos. \alpha = (1 - A) \text{Arc. sin. } z + zZ(B + Cz^2 + Dz^4 + Ez^6 + Fz^8 + \text{cet.}),$$

est $B = A = \frac{\delta^2}{2^2} + \frac{3.\delta^4}{2^2.4^2} + \frac{3^2.5.\delta^6}{2^2.4^2.6^2} + \frac{3^2.5^2.7.\delta^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} + \frac{3^2.5^2.7^2.9.\delta^{10}}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2} + \text{cet.}$

Si praeterea ponimus primum coëfficientis B terminum $= b$, primum coëfficientis C terminum $= c$, et sic porro, ut sit $b = \frac{\delta^2}{2^2}$, $c = \frac{\delta^4}{2.4^2}$, $d = \frac{3.\delta^6}{2.4.6^2}$, $e = \frac{3.5.\delta^8}{2.4.6.8^2}$, $f = \frac{3.5.7.\delta^{10}}{2.4.6.8.10^2}$, etc. habemus

$$c = \frac{1.2}{4^2} . \delta^2 b, \quad d = \frac{3.4}{6^2} \delta^2 c = \frac{1.2.3.4}{4^2.6^2} \delta^4 b,$$

$$e = \frac{5.6}{8^2} . \delta^2 d = \frac{1.2.3.4.5.6}{4^2.6^2.8^2} \delta^6 b, \quad f = \frac{7.8}{10^2} \delta^2 e = \frac{1.2.3.4\ 5.6.7.8}{4^2.6^2.8^2\ 10^2} \delta^8 b,$$

*) *V. L. Euleri Calc. Integral. Vol. I. Cap. II. pag. 79.*

et sic porro, ideoque

$$B=A,\ C=\tfrac{2}{3}(B-b),\ D=\tfrac{4}{5}(C-c),\ E=\tfrac{6}{7}(D-d),\ F=\tfrac{8}{9}(E-e),\ \text{etc.}$$

Formata itaque serie

$$B=\frac{\delta^2}{2^2}+\frac{3.\delta^4}{2^2.4^2}+\frac{3^2.5^2.\delta^6}{2^2.4^2.6^2.}+\frac{3^2.5^2.7.\delta^8}{2^2.4^2.6^2.8^2}+\text{cet.}$$

cujus terminos dicamus b, b', b'', b''', b^{IV}, etc. ut sit

$$B=b+b'+b''+b'''+b^{IV}+b^{V}+\text{cet.}$$

praeterea computentur numeri

$$c=\tfrac{2}{3}b',\ d=\frac{2.4}{3.5}b'',\ e=\frac{2.4.6}{3.5.7}b''',\ f=\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}b^{IV},\ \text{etc.}$$

sive posito

$$\tfrac{2}{3}=\beta,\ \tfrac{4}{5}=\gamma,\ \tfrac{6}{7}=\delta,\ \tfrac{8}{9}=\varepsilon,\ \tfrac{10}{11}=\zeta,\ \text{etc.}$$

supputentur numeri

$$c=\beta b',\ d=\beta\gamma b'',\ e=\beta\gamma\delta b''',\ f=\beta\gamma\delta\varepsilon b^{IV},\ \text{etc.}$$

Quibus praemissis erit

$$A=B=b+b'+b''+b'''+b^{IV}+b^{V}+\text{cet.}$$ atque

$$C=\beta(B-b),\ D=\gamma(C-c),\ E=\delta(D-d),\ F=\varepsilon(E-e),$$
$$G=\zeta(F-f),\ \text{etc.}$$

ideoque tandem

$$s=a\sec.\alpha(1-A)\ \text{Arc. sin.}\ \frac{v}{a}\cot.\alpha$$
$$+v\sec.\alpha\cot.\alpha.\sqrt{(1-\frac{v^2}{a^2}\cot.^2\alpha)}\,[B+C.\frac{v^2}{a^2}\cot.^2\alpha$$
$$+D.\frac{v^4}{a^4}\cot.^4\alpha+E.\frac{v^6}{a^6}\cot.^6\alpha+F\frac{v^8}{a^8}\cot.^8\alpha+\text{cet.}]$$

§. 18. Cum sit (*Fig.* 6.) $v=Pd$, ideoque $v\cot.\alpha=Dd$, semper erit $\frac{v}{a}\cot.\alpha=\frac{Dd}{DV}$ unitate minor; unde cum etiam quilibet coëfficiens C, D, etc. minor sit antecedente B, C, etc. series $B+C\frac{v^2}{a^2}\cot.^2\alpha+\text{cet.}$ semper converget, etiamsi $\frac{v}{a}\cot.\alpha$ maximum induat valorem $\frac{Dd}{DV}=1$. Praeterea hocce casu, vel

quando $\frac{v}{a}$ cot. α unitati valde appropinquat, $\sqrt{(1 - \frac{v^2}{a^2} \cot.^2 \alpha)}$ prae priore parte Arc. sin. $\frac{v}{a}$ cot. α evanescit.

Posito $v = OA = a$ tg. α (*Fig.* 7.) seu $v = VA$ (*Fig.* 6.), arcus $s = SMA$ quarta est pars ellipseos ejusque evolutae, unde si hac substitutione facta $\frac{v}{a} = \text{tg. } \alpha$ seu $\frac{v}{a} \cot. \alpha = 1$, seriem s quater sumimus, tandem obtinetur arcus seu longitudo totius ellipsis, vel evolutae

$$BSMAS'B' = 2\pi a (1 - A) \text{ sec. } \alpha.$$

§. 19. Quod si expressionem arcus evoluti s hic repertam ellipsi accommodare volumus, meminisse oportet, semiaxes q, p, ellipsis ad quam hic arcus pertinet, esse a et a sec. α, abscissam a centro autem $x = \frac{v}{\sin. \alpha}$, unde fit sec. $\alpha = \frac{p}{q}$, cos. $a = \frac{q}{p}$, v cot. $\alpha = x$ cos. $\alpha = \frac{q}{p} x$, $\frac{v}{a} \cot. \alpha = \frac{x}{p}$, ideoque arcus

$$s = p (1 - B) \text{ Arc. sin. } \frac{x}{p} + \frac{x}{p} (B + C \frac{x^2}{p^2} + D \frac{x^4}{p^4} + E \frac{x^6}{p^6} + F \frac{x^8}{p^8} + G \frac{x^{10}}{p^{10}} + \text{cet.}) \sqrt{(p^2 - x^2)},$$

et arcus integrae ellipsis $= 2\pi p (1 - A)$.

In computandis vero quantitatibus B, C, D, etc. meminisse oportet, esse hic $\delta^2 = \sin.^2 \alpha$ (§. 16.) $= \frac{p^2 - q^2}{p^2}$, unde sequitur, δ esse excentricitatem ellipsis.

SOLUTION
DE QUELQUES PROBLEMES REMARQUABLES
DE
L'ANALYSE INDÉTERMINÉE

PAR

Mr. *C. F. KAUSLER.*

Présenté à l'Académie le 29 Nov. 1798.

§. 1.

Dans le Tome X des nouveaux Actes de l'Académie, page 27–40 on trouve un excellent mémoire du grand Euler, intitulé: „De casibus, quibus hanc formulam: $x^4 \pm K x y^2 + y^4$, ad Quadratum reducere licet". Cet illustre auteur, auquel l'Analyse de Diophante doit tant de belles découvertes, y donne une méthode pour trouver un nombre infini de valeurs de K (qu'on suppose un nombre entier), pour lesquelles il est très-facile de déterminer les x et y qui rendent cette formule égale à un carré parfait. Ces valeurs de K sont toutes comprises dans l'expression $K = (n^2 - 4)\, z^2 \pm n$, dans laquelle n et z représentent des nombres rationels quelconques, pourvûque la valeur de K qui en résulte, soit un nombre entier. Cependant quelqu'ingénieuse que soit cette méthode, la solution de Mr. Euler

paroit être indirecte, ces suppositions étant arbitraires et plûtot l'effet d'un heureux hasard: d'ailleurs on ne voit pas clairement que ces valeurs de K, contenues dans l'expression qu'il trouve, soient les seules où la solution de l'équation proposée devient possible. Indépendamment de cette difficulté que je n'ai crû pouvoir lever qu'en prenant une route absolument différente de celle de ce grand Géomêtre, il y a encore une autre circonstance qui merite un attention particulière. La voici: Si, comme nous allons le démontrer rigoureusement dans les articles suivans, l'expression $(n^2 - 4)\, z \pm n$ renferme toutes les valeurs possibles de K, pour lesquelles l'équation $x^4 + \mathrm{K}\, x^2 y^2 + y^4 = \square$ devient soluble; ce n'est pas dans la seule supposition que n et z sont des nombres entiers, mais encore dans celle qu'ils sont des fractions qui, substituées dans cette formule, la rendent égale à un nombre entier. Or la découverte de ces dernières présente de si grandes difficultés que Mr Euler, à la fin du mémoire mentionné, p. 48, en fait un Problême particulier, qu'il propose en ces termes: „Invenire methodum, cujus ope omnes numeri integri assignari „queant, qui ex formula $(n^2 - 4)\, z^2 \pm n$ resultare possint, si „loco litterarum n et z non solum numeri integri, sed etiam „fracti accipiantur."

Toutes ces considérations m'ont engagé à m'occuper de cette même question, et mes recherches, si je ne me trompe n'ont pas été tout-à-fait infructueuses: C'est-ce qui me fait hassarder de les soumettre ici à l'examen de connoisseurs.

Problème.

§. 2. Le nombre K étant une nombre entier quelconque, on cherche les valeurs de x et y, qui rendent l'expression $x^4 + \mathrm{K}\, x^2 y^2 + y^4$ égale à un carré.

Solution.

Comme $x^4 + Kx^2y^2 + y^4 = \square$; on aura, en divisant de part et d'autre par le carré y^4

$(\frac{x}{y})^4 + K(\frac{x}{y})^2 + 1 = \square$ ou bien, en mettant $\frac{x}{y} = z$;

$1 + Kz^2 + z^4 = \square$.

Cette équation du quatrième dégré est du nombre de celles, pour la solution desquelles la seule méthode, connue jusqu'ici, reste en défaut. (Voyez les élémens d'Algèbre de Mr. Euler, Tome II, chapitre IX, §. 132., 133.). Or, en examinant attentivement les raisons, pourquoi la méthode générale de cet auteur, de transformer l'équation $f^2 + az + bz^2 + cz^3 + ez^4$ en carré, ne méne à rien lorsqu'elle est appliquée au cas particulier $a = c = 0$, qui est celui dont il s'agit ici, on trouve aisément, que les suppositions qui servent de base dans la solution de l'équation générale, ne peuvent avoir lieu dans le cas particulier $f^2 + bz^2 + ez^4$; puisque cette dernière équation qu'on peut représenter sous la forme $f^2 + b(z) + e(z^2)^2$, doit plutôt être mise dans la classe de celles du second dégré. En effet, s'il existe une méthode de trouver toutes les valeurs possibles de Z, qui changent l'équation $f^2 + bZ + eZ^2$ en carré, l'équation $f^2 + bz^2 + ez^4 = \square$ pourra être résolue aussi: puisqu'on n'a qu'à prendre parmi toutes les valeurs de Z celles qui sont des carrés z, s'il s'en trouve quelques-unes: et en cas qu'il ne s'en trouve point, on pourra être sûr que la formule: $f^2 + bz^2 + ez^4$ ne peut jamais devenir un carré. Or, il n'est pas difficile de trouver une expression, renfermant toutes les valeurs rationelles possibles de Z qui satisfont à la condition $f^2 + bZ + eZ^2 = \square$; tout revient par conséquent à choisir, parmi ces valeurs de Z celle qui sont en même tems des carrés.

Mettons pour cela

$$f^2 + bZ + eZ^2 = P^2, \text{ et il y aura:}$$
$$Z(b + eZ) = (P + f)(P - f);$$

ou bien, en introduisant la quantité rationelle et indeterminée A:

$$Z(b + eZ) = A(P + f)\left(\frac{P-f}{A}\right),$$

et comme cette équation renferme ces trois indeterminées Z, A et P; rien n'empêche de faire les deux suppositions suivantes:

$$b + eZ = A(P + f) \text{ et } Z = \frac{P-f}{A}$$

chassant donc P de ces équations, on obtient

$$Z = \frac{2fA - b}{e - A^2}$$

ou puisque la quantité A peut être prise indifféremment en plus ou moins:

$$Z = \frac{b \pm 2fA}{A^2 - e}.$$

Ainsi chaque valeur de A donne deux valeurs de Z, qui substituées dans la formule $f^2 + bZ + eZ^2$ la changent en carré. Or je dis que toutes les valeurs possibles de Z sont contenues dans la formule $Z = \frac{b \pm 2fA}{A^2 - e}$. Pour le prouver, il faut donc faire voir, qu'il n'y a aucune valeur rationelle de Z qui satisfasse à la condition $f^2 + bZ + eZ^2 = \square$ qui ne puisse être deduite de quelque valeur rationnelle de A dans la formule $Z = \frac{b \pm 2fA}{A^2 - e}$. Car si Z′ étoit un de ces valeurs, en mettant $\frac{b \pm 2fA}{A^2 - e} = Z'$, on trouveroit pour A une

quantité irrationelle. Or $A = \frac{\pm f \pm \sqrt{(f^2 + bZ' + eZ'^2)}}{Z'}$, et $f^2 + bZ' + eZ'^2$ est un carré. Donc A est une quantité rationelle. Puisqu'il est donc clair qu'à chaque Z' qui satisfait à la condition $f^2 + bZ' + eZ'^2 = \square$, il repond un A rationel, on voit que la formule $Z = \frac{b \pm 2fA}{A^2 - e}$ contient tous les nombres rationels possibles, qui substitués dans la formule en question, la rendent égale à un carré. Il ne reste plus maintenant qu'à trouver parmi cette infinité de valeurs de Z provenant de la supposition A = à un nombre rationel quelconque, celles qui sont en même tems des carrés. Pour cela je remarque que l'équation à résoudre étant $1 + Kz^2 + z^4$, en peut simplifier ces recherches en faisant $f = e = 1$, et $b = K$; ce qui donne :

$$Z = \frac{K \pm 2A}{A^2 - 1}.$$

On demande donc, quelles valeurs on doit donner à A pour que cette formule devienne un carré? Pour resoudre ce probleme nous distinguerons les deux cas 1) A = à un nombre entier, et 2) A = à une fraction.

Solution de l'équation $\frac{K \pm 2A}{A^2 - 1} = \square$

dans la supposition que A soit un nombre entier.

§. 3. Comme, dans cette supposition, la quantité $A^2 - 1$ ne peut jamais être un carré, la formule $\frac{K \pm 2A}{A^2 - 1}$ ne sauroit être un carré, à moins que $K \pm 2A$ ne soit $= mp^2$, et $A^2 - 1 = mq^2$. De la première équation on obtient $A = \frac{mp^2 - K}{2}$, et cette valeur, substituée dans la seconde donne :

$$K^2 - 4 - 2mKp^2 + m^2p^4 = 4mq^2.$$

Or K, m, p et q sont des nombres entiers : par conséquent le terme $K^2 - 4$ doit être divisible par m ; c'est-à-dire il faut que m soit un des facteurs de $K^2 - 4$. Cela posé, revenons aux deux équations $A = \frac{m p^2 - K}{2}$, et $A = \sqrt{(1 + m q^2)}$, dont chacune peut fournir une suite de nombres entiers. Pour obtenir ceux de la première, il suffit de mettre successivement pour p tous les nombres entiers qui rendent la quantité $m p^2 - K$ divisible par 2. Quant à ceux de la seconde, on emploira la méthode que M. La Grange a donnée dans ses additions aux Elémens d'Algèbre de M. Euler Tome II. Chap. VII. §. 75., et qui consiste à chercher d'abord la plus petite valeur V de q, qui rend l'expression $1 + m q^2$ égale à un carré T, et à deduire ensuite toutes les autres valeurs possibles de A et de q des formules

$$A = T^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} m T^{n-2} V^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} m^2 T^{n-4} V^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} m^3 T^{n-6} V^6 + \text{etc.}$$

$$\text{et } q = n T^{n-1} V + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} m T^{n-3} V^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} m^2 T^{n-5} V^5 + \text{etc.}$$

en y mettant pour n tous les nombres naturels. Ainsi, s'il existe un nombre entier A qui rende la formule $\frac{K + 2A}{A^2 - 1}$ égale à un carré $\frac{p^2}{q^2}$; il faut que ce nombre soit commun aux deux séries dont nous venons de parler. Si donc, en les continuant l'une et l'autre, on parvient à un terme commun, auquel repondent les valeurs p et q, on aura $Z = \frac{p}{q}$. Mais si, après avoir parcouru tous les facteurs m de $K^2 - 4$ et calculé pour chacun d'eux les deux séries au de là d'un cer-

tain terme auquel repondent les valeurs P et Q, on n'en trouve aucun qui soit commun aux deux séries, c'est une preuve que, s'il existe un nombre entier A qui change la formule proposée en carré, la valeur de Z qui en resulte sera exprimée par une fraction, dont le numérateur est nécessairement plus grand que P, et le dénominateur plus grand que Q.

Comme les valeurs de A résultant de l'éxpression $\sqrt{(1 + mq^2)}$ croissent toujours fort vîte, on peut abréger les calculs précédens. Car après avoir trouvé un certain nombre de valeurs de A, il suffit d'égaler à chacune d'elles la premiere expression $\frac{mp^2 - K}{2}$; et de voir si $\frac{2A + K}{m}$ est égal à un carré p^2. De cette manière on sera dispensé de calculer la serie des nombres resultant de $\frac{mp^2 - K}{2}$.

§. 4. Cette méthode de trouver les nombres entiers A, ainsi que celle que nous allons donner dans l'article suivant pour les valeurs fractionaires de cette quantité, est imparfaite; puisqu'elle ne donne point de terme fixe, par lequel on puisse juger de la possibilité ou de l'impossibilité de la solution de l'équation $Z^2 = \frac{K + 2A}{A^2 - 1}$: car pour reconnoître cette dernière, il est des cas, où l'on seroit obligé de prolonger les deux séries à l'infini. Aussi je ne la détaille ici que pour faire voir les difficultés que présente une solution directe, et pour justifier la solution indirecte à laquelle on est obligé d'avoir recours, et qui sera le principal objet de ce mémoire. Au reste si Z est une fraction, dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres assez petits, comme le sont tous ceux de la table calculée par M. Euler dans le mémoire mentionné, cette méthode donne toujours des solutions fort simples, comme on peut s'en convaincre par les exemples ajoutés cy-après.

II. Solution de l'équation $\frac{K \pm 2A}{A^2 - 1} = \square$ dans la supposition que A soit une fraction.

§. 5. Si $A = \frac{u}{v}$ (u et v étant des nombres premiers entr' eux), il y aura :

$$\frac{K \pm \frac{2u}{v}}{\frac{u^2}{v^2} - 1} = v\left(\frac{Kv \pm 2u}{u^2 - v^2}\right) = \square,$$

et cette équation ne peut subsister que dans les deux cas suivans :

1) si $v = 2$, et
2) si $v = \square = r^2$.

1) Si $v = 2$, on aura

$$4\frac{(K \pm u)}{u^2 - 4} = \square \text{ ; par conséquent } \frac{K \pm u}{u^2 - 4} = \square.$$

Or v et u sont premiers entr' eux, donc u doit être impair ; et puisqu'il n'y a point de nombre entier u, dont le carré diminué de 4 soit égal à un carré ; on ne peut faire ici que la seule supposition : $K \pm u = mp^2$, et $u^2 - 4 = mq^2$. Par-conséquent $K^2 - 4 - 2mKp^2 + m^2p^4 = mq^2$. Il faut donc, comme dans la solution précédente, que m soit un des facteurs de $K^2 - 4$. Ainsi les équations $u = V(4 + mq^2)$ et $\frac{K \pm u}{m} = \square = p^2$ semblables à celles du cas précédent, peuvent être traitées de la même manière, et conduiront à des résultats semblables. On remarquera seulement que u étant un nombre impair, le cas dont il est question ici, ne peut s'appliquer qu'aux facteurs impairs de $K^2 - 4$, et que par la même raison, q doit être également un nombre impair. Enfin Z sera $= 2V\frac{(K \pm u)}{u^2 - 4} = \frac{2p}{q}$.

2) Si $v = r^2$, on aura:

$$r^2 \frac{(\mathrm{K}r^2 \pm 2u)}{u^2 - r^4} \text{ et par conséquent aussi } \frac{\mathrm{K}r^2 \pm 2u}{u^2 - r^4} = \square.$$

Cette équation admet les deux suppositions suivantes:

$$\mathrm{K}r^2 \pm 2u = p^2, \text{ et } u^2 - r^4 = q^2; \text{ et}$$

$$\mathrm{K}r^2 \pm 2u = mp^2, \text{ et } u^2 - r^4 = mq^2.$$

Commençons par la première, en faisant $\mathrm{K}r^2 \pm 2u = p^2$, et $u^2 - r^4 = q^2$. Or il est facile de démontrer que, pour que cette dernière équation puisse avoir lieu, u sera $= \left(\frac{\mathrm{B}^2 + 1}{\mathrm{B}^2 - 1}\right) r^2$, où B est un nombre arbitraire quelconque. Or u et r sont des nombres entiers et premiers entr'eux; il faut donc que $r^2 = \mathrm{B}^2 - 1$, mais comme cette équation est impossible, si B est un nombre entier, faisons $\mathrm{B} = \frac{m}{n}$; par conséquent u sera $= \frac{(m^2 + n^2) r^2}{m^2 - n^2}$, où l'on voit, qu'il faut nécessairement que le dénominateur $m^2 - n^2$ soit $= r^2$, ce qui donne $u = m^2 + n^2$ et $\mathrm{Z} = \frac{rp}{q}$. On prendra donc pour m et n successivement tous les nombres entiers tels que $m^2 - n^2 = \square = r^2$, et on verra si parmi ces valeurs qui vont toutes en augmentant, il s'en trouve, qui satisfont en même tems à la première équation $\mathrm{K}r^2 \pm 2(m^2 + n^2) = \square = p^2$. De cette manière on pourra toujours se convaincre, si, sur cette route, il existe des valeurs de Z audessous d'un certain terme.

Enfin, si $\mathrm{K}r^2 \pm 2u = mp^2$, et $u^2 - 4 = mq^2$; on prouvera, comme dans les cas précédens, que le nombre m ne peut être qu'un des facteurs de $\mathrm{K}^2 - 4$. Cela posé on aura: $(u + r^2)(u - r^2) = \mathrm{D}mq \cdot \frac{q}{\mathrm{D}}$, par conséquent en mettant $u + r^2 = m\mathrm{D}q$, et $u - r^2 = \frac{q}{\mathrm{D}}$, q sera $= \frac{2r^2\mathrm{D}}{\mathrm{D}^2 - m}$, et $\frac{q}{r^2} = \frac{2\mathrm{D}}{\mathrm{D}^2 - m}$.

Or q et r étant des nombres entiers et premiers entr'eux, on a deux moyens de satisfaire à cette dernière équation selon qu'on prend pour D un nombre entier ou une fraction. Dans le premier cas, on cherchera pour chaque facteur m, un ou plusieurs D, tels que $D^2 - m$, ou $m - D^2 = \square$, examen qui n'a pas la moindre difficulté. Si aucun des facteurs de $K^2 - 4$ ne donne un D en nombres entiers, on abandonnera cette formule pour s'attacher ensuite à l'examen du dernier cas; D = à une fraction. Mais si on trouve une ou plusieurs valeurs de D en nombres entiers, on fera $D^2 - m$, ou $m - D^2 = r^2$ et $q = 2D$, ce qui donne $u = r^2 + \frac{q}{D} = r^2 \pm 2$: où il reste encore à voir, si ces valeurs sont telles que $\frac{Kr^2 \pm 2u}{m} = \square = p^2$, ou non? Dans le premier cas le probleme est résolu et $Z = \frac{rp}{q}$; dans l'autre on procédera à la dernière supposition D = à une fraction. Soit donc $D = \frac{u}{\omega}$, et $\frac{q}{r^2}$ sera $= \frac{2u\omega}{u^2 - m\omega^2}$. Ainsi, en faisant $q = 2u\omega$ et $r^2 = u^2 - m\omega^2$, le probleme est reduit à chercher deux nombres ω et r, qui soient premiers entr'eux et tels que $r^2 + m\omega^2 = \square = u^2$. Mais cette question n'a pas la moindre difficulté; car en employant la méthode dont nous nous sommes servis jusqu'ici, on trouve $\frac{\omega}{r} = \frac{2t\gamma}{\gamma^2 - mt^2}$, où γ et t sont des nombres arbitraires quelconques; ainsi on fera $\omega = 2t\gamma$, et $r = \gamma^2 - mt^2$. En mettant donc pour γ et t tous les nombres naturels, on trouve des valeurs de r et q qui vont toujours en augmentant; et il ne reste plus qu'à voir, s'il y en a parmi elles qui satisfont aussi à l'équation $\frac{Kr^2 \pm 2u}{m} = \square = p^2$. Voilà donc toutes les routes sur lesquelles on doit chercher les valeurs z, dans l'équation $1 + Kz^2 + z^4 = \square$, et sur une ou plusieurs desquelles elles doivent nécessairement se trouver, si cette équation est soluble.

Eclaircissons maintenant cette méthode par quelques exemples.

Exemple I.

§. 6. On cherche une valeur rationelle de Z qui change l'équation : $1 + 13\,Z^2 + Z^4$ en carré.

Ici $K = 13$; donc $K^2 - 4 = 3 \cdot 5 \cdot 11$; par conséquent les valeurs de m sont : 3, 5, 11, 15, 33, 55, et 165. Prenons la plus petite de ces valeurs en faisant $m = 3$. Ainsi $A = V(1 + 3q^2)$. Or la plus petite valeur V de q qui satisfait à cette équation est $= 1$, et $T = V(1 + 3V^2) = 2$; on aura donc en général :

$$A = 2^n + n\tfrac{(n-1)}{2}\,3 \cdot 2^{n-2} + \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\,3^2 \cdot 2^{n-4} + \text{etc. et}$$

$$q = n \cdot 2^{n-1} + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 \cdot 2^{n-3}$$

$$+ \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 3^2 \cdot 2^{n-5} + \text{etc.}$$

et en mettant successivement pour n les nombres 1, 2, 3 etc. on obtient ces deux suites :

$$A = 2, 7, 26, 97. \text{ etc.}$$

$$q = 1, 4, 15, 56 \text{ etc.}$$

Maintenant il faut voir encore, si parmi ces valeurs de A il s'en trouve une qui soit aussi comprise dans la formule $\frac{mp^2 - K}{2}$, c'est-à-dire : dans l'expression $\frac{3p^2 - 13}{2}$; où il est clair qu'on ne peut prendre pour p que des nombres impairs ; ce qui donne les séries suivantes :

$$\tfrac{3p^2 - 13}{2} = -5, 7, 31, 67 \text{ etc. et}$$

$$p = 1, 3, 5, 7. \text{ etc.}$$

où l'on voit, que le terme 7 est commun aux deux séries

qui contiennent les valeurs de A : par conséquent on aura $Z = \frac{p}{q} = \frac{3}{4}$, et cette valeur change l'équation

$$1 + 13\,Z^2 + Z^4 \text{ en } \left(\tfrac{47}{16}\right)^2.$$

Au lieu de calculer la suite des valeurs de $\frac{3p^2 - 13}{2}$, on auroit pû mettre aussi cette formule égale à toutes les valeurs de A, tirées de l'expression $V(1 + 3q^2)$, ce qui eut donné autant d'équations pour p qu'on a calculé de termes dans la série représentant A. Si parmi ces p, il s'en trouve un qui soit rationel, le problême est résolu: si non, on continuera la série des valeurs de A, ou on prendra un autre facteur de $K^2 - 4$, pour l'assujetir à un examen semblable. Mais si tous ces facteurs ne mênent à rien; c'est une preuve, que si l'équation proposée est soluble, ce sera ou par des A entiers plus grands que ceux qui font les derniers termes des séries calculées, ou par des A qui sont des fractions.

Exemple II.

§. 7. La formule qu'on doit reduire en carré, est celle-ci

$$1 + 57\,Z^2 + Z^4.$$

On a donc ici $K = 57$; et $K^2 - 4 = 5 \cdot 11 \cdot 59$; par conséquent les valeurs de m sont 5, 11, 55, 59, 295, 649, 3245. Mais de toutes ces valeurs il n'en resulte aucune pour Z, dont le numérateur et le dénominateur soyent audessous de cent. Puisque donc la supposition A = à un nombre entier, si toute fois elle satisfait à la demande, ne donne que des valeurs exprimées par beaucoup de chiffres, il nous reste encore à parcourir les cas, où A est une fraction. Nous aurons donc (§. 5. N. 1); les deux équations $u = V(4 + mq^2)$ et $\frac{K \pm u}{m} = p^2$; où q ne peut être qu'un nombre impair. Prenons encore pour m la plus petite valeur 5. Donc $q = 1$; mais ce nombre ne donne aucune valeur rationelle pour p, non plus que $q = 3$. Enfin en cherchant des valeurs toujours plus grandes, on

trouve $q = 55$, à qui repond $p = 6$, par conséquent $K = 2 \cdot \frac{p}{q} = \frac{12}{55}$, qui est la même valeur que celle que Mr. Euler a trouvée pour ce cas.

En général, si p est un nombre impair, K étant impair, les formules $\frac{mp^2 - K}{2}$ et $V(1 + mq^2)$ satisferont toujours à la demande, et si p est pair, c'est aux autres qu'il faudra recourir.

§. 8. L'imperfection de nôtre méthode qui ne nous èclaircit pas sur les cas où la solution devient impossible, nous fait recourir à un autre moyen de résoudre l'équation proposée, qui quoiqu'il soit indirecte, et pourtant le seul qui nous reste. Ce moyen consiste, à chercher au lieu de Z, toutes les valeurs possibles de K qui admettent une solution, et à déterminer ensuite les Z qui leur repondent. Les autres K qui se trouveront exclus, seront ceux pour lesquels la solution devient impossible.

§. 9. Reprenons pour cet effet les équations $K \pm 2A = mp^2$, et $A^2 - 1 = mq^2$, trouvées pour le cas $A =$ à un nombre entier, où m est un nombre entier non-carré quelconque, et p et q des nombres entiers. Or la seconde de ces équations donne $A = V(1 + mq^2)$, et cette valeur substituée dans la première la change en $K = mp^2 \pm 2V(1 + mq^2)$. En prenant donc pour m un nombre non-carré quelconque, on trouve par la méthode dont nous avons fait mention plus haut, un nombre infini de valeurs de q en nombres entiers qui rendent l'expression $V(1 + mq^2)$ rationelle; et comme p peut-être prise à volonté; chaque valeur de q donnera une infinité des valeurs différentes de K, pour lesquelles la solution de l'équation proposé est très-facile, Z étant $\frac{mp}{mq} = \frac{p}{q}$.

Cette expression de K est la même que celle que Mr. Euler a trouvée § 7. de son mémoire, par une méthode très-différente de celle dont je me suis servi ici.

Donnons une autre forme à cette valeur de K, en y mettant pour m sa valeur $\frac{A^2-1}{q^2}$, ce qui donne $K = (A^2 - 1)\left(\frac{p}{q}\right)^2 \pm 2A$; ou bien en faisant $2A = n$, et $\frac{p}{q} = 2Z$; $K = (n^2 - 4)Z^2 \pm n$, et cette expression, aussi bien que la première, renferme une infinité de valeur de K. Or A et par conséquent aussi n représente ici un nombre entier tandisque Z peut-être indifféremment un nombre entier ou une fraction. Le problème est donc reduit à chercher toutes les valeurs de n (qu'on suppose ici être un nombre entier) et de Z, qui soyent telles que $(n^2 - 4)Z^2 \pm n$ devienne un nombre entier.

Examinons maintenant aussi le cas: A = à une fraction et posons $\frac{K \pm 2A}{A^2-1} = t^2$ (où t peut-être entier ou une fraction) et il y aura $K = (A^2 - 1)t^2 \pm 2A$. Soit encore la fraction $A = \frac{n}{2}$ (n étant un nombre impair ou une fraction quelconque); par conséquent $K = (n^2 - 4)\left(\frac{t}{2}\right)^2 \pm n = (n^2 - 4)Z^2 \pm n$, si $\frac{t}{2} = Z$. Cette expression de K est parfaitement la même que celle du cas précédant, avec cette différence seulement que la quantité n représente ici aussi une fraction.

Soit donc qu'on regarde A comme nombre entier, ou comme fraction, les valeurs de K, pour lesquelles l'équation $1 + Kz + z^4 = \square$ devient soluble, sont toutes contenues dans l'expression $K = (n^2 - 4)Z \pm n$, pourvûque n et Z signifient non seulement des nombres entiers, mais encore des fractions. Et d'après ce que nous avons demontré plus haut, il ne sauroit y avoir d'autres valeurs de K, pour lesquelles la

solution devient possible, que celles renfermées dans cette formule. Tout revient par conséquent à chercher tous les n et Z rationels qui rendent l'expression $(n^2 - 4)\,Z^2 \pm n$ égale à un nombre entier: et voilà le problème dont nous avons fait mention au commencement de ce mémoire et que nous allons resoudre dans les articles suivans.

Problème

§. 10. Trouver tous les nombres entiers contenus dans la formule: $K = (n^2 - 4)\,Z^2 + n$, si n et Z signifient non seulement des nombres entiers, mais encore des fractions.

Solution.

Il est clair, qu'on ne peut faire que les quatre suppositions suivantes:

1) n et Z des nombres entiers.

2) n un nombre entier et Z une fraction.

3) n une fraction et Z un nombre entier.

4) n et Z des fractions.

I. Le premier cas n'a pas la moindre difficulté, et pour le resoudre il suffit de substituer successivement pour n et Z tous les nombres naturels, combinés de toutes les manières possibles. C'est ainsi qu'on obtient pour K les valeurs suivantes au dessous de 100.

2, 8, 16, 17, 23, 26, 38, 42, 44, 48, 52, 68, 77, 79, 83, 86 89,

auxquelles ont pourroit encore ajouter tous les nombres provenant de la supposition $n = 2N$, et $Z = \frac{1}{2}T$, et contenus dans la formule $(N^2 - 1)\,T \pm 2N$; mais ils se trouveront aussi compris dans le cas suivans.

II. En supposant secondement que n soit un nombre entier et Z une fraction, il est encore très-facile de trouver tous les K possibles. Car si $Z = \frac{p}{q}$, on aura $K = \frac{(n^2-4)p^2}{q^2} \pm n$. Donc puisque n et K sont des nombres entiers, et p et q premiers entr'eux, $n^2 - 4$ sera divisible par q^2; c'est-à-dire: il faut que $\frac{(n+2)(n-2)}{q^2}$ soit égal à un nombre entier. De là résultent les deux cas suivans:

1) $\frac{n+2}{q^2} = \beta$, par conséquent $n - 2 = \beta q^2 - 4$, et
$K = \beta(\beta q^2 - 4) \pm (\beta q^2 - 2)$.

2) $\frac{n-2}{2} = \beta$; donc $n = \beta q^2 + 2$, et
$K = \beta(\beta q^2 + 4) \pm (\beta q^2 + 2)$

où β et q peuvent être des nombres entiers quelconques. A ces valeurs de K on peut encore ajouter toutes celles qui, pour le cas $q = 2Q$, proviennent de la supposition $\beta = \frac{\beta'}{2}$ et qui seront comprises dans ces deux expressions:

$K = \beta'(\beta' Q^2 - 2) \pm 2(\beta' Q^2 - 1)$ et
$K = \beta'(\beta' Q^2 + 2) \pm 2(\beta' Q^2 + 1)$.

Ces formules donnent les nouvelles valeurs suivantes:

7, 12, 13, 14, 19, 24, 31, 33, 34, 39, 43, 49, 56, 62, 64, 66, 78, 92, 94, 98.

III. Si n est une fraction, et Z un nombre entier ou une fraction, on a $Z^2 = \frac{K \pm n}{n^2 - 4}$. Distinguons d'abord les deux cas du signe superieure et du signe inférieur, en examinant premièrement la formule $Z^2 = \frac{K+n}{n^2-4}$.

Comme n est une fraction, nous mettrons cette quantité $= \frac{p}{q}$; (p et q étant des nombres entiers et premiers entr'eux); par conséquent $Z^2 = q\frac{(Kq+p)}{p^2-4q^2}$. Il faut donc que q soit un nombre carré $= v^2$, ainsi $Z^2 = v^2\frac{(Kv^2+p)}{p^2-4v^4}$, et $\frac{Kv^2+p}{p^2-4v^4} = \square$. Or p étant plus grand que $2v^2$, on pourra mettre $p = 2v^2 + w$, où v et w sont premiers entr'eux; donc $\frac{(K+2)v^2+w}{w(4v^2+w)} = \square$. Cette équation ne peut subsister que dans le deux cas suivans:

1) si w est un carré W^2; alors il faudra que $\frac{(K+2)v^2+W^2}{4v^2+W^2} = \square$.

2) si w est un facteur de $K+2$. Supposons $\frac{K+2}{W} = w'$; en ce cas il y aura $\frac{W'v^2+1}{4v^2+W} = \square$.

Chacun de ces deux cas admet encore deux suppositions; car ou le nnmerateur et le dénominateur peuvent être l'un et l'autre des carrés, ou des carrés multipliés par un facteur commun, ce qui fait en tout quatre cas, que nous désignerons par α, β, γ et δ.

α) Soit premièrement $(K+2)v^2 + W^2 = \square = T^2$ et $4v^2 + W^2 = \square = V^2$.

Or la première équation peut être représentée aussi sous la forme $(K-2)v^2 + 4v^2 + W^2 = T^2$, et en y substituant au lieu de $4v^2 + W^2$ sa valeur V^2 de la seconde équation, on obtient $(K-2)v^2 + V^2 = T^2$. Les deux conditions auxquelles il faudra donc satisfaire, sont $4v^2 + W^2 = V^2$, et $(K-2)v^2 + V^2 = T^2$: et voici comment on doit s'y prendre pour cet effet:

Ayant pris pour v un nombre entier quelconque, il sera aisé de trouver un ou plusieurs W premiers à v et tels que

$4v^2 + W^2 = \square = V^2$ (voyez les exemples ci-après). Ces valeurs étant connues, on aura par la seconde condition $K = \frac{(T+V)(T-V)}{v^2} + 2$. Il faut donc que $T+V$, ou $T-V$ soient divisibles par v^2, et si m est le quotient de l'un et l'autre cas, on aura en général $K = m(mv^2 + 2V) + 2$; nouvelle expression de K qui renferme un nombre infini de valeurs.

Exemples.

Soit $v = 2$; par conséquent $4v^2 = 16$. Or $16 = 2 \cdot 8$. Donc $W = \frac{8-2}{2} = 3$, de là $V = 5$, et $K = m(4m \pm 10) + 2$, où m peut-être chaque nombre entier. Ainsi en mettant successivement pour cette quantité les nombres naturels, on obtient les valeurs suivantes de K: 16, 38, 8, 68, 106, 26 etc. On peut aussi faire $m = \frac{M}{2}$, alors K sera $= M(M \pm 5) + 2$, d'où resultent les valeurs 8, 16, 26, 38, 52, 68, 86, mais qui sont deja toutes connues par les formules précédentes.

Si $v = 3$, on aura $4v^2 = 2 \cdot 18$, donc $W = \frac{18-2}{2} = 8$, et $V = 10$, par conséquent $K = m(9m \pm 20) + 2$. Cette formule donne les valeurs suivantes de K: 31, 78, 23, 66 etc.

Soit $v = 4$, et $4v^2$ sera $= 64 = 2 \cdot 32$, donc $W = \frac{32-2}{2} = 15$, $V = 17$, et $K = m(16m \pm 34) + 2$; où l'on peut mettre aussi $m = \frac{M}{2}$, ce qui donne $K = M(4M \pm 17) + 2$; d'où resultent les valeurs 23, 52, 89, 17, 44, 79 etc.

Prenons $v = 5$, par conséquent $4v^2 = 100 = 2 \cdot 50$, donc $W = \frac{50-2}{2} = 24$, $V = 26$, et $K = m(25m \pm 52) + 2$.

Cette formule donne les valeurs 79, 71 etc. parmi lesquelles la valeur 71 est nouvelle.

Enfin mettons $v = 6$, et on aura $4v^2 = 144 = 2 \cdot 72 = 8 \cdot 18$. Donc

1) $W = \frac{72-2}{2} = 35$, $V = 37$ et $K = m(36m \pm 74) + 2$, ou en faisant $m = \frac{M}{2}$; $K = M(9M \pm 37) + 2$, et

2) $W = \frac{18-8}{2} = 5$, $V = 13$, et $K = m(36m \pm 26) + 2 = M(9M \pm 13) + 2$.

La première formule donne les valeurs: 48, 42, et la seconde celle-ci: 24, 64, 12, 44, 94.

β) Examinons maintenant le cas: $(K + 2)v^2 + W^2 = mT^2$, et $4v^2 + W^2 = mV^2$; et si l'on y substitue pour $4v^2 + W^2$ sa valeur mV^2, on obtient $K = m\left(\frac{T^2 - V^2}{v^2}\right) + 2$, laquelle équation combinée avec $4v^2 + W^2 = mV^2$ nous fournit la solution suivante:

Qu'on prenne un nombre non-carré m (la remarque ci après fera voir que ce m doit toujours être de la forme $4g + 1$, ou $2(4g + 1)$), et un carré V^2 quelconque et qu'on décompose, s'il est possible, la quantité mV^2 en deux carrés W^2 et $(2v)^2$. Ces valeurs étant trouvées, on les substituera dans l'équation $K = m\left(\frac{T^2 - V^2}{v^2}\right) + 2$; où il faut que $T^2 - V^2$ soit divisible par v^2. En faisant donc $\frac{T+V}{v^2} = r$, ou $\frac{T-V}{v^2} = r$, on obtient en général $K = mr(rv^2 \pm 2V) + 2$, le signe superieur étant pour le premier, et le signe inférieur pour le second cas.

Si l'on met $m = 1$, la formule se change en $r(rv^2 \pm V) + 2$ qui est celle du cas précédant.

Exemples.

Soit $m = 2$ et $V = 2$, donc $2V^2 = 8$, par conséquent $v = 1$, $W = 2$; donc $K = 2r(r \pm 4) + 2$.

Si $m = 5$, et $V = 10$, on aura $W = 4$, et $v = 11$. Ainsi $K = 5r(121r \pm 20) + 2$.

1. Remarque. Disons ici un mot de la manière de trouver W et v et prenons la valeur $m = 5$ pour exemple. Comme V est arbitraire, on peut le supposer $= 2V'$, il faudra donc que W soit aussi un nombre pair $= 2W'$, et $5V^2 = W^2 + 4v^2$ se changera en $5V'^2 = W'^2 + v^2$. où l'on voit qu'il s'agit de trouver un nombre de la forme $5V'^2$ qui puisse être décomposé en deux carrés W^2 et v^2 premiers entr'eux. Or le coëfficiant 5 étant $= 4 + 1$, on pourroit prendre $V' = 1$, $W' = 1$, et $v = 2$; mais en ce cas les nombres v et V ne seroient pas premiers entr'eux, comme ils le doivent être: On continuera donc le mettre successivement au lieu de V' les valeurs 2, 3, 4 etc. jusqu'à ce qu'on trouve un nombre qu'on puisse décomposer en deux carrés. C'est ainsi qu'en faisant $V' = 2$, on obtient $5V'^2 = 20 = 4 + 16$; mais comme v et V ont encore une mesure commune, nous rejétterons aussi ce cas. Les valeurs $V' = 3$ et $V' = 4$ ne menent à rien non plus, puisque les nombres 45 et 80 qui en resultent ne peuvent être décomposés en deux carrés. Mais en faisant $V' = 5$, on trouve $5V'^2 = 125 = 2^2 + 11^2$, et voilà les valeurs de l'exemple précédant.

2. Remarque. Quant aux valeurs de m, nous allons prouver à présent, qu'il faut toujours qu'elles soient de la forme $4g+1$ ou $2(4g+1)$. Supposons d'abord que m soit impair et de la forme $2n+1$. En ce cas nous aurons $(2n+1)V^2 = W^2 + 4v^2$. Or V peut être pair ou impair. Soit 1) $V = 2V'$. Donc W doit être également un nombre pair $= 2W'$. Par conséquent $(2n+1)V'^2 = W'^2 + v^2$. Or si l'on supposoit ici V' = à un nombre pair; W' et v devroient l'être aussi, donc v et V auroient non seulement une mesure commune, ce qui est contre la supposition; mais on retomberoit encore sur une formule semblable à celle de laquelle on est parti et de cette manière on ne finiroit jamais. Prenons donc $V' = 2V'' + 1$; en ce cas il faut que W' soit pair et v impair, et en mettant $W' = 2W''$ et $v = 2v' + 1$, il y aura:

$$4.(2n+1)V''(V''+1) + 2n = 4(W''^2 + v'(v'+1)).$$

Ainsi n doit être divisible par 2, et par conséquent m sera de la forme $4g+1$. Si 2) V est impair; il est clair que W doit l'être aussi. Mettons donc $W = 2W'+1$, et $V = 2V'+1$ et il y aura:

$$4.(2n+1)V'(V'+1) + 2n = 4(W'(W'+1) + v^2)$$

donc n doit encore être divisible par 2; et par conséquent m sera de la forme $4g+1$.

Prouvons aussi, que si m est pair, il faut qu'il soit de la forme $2(4g+1)$. Soit donc $m = 2n$, et la formule $mV^2 = W^2 + 4v^2$ deviendra $2nV^2 = W + 4v^2$; il faut donc que W soit aussi un nombre pair $= 2W'$, et comme m, par la manière dont cette quantité a été introduite au calcul, n'est ni un carré, ni composée d'un fac-

teur carré, n sera de la forme $2g+1$, et par conséquent V doit être necessairement un nombre pair $= 2V'$, ainsi $2(2g+1)V'^2 = W'^2 + v^2$. Cette formule ne peut subsister à moins que les deux quantités W' et v ne soient à la fois paires, ou impaires. Le premier cas ne peut avoir lieu, puisque V devroit être pair aussi, et que V et v auroient une mesure commune, ce qui est contre la supposition. Outre cela, en faisant $V' = 2V''$, $W' = 2W''$ et $v = 2v'$, on parviendroit à une formule semblable à $mV'^2 = W'^2 + v^2$, où il faudroit recommencer les mêmes suppositions. Mettons donc $W' = 2W'' + 1$, et $v = 2v' + 1$: ce qui donne:

$$2(2g+1)V'^2 = 4W''(W''+1) + 4v'(v'+1) + 2;$$

où l'on voit que V' ne peut être qu'un nombre impair $= 2V'' + 1$; par conséquent

$$4\cdot(2g+1)V''(V''+1) + 2g = 2W''(W''+1) + 2v'(v'+1).$$

Donc g doit être divisible par 2, et m sera de la forme $2(4g+1)$.

Passons maintenant au troisième et au quatrième cas, en examinant l'équation $\frac{W'v^2+1}{4v^2+W} = \square$; $\frac{K+2}{W}$ étant $= W'$; où nous distinguerons encore les deux cas:

$W'v^2 + 1 = \square$ et $4v^2 + W = \square$ et
$W'v^2 + 1 = mT^2$ et $4v^2 + W = mV^2$.

Soit

γ) $W'v^2 + 1 = T^2$, et $4v^2 + W = V^2$. Or la derniere de ces deux équations donne $W = V^2 - 4v^2$, et la premiere $W' = \frac{T^2-1}{v^2} = \frac{(T+1)(T-1)}{v^2}$ et en mettant $\frac{T+1}{v^2}$ ou $\frac{T-1}{v^2} = r$, on obtient $W' = r(rv^2 \pm 2)$; par

conséquent $K = W W' - 2 = r (V^2 - 4v^2) (rv^2 \pm 2) - 2$; où r, V et v peuvent être des nombres entiers quelconques.

Si

δ) $W'v^2 + 1 = mT^2$ et $4v^2 + W = mV^2$, on a $W' = \frac{mT^2 - 1}{v^2}$, et $W = mV^2 - 4v^2$, par conséquent

$$K = \frac{(mT^2 - 1)(mV^2 - 4v^2)}{v^2} - 2.$$

D'où l'on voit que K sera un nombre entier dans les deux cas suivans :

a) Si $\frac{mT^2 - 1}{v^2}$ est un nombre entier

b) si mV^2 est divisible par v^2.

Or le dernier cas ne sauroit avoir lieu, puisque m est un nombre non-carré et que V et v sont premiers entr'eux. Ainsi il ne reste plus que le premier à examiner. Faisons pour cela $\frac{mT^2 - 1}{v^2} = h$, et il y aura $mT^2 - hv^2 = 1$. Cette formule qui contient quatre quantités indéterminées, peut-être resolue facilement; car en prenant T et v à volonté, on trouve par la méthode connue de l'analyse indeterminée, une infinité de valeurs pour m et h. De là il s'en suit que $K = h (mV^2 - 4v^2) - 2$, où V est encore un nombre indéterminé quelconque, pourvû qu'il soit premier à v.

Exemples.

Supposons $T = 5$, et $v = 3$; ainsi on aura $25m - 9h = 1$. Donc $h = 25u + 11$, et $m = 9u + 4$, où la quantité u est arbitraire; en la mettant $= 0$, on trouve les plus petites valeurs de h et m, qui sont 11 et 4. Donc

$K = 11 (4V^2 - 36) - 2$, ou si $V = \frac{1}{2}V'$;

$K = 11 (V'^2 - 36) - 2$.

Si $T = 3$, et $v = 5$, on trouve $h = 9t - 4$; $m = 25t - 11$ et par conséquent les plus petites valeurs sont 5 et 14. Donc $K = 5(14V^2 - 100) - 2$.

Après avoir examiné l'équation $Z^2 = \frac{K+n}{n^2-4}$, il ne nous reste plus qu'à traiter celle-ci : $Z^2 = \frac{K-n}{n^2-4}$ d'une manière semblable. Mettons donc $n = \frac{p}{q}$, et cette expression deviendra : $Z^2 = q\frac{(Kq-p)}{p^2-4q^2}$; par conséquent q doit être un carré v^2; donc $Z^2 = v^2\frac{(Kv^2-p)}{p^2-4v^4}$. Or p étant ici $> 2v^2$ et $< Kv^2$, nous pouvons le mettre $= 2v^2 + W$ où les nombres v et W sont premiers entr'eux; alors il faudra que $\frac{(K-2)v^2-W}{W(4v^2+W)} = \square$; ce qui donne encore quatre cas semblables à ceux que nous avons déjà traités α, β, γ et δ; la différence n'étant que dans le signe du second membre du numérateur qui est ici negatif. Cependant on se tromperoit fort de croire, que les solutions précédentes puissent être appliquées aussi à ces nouveaux cas, et que pour déduire les uns des autres on n'ait qu'à y changer le signe plus en moins. Car on remarquera, que les solutions précédentes sont toutes fondées sur la condition essentielle que le nombre n étoit positif; et en y changeant le signe de ce dernier en *moins*, les calculs précédens fondés sur cette condition ne sauroient plus avoir lieu. La supposition $n =$ à un nombre négatif mérite donc un examen particulier.

Examinons pour cet effet les quatre cas de l'équation $\frac{(K-2)v^2-W}{W(4v^2+W)} = \square$ et mettons

1) $(K-2)v^2 - W^2 = T^2$, et $4v^2 + W^2 = V^2$. Donc $W^2 = V^2 - 4v^2$, et cette valeur substituée dans la pre-

mière équation la change en $(K-2)\,v^2 - V^2 + 4v^2 = T^2$; d'où $K = \frac{T^2 + V^2}{v^2} - 2$. On a donc à satisfaire aux deux conditions: $4v^2 + W^2 = V^2$, et $\frac{T^2 + V^2}{v^2} =$ à un nombre entier: ce qui pourra se faire ainsi: On prendra pour v un nombre entier quelconque, et on cherchera un ou plusieurs nombres W, premiers à v et tels que $4v^2 + W^2 = \square = V^2$, ce qui est toujours possible. Ces nombres étant trouvés, il reste encore à examiner si l'expression $\frac{T^2 + V^2}{v^2}$ peut devenir égale à un nombre entier, ou non? On se servira pour cela d'une méthode aussi simple qu'ingénieuse que Mr. La Grange a donnée pour ce cas, et qui se trouve dans les mémoires de l'Académie de Berlin, année 1768: voyez le mémoire intitulé: nouvelle méthode de resoudre les problemes indéterminés p. 181 etc. Et si la plus petite valeur de T qui satisfait à la condition $\frac{T^2 + V^2}{v^2} =$ à un nombre entier, s'appelle t, on pourra mettre en général $T = t + v^2 n$, n étant un nombre entier quelconque; ar conséquent K sera: $\frac{t^2 + V^2}{v^2} + 2tn + v^2 n^2 - 2$.

S'il étoit impossible de trouver pour un certain v et V un nombre entier T qui rende $T^2 + V^2$ divisible par v^2, on prendroit une autre valeur pour v^2, pour la soumettre au même examen.

Exemples.

Prenons $v = 5$: donc $4v^2$ sera $= 100 = 2 \cdot 50$. Par conséquent $W = \frac{50 - 2}{2} = 24$; et $V = 26$. Maintenant il s'agit de voir, s'il est possible de trouver un T qui rende la quantité $T^2 + 676$ divisible par 25. Or $\frac{T^2 + 676}{25} = 27 + \frac{T^2 + 1}{25}$.

Il faut donc que $\frac{T^2+1}{25}$ soit un nombre entier, et T^2+1 doit d'abord être divisible par 5. Or Mr. La Grange démontre dans le mémoire mentionné, que, s'il existe des T qui remplissent cette condition, il y en a au moins un au-dessous de $\frac{5}{2}$. En mettant donc pour T les nombres 1 et 2, on trouve que $T = 2$ rend la quantité $T^2 + 1$ divisible par 5. Ainsi on peut mettre en général $T = 2 + 5t$, et $\frac{T^2+1}{5}$ sera $= 1 + 4t + 5t^2$. Ce quotient doit être de nouveau divisible par 5; c'est-à-dire $1 + 4t$ doit l'être. Mettons $\frac{1+4t}{5} = u$; donc $t = u + \frac{u-1}{4}$; et $\frac{u-1}{4} =$ à un nombre entier g; par conséquent $u = 4g + 1$, ce qui donne $t = 5g + 1$ et $T = 7 + 25g$, de là on obtient $K = 27 + 14g + 25 \cdot g^2$, où g peut-être un nombre entier quelconque.

Si $v = 13$; on aura $4v^2 = 676 = 2 \cdot 338$. Ainsi $W = \frac{338-2}{2} = 168$, et $V = 170$. Donc

$$\frac{T^2+V^2}{v^2} = \frac{T^2+28900}{13 \cdot 13} = 171 + \frac{T^2+1}{13 \cdot 13};$$

Par conséquent $T^2 + 1$ doit être d'abord divisible par 13. Or s'il existe des valeurs de T qui satisfont à cette condition, il y en aura au moins une au-dessous de $\frac{13}{2}$. En mettant donc successivement pour T les nombres 1, 2, 3 jusqu'à 6, on trouve que $T = 5$ change la quantité $\frac{T^2+1}{13}$ en 2. Ainsi il y aura en général $T = 5 + 13t$, et $\frac{T^2+1}{13}$ sera $= 2 + 10t + 13t^2$, lequel quotient doit être de nouveau divisible par 13; c'est-à-dire $2 + 10t$ doit l'être. Donc $t = 13f - 8$ et $T = 169f - 99$; où f peut-être un nombre entier quelconque: De cette expression nait celle de $K = 227 - 2574f + 13f^2$.

Soit $v = 6$, donc $4v^2 = 144 = 8 \cdot 18 = 4 \cdot 36 = 2 \cdot 72$. Ainsi on obtiendra trois valeurs différentes pour W et V. D'abord il y a $W = \frac{18-8}{2} = 5$, et $V = 13$. Ensuite on aura aussi $W = \frac{36-4}{2} = 16$; mais que nous rejetterons, puisque v et W ne sont pas premiers entr'eux; et enfin il y a $W = \frac{72-2}{2} = 35$, et $V = 37$. Mettons $V = 13$, et $\frac{T^2-169}{36}$, c'est-à-dire $\frac{T^2+25}{36}$ devra être un nombre entier. Il faut donc que $T^2 + 25$ soit divisible par 6. Donc au moins une valeur de T sera $< \frac{6}{2}$: mais si l'on essaïe pour T les valeurs 1, 2 et 3, aucune ne satisfait à cette condition: par conséquent il n'y en a point non plus audessus de $\frac{6}{2}$, et l'expression $T^2 + 25$ ne pourra jamais être rendue divisible ni par 6, ni encore moins par 36. Il en est de même de la seconde valeur $V = 37$. Donc la valeur $v = 6$ ne donne aucune expression pour K, non plus que les valeurs 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 12. La supposition $v = 10$ donne la même formule pour K que la supposition $v = 5$.

Passons au second cas de l'équation $\frac{(K-2)v^2 - W^2}{4v^2 + W^2} = \square$, en faisant

$$2)\ (K-2)v^2 - W^2 = mT^2, \text{ et } 4v^2 + W^2 = mV^2.$$

Cette dernière équation donne $W^2 = mV^2 - 4v^2$, et cette valeur substituée dans la première la change en $(K+2)v^2 = m(V^2+T^2)$, par conséquent: $K = m\frac{(V^2+T^2)}{v^2} - 2$, laquelle équation combinée avec $mV^2 = W^2 + (2v)^2$ nous conduit à la solution suivante: On prendra deux nombres m et V^2, dont on puisse décomposer le produit mV^2 en deux carrés W^2 et $(2v)^2$, tels que W et v soient premiers entr'eux; ce qui n'a

point de difficulté. Ces nombres étant trouvés, on examinera par la méthode détaillée dans les exemples du cas précédent, s'il existe un nombre entier T qui rende la quantité $T + V^2$ divisible par v^2. S'il s'en trouve une, on en déduira une infinité d'autres, qui donneront autant de valeurs différentes pour $K = \left(\frac{T^2 + V^2}{v^2}\right) - 2$. Mais s'il ne s'en trouve point, on procédera à une autre valeur de m ou de V.

On remarquera que nous avons déjà démontré plus haut que l'équation $m V^2 = W^2 + (2v)^2$ ne peut subsister dans l'hypothese que W et v soient des nombres premiers entr'eux, à moins que m ne soit de la forme $4g + 1$ ou $2(4g + 1)$.

Exemples.

Soit $m = 17$, $V = 2V'$, et $W = 2W'$; par conséquent il y aura : $17 V'^2 = v^2 + W'^2$. Prenons ici $V' = 5$, donc $17 V'^2 = 425 = 13^2 + 16^2$. Ainsi $v = 13$, et $W' = 16$. Il ne s'agit plus maintenant que de trouver un T, tel que $\frac{T^2 + V^2}{v^2}$, c'est-à-dire $\frac{T^2 + 100}{13 \cdot 13}$ soit un nombre entier. On verra donc d'abord s'il y a une valeur $T < \frac{13}{2}$ qui rende la quantité $T^2 + 100$ divisible par 13. Or en essayant pour T les nombres 1, 2, on trouve que $T = 2$ satisfait à cette condition; par conséquent on peut mettre en général $T = 2 + 13t$; donc $\frac{T^2 + 100}{13 \cdot 13} = \frac{8 + 4t + 13t^2}{13}$; où l'on voit que $8 + 4t + 13t^2$, ou plutôt $4(2 + t)$ doit être de nouveau divisible par 13: Donc $\frac{t + 2}{13} = h$, et $t = 13h - 2$; par consequent $T = 13h - 24$, ce qui donne $\frac{T^2 + 100}{13^2} = 4 - 48h + 13^2 h^2$, et $K = 17(4 - 48h + 13^2 h^2) - 2$ où h peut être chaque nombre entier.

Soit $m = 53$ et $V = 5$. Donc $mV^2 = 53 \cdot 25 = 1325 = 4 \cdot 17^2 + 13^2 = 4v^2 + W^2$; par conséquent $v = 17$, et $W = 13$. Ainsi $\frac{T^2 + 25}{17 \cdot 17} =$ à un nombre entier. Donc $T^2 + 25$ doit être divisible par 17. et pour voir si cela est possible, il suffit d'essayer pour T tous les nombres au dessous de $\frac{17}{2}$. Or $T = 3$ satisfait à cette condition ; par conséquent aussi la valeur générale $T = 3 + 17t$; donc $\frac{T^2 + 25}{17 \cdot 17} = 2\frac{(1 + 3t)}{17} + t^2$. Ainsi $1 + 3t$ doit être de nouveau divisible par 17 : et pour cela il faut que t soit de la forme $17h - 6$: par conséquent $T = 17^2 h - 99$ et $K = 53\ (34 - 2 \cdot 99\ h + 17^2 h^2) - 2$.

3) Le troisième cas de l'équation $\frac{(K-2)v^2 - W}{W(4v^2 + W)} = \square$ que nous avons à examiner, est celui-ci : $W' v^2 - 1 = T^2$, et $4v^2 + W = V^2$; W' étant $= \frac{K-2}{W}$. Or $W' = \frac{T^2 + 1}{v^2}$, et $W = V^2 - 4v^2$, donc $K - 2 = WW' = \frac{(T^2 + 1)(V^2 - 4v^2)}{v^2}$ et $K = \frac{(T^2 + 1)(V^2 - 4v^2)}{v^2} + 2$. Par conséquent $T^2 + 1$ doit être divisible par v^2. Soit $\frac{T^2 + 1}{v^2} = n$, n étant un nombre entier quelconque, et il y aura : $T^2 - nv^2 = -1$. En prenant donc pour n tel nombre non-carré qu'on voudra, la méthode que M. la Grange ensigne dans son excellente traduction des Elemens d'Algèbre de Mr. Euler (voyèz les additions Chap. II. §. 23 — 41) donnera toutes les v leurs possibles de T et de v, si cette équation est soluble en nombres entiers. Connoissant ces valeurs, on aura $K = n(V^2 - 4v) + 2$, où V peut être pris à volonté.

Exemples.

Si $m = 2$, on trouve pour T les valeurs : 1, 7, 41 etc. auxquelles repondent les valeurs suivantes de v : 1, 5, 29 etc. d'où naissent pour K les expressions :

$$K = 2(V+2)(V-2)+2.$$
$$K = 2(V+10)(V-10)+2.$$
$$K = 2(V+58)(V-58)+2 \text{ etc.}$$

Soit $m = 3$; ici la méthode de Mr. la Grange fait voir qu'il est impossible de résoudre l'équation $T^2 - 3v^2 = -1$.

Mais en mettant $m = 5$, on obtient pour T les valeurs : 2, 38, 378 etc. et pour v celles-ci : 1, 17, 169 etc. par conséquent

$$K = 5(V+2)(V-2)+2.$$
$$K = 5(V+34)(V-34)+2.$$
$$K = 5(V+338)(V-338)+2 \text{ etc.}$$

4) Enfin le dernier cas de l'équation $\frac{(K-2)v^2 - W}{W(4v^2+W)} = \square$ est : $W v^2 - 1 = m T^2$, et $4v^2 + W = m V^2$, W' étant comme dans le cas précédent $= \frac{K-2}{W}$. On trouve donc

$$K = W'W + 2 = \frac{(mT^2+1)(mV^2-4v^2)}{v^2} + 2.$$

Ainsi $mT + 1$ doit être divisible par v^2. Mettons $\frac{mT^2+1}{v^2} = n$; et nous aurons $nv^2 - mT^2 = 1$. En prenant donc successivement pour v et T tous les nombres entiers combinés de toutes les manières possibles, chaque valeur de v et T en fournira

une infinité pour m et n et par conséquent aussi pour K qui est $= n\,(m\,V^2 - 4v^2) + 2$, où V peut encore être pris à volonté.

Exemple.

Si $v = 7$, et $T = 11$, on aura $49n - 121m = 1$; cette équation résolue suivant la méthode connue de l'Analyse indéterminée, donne pour m et n les valeurs générales: $49f + 17$ et $121f + 42$. Les plus petites de ces valeurs sont $m = 17$ et $n = 42$, d'où nait l'expression :

$$K = 42\,(17\,V^2 - 196) + 2.$$

§. 11. Voilà donc la solution complette du probleme de M Euler, puisque les formules des articles précédens, dégagées de toutes les fractions, renferment toutes les valeurs de K pour lesquelles il est possible de changer l'expression $1 + Kz^2 + z^4$ en carré. Les autres valeurs de K, qui ne peuvent être déduites d'aucune de ces formules, forment une classe particulière de nombres, pour lesquels il est absolument impossible de trouver des z rationels. Ainsi, pour déterminer tous les nombres entiers K qui rendent la formule proposée soluble, et qui sont contenus entre les termes 1 et M. il est nécessaire de parcourir toutes les expressions de K, trouvées ci dessus, en substituant successivement dans chacune d'elles tous les nombres indiqués dans les articles précédens, jusqu'à ce qu'on parvienne à un résultat ou valeur de $K = \text{ou} > M$. (ce qui doit toujours arriver, puisque ces valeurs resultant de ces différentes expressions vont toujours en augmentant). De cette manière on obtient une suite de valeurs de K qui admettent toutes une solution de l'équation donnée, tandis que les autres nombres qui ne seront point compris dans cette suite, formeront les cas irréductibles. Telle est donc la nature de cette question, qu'elle

ne peut être resolue par une seule équation, mais qu'il en faut examiner toutes celles que nous avons données et qui embrassent tous les cas possibles. Au reste pour s'épargner la peine, de faire pour chaque K donné les mêmes calculs par une répétition continuelle, il seroit bon de calculer une fois pour toujours toutes ces valeurs jusqu'à un certain terme et d'en faire une Table pareille à celle de M. Euler, en y joignant les valeurs de Z qui leur repondent, et qu'on n'aura pas de peine à trouver, ayant $Z^2 = \frac{K \pm 2A}{A^2 - 1}$.

NOVA DEMONSTRATIO THEOREMATIS,

NEC SUMMAM, NEC DIFFERENTIAM

DUORUM BIQUADRATORUM BIQUADRATUM

ESSE POSSE.

Auctore

C. F. KAUSLER.

Conventui exhibit. die 4. Octobr. 1799.

Celebratissimum penes mathematicos est illud Fermatii theorema: nec summam, nec differentiam duorum numerorum potestatis n, numerum ejusdem potestatis esse posse, excepto unico casu $n = 2$; demonstratio autem generalis a nemine adhuc tentata fuit. Magnus hic Geometra se ejusmodi demonstrationem invenisse quidem affirmat, quae vero publici juris nunquam facta est. Equidem credo, si unquam exstiterit, eam nihil aliud, nisi inductionem fuisse. Nostro saeculo Celeberr. Eulerus, qui et hanc Analyseos partem pulcherrimis inventis exornavit, in Elementis suis Algebrae Tom II, haec theoremata specialia demonstravit: „Nec summam nec differentiam duorum Cuborum Cubum, seu Biquadratorum Quadratum esse posse.“ At methodus qua utitur, difficillime ad altiores pote-

states extenditur. Quare spero, tentamen, quod cultoribus hujus scientiae examinandum nunc propono, nec superfluum neque injucundum fore. Ita enim, ut mihi quidem persuadeo, nihil amplius desiderandum relinquitur, et sperandum est, hac via ad demonstrationem generalem pulcherrimi illius theorematis perveniri posse. Antequam autem ad ipsam demonstrationem accedamus, nonnulla praemittenda sunt, quae pertractationem non parum adjuvabunt.

I. Theorema.

Impossibile est tales invenire valores integros pro x et y, qui reddant formulas $x^2 + y^2$ et $x - y^2$ simul quadrato aequales; vel si prima est quadratum, secunda quadratum nunquam esse poterit, et vice versa.

Demonstratio.

In analysi demonstratur, infinitos dari numeros integros quadratos x^2 et y^2, quorum summa aut differentia quadrato aequales sunt; omnes autem istos valores ipsius x et y aequationi $x^2 + y^2 = \square$ satisfacientes, ad aequationem $x^2 - y^2 = \square$ solvendam minime idoneos esse, et vice versa, sequenti modo patebit: Considero numeros x et y tanquam inter se primos, nam si haberent factorem communem t; tam summa $x^2 + y^2$, quam differentia $x^2 - y^2$ per t^2 dividi posset, et quotientes $X^2 + Y^2$ et $X^2 - Y^2$ priori summae et differentiae plane similes essent, X et Y denotantibus numeros inter se primos. Hisce positis,

I. quaeramus expressiones generales, omnes ipsius x et y valores integros et inter se primos involventes qui reddant $x^2 + y^2 = \square$. Sit itaque $x^2 + y^2 = z^2$, et erit $x^2 = (z + y)(z - y)$. Haec autem aequatio non nisi sequentibus subsistere potest casibus:

1) si $z+y=P^2$ et $z-y=Q^2$, vel

2) si $z+y=mP^2$, et $z-y=mQ^2$.

Si prius, scilicet si $z+y=P^2$, et $z-y=Q^2$: habebimus $z=\frac{P^2+Q^2}{2}$, $y=\frac{P^2-Q^2}{2}$, et $x=PQ$; ubi P et Q denotant numeros impares quoscunque inter se primos; sic enim fiet, ut tam z quam y, ideoque et x sint numeri integri et inter se primi. Si autem $z+y=mP^2$, et $z-y=mQ^2$; erit $z=m\left(\frac{P^2+Q^2}{2}\right)$, $y=m\left(\frac{P^2-Q^2}{2}\right)$, et $x=mPQ$. Jam cum x et y primi inter se esse debeant; factor m non nisi 2 esse poterit, unde hi valores oriuntur: $z=P^2+Q^2$, $y=P^2-Q^2$; $x=2PQ$, ubi P et Q significant numeros quoscunque, quorum differentia vel summa sit impar, scilicet quorum alter sit par, alter vero impar.

II. Eodem modo demonstrari potest, in aequatione $x^2-y^2=\square$, esse vel:

3) $x=p^2+q^2$, et $y=p^2-q^2$, ubi p et q numeri quicunque inter se primi sunt vel

4) $x=\frac{p^2+q^2}{2}$ et $y=\frac{p^2-q^2}{2}$; p et q denotantibus numeros impares et inter se primos.

Omnes autem valores possibiles ipsius x et y, aequationem $x^2+y^2=\square$ solventes, necessario in formulis 1 et 2, illos vero pro $x^2-y^2=\square$ in 3 et 4 contineri, ex natura rei patet.

Superest nunc, ut probemus, valores pro x et y formulis 3 et 4 contentos illis, qui ex 1 et 2 derivantur, nunquam aequales esse posse.

Quodsi enim valores $p = p'$ et $q = q'$ ex formulis $x = p^2 + q^2$ et $y = p^2 - q^2$ deducti et aequationi $x^2 - y^2 = \square$ satisfacientes conditioni $x^2 + y^2 = \square$ quoque satisfacerent; necesse esset, ut simul vel in $x = 2PQ$, et $y = P^2 - Q^2$, vel in $x = PQ$, et $y = \frac{P^2 - Q^2}{2}$ continerentur. Si prius, erit $y = p'^2 - q'^2 = P^2 - Q^2$, et $x = p'^2 + q'^2 = 2PQ$ Sed in aequatione $x^2 - y^2 = \square$ valori $y = p'^2 - q'^2$ respondet valor $x = p'^2 + q'^2$. Jam si $p'^2 - q'^2$ simul $= P^2 - Q^2$, eidem y valorem $x = P^2 + Q^2$ respondere necesse est, atque ita erit $P^2 + Q^2 = 2PQ$, unde sequitur esse $P - Q = 0$, sive $P = Q$, quod est contra suppositionem. Si vero posterius, scilicet, si valores $x = p'^2 + q'^2$ et $y = p'^2 - q'^2$, aequationem $x^2 - y^2 = \square$ solventes, aequationi $x^2 + y^2 = \square$ quoque satisfacerent, et ex formulis $x = PQ$, et $y = \frac{P^2 - Q^2}{2}$ derivari possent; haberemus $y = p'^2 - q'^2 = \frac{P^2 - Q^2}{2}$. Sunt autem numerorum p' et q', ut ex iis quae supra diximus patet, alter par, alter impar; idcirco $y = p'^2 - q'^2$ impar; P et Q vero numeri impares esse debent; ideoque $\frac{P^2 - Q^2}{2} = y$ erit numerus par. Ergo numerus par numero impari aequalis esset, quod impossibile est. Unde concludimus, valores x et y, aequationem $x^2 - y^2 = \square$ solventes, et ex formulis $x = p^2 + q^2$, et $y = p^2 - q^2$ derivatos, aequationi $x^2 + y^2 = \square$ non convenire, quia nec in expressione $x = 2PQ$, et $y = P^2 - Q^2$, nec in $x = PQ$ et $y = \frac{P^2 - Q^2}{2}$ continentur. Eodem prorsus modo demonstrari potest, valores $x = \frac{p^2 + q^2}{2}$ et $y = \frac{p^2 - q^2}{2}$ aequationi $x^2 - y^2 = \square$ satisfacientes, aequationi $x^2 + y^2 = \square$ solvendae minime inservire, quia nec in formulis $x = PQ$, et $y = \frac{P^2 - Q^2}{2}$, nec in formulis $x = 2PQ$ et $y = P^2 - Q^2$ continentur. Expressiones autem 1); 2); 3); 4) omnes valores possibiles ipsius x et y includunt. Ergo theorema propositum universaliter demonstratum est.

II. Theorema.

Nec summa nec differentia duorum biquadratorum biquadratum esse potest.

Demonstratio.

Sint x^4 et y^4 numeri biquadratici quicunque, et probandum nobis erit, nullo modo $x^4 \pm y^4 = z^4$ fieri posse. Sufficiet autem unum tantum horum casuum probare; nam si impossibile est esse $x^4 - y^4 = z^4$; impossibile quoque erit, $y^4 + z^4 = x^4$ fore. Ceterum numeros x, y, z tanquam integros et inter se primos spectare licebit: si enim essent fracti, scilicet $x = \frac{p}{q}$, et $y = \frac{m}{n}$; formula $x^4 \pm y^4$ abiret in hanc: $\frac{p^4 n^4 \pm q^4 m^4}{q^4 n^4} = z^4$, proinde et $p^4 n^4 \pm q^4 m^4$, scilicet $P^4 \pm Q^4$ (positis $p n = P$, et $q m = Q$) biquadrato aequale esse deberet, qui casus ad suppositionem primam redit. Si autem x et y factorem haberent communem; evidens est, totam aequationem per hunc factorem dividi, atque ita quotientem ad primam formulam $x^4 \pm y^4 = z^4$ reduci posse.

Ponamus igitur, x et y esse numeros integros et inter se primos, ac nunc demonstrandum est, aequationem $x^4 + y^4 = z^4$ nequaquam subsistere posse, id quod sequenti modo patebit:

Si $x^4 + y^4 = z^4$; erit $x^4 = (z^2 + y^2)\ (z^2 - y^2)$, ideoque x productum ex factoribus biquadraticis esse debebit. Sint hi factores m et n, et aequatio $x^4 = (z^2 + y^2)\ (z^2 - y^2) = m^4 n^4$ per sequentes tantum suppositiones explicari poterit:

1°) $z^2 + y^2 = m^4 n^4$ et $z^2 - y^2 = 1$.

2°) $z^2 + y^2 = m^3 n^3$ et $z^2 - y^2 = mn$.

3°) $z^2 + y^2 = m^2 n^2$ et $z^2 - y^2 = m^2 n^2$.

4°) $z^2 + y^2 = mn$ et $z^2 - y^2 = m^3 n^3$.

5°) $z^2 + y^2 = m^4$ et $z^2 - y^2 = n^4$.

6°) $z^2 + y^2 = m^3$ et $z^2 - y^2 = mn^4$

7°) $z^2 + y^2 = m^2$ et $z^2 - y^2 = m^2 n^4$.

8°) $z^2 + y^2 = m$ et $z^2 - y^2 = m^3 n^4$.

9°) $z^2 + y^2 = 1$ et $z^2 - y^2 = m^4 n^4$.

10°) $z^2 + y^2 = m^3 n^4$ et $z^2 - y^2 = m$.

11°) $z^2 + y^2 = m^2 n^4$ et $z^2 - y^2 = m^2$.

12°) $z^2 + y^2 = mn^4$ et $z^2 - y^2 = m^3$.

13°) $z^2 + y^2 = mn^2$ et $z^2 - y^2 = m^3 n^2$.

14°) $z^2 + y^2 = mn^3$ et $z^2 - y^2 = m^3 n$.

15°) $z^2 + y^2 = m^2 n$ et $z^2 - y^2 = m^2 n^3$.

16°) $z^2 + y^2 = m^4 n$ et $z^2 - y^2 = n^3$.

17°) $z^2 + y^2 = m^3 n$ et $z^2 - y^2 = mn^3$.

18°) $z^2 + y^2 = m^4 n^2$ et $z^2 - y^2 = n^2$.

19°) $z^2 + y^2 = m^3 n^2$ et $z^2 - y^2 = mn^2$.

Omnes autem hae suppositiones partim ad absurdum, partim ad impossibile ducunt, quod ita demonstrabo:

Suppositio

1ma) est impossibilis, ex theoremate praemisso, et quia non dantur duo quadrata in numeris integris, quorum differentia sit $= 1$.

2da) est impossibilis, quia $z^2 - y^2$ non est radix cubica summae $z^2 + y^2$; scilicet $z^2 + y^2$ non est $= z^6 - 3z^4y^2 + 3z^2y^4 - y^6$. Nam $z^6 > z^2$; porro $z > y$, ergo et $z^2 > y^2$, et $z^2(y^2-1) > y^2(y^2-1)$; proinde $3z^2(y^2-1) > 3y^2(y^2-1)$, sive $> 3y^4 - 3y^2$; per consequens $3z^2(y^2-1) - y^4 > 2y^4 - 3y^2$. Est vero $2y^4 - 3y^2 > y$, ergo et $3z^2(y^2-1) - y^4$ multo majus quam y; ideoque $y^2(3z^2(y^2-1) - y^4) > y^3$, et proinde multo majus quam y^2 erit. Vidimus itaque z^6 esse $> z^2$, et $-3y^2z^2 + 3y^4z^2 - y^6 > y^2$; ergo $z^6 - 3z^4y^2 + 3z^2y^4 - y^6$ multo majus quam $z^2 + y^2$ esse debet.

3tia) est impossibilis, quia summa $z^2 + y^2$ differentiae $z^2 - y^2$ nunquam aequalis esse potest, nisi casu $y = 0$.

4ta) est absurda; nam summa non est minor differentia eorundem numerorum, ac $mn < m^3n^3$.

5ta) est impossibilis, quia ex theoremate praecedente patet, expressiones $z^2 + y^2$ et $z^2 - y^2$ simul quadrata et proinde biquadrata non esse posse.

6ta) est impossibilis; quodsi enim $z^2 + y^2 = m^3$, et $z^2 - y^2 = mn^4$ essent; haberemus quoque, $z^2 + y^2 + z^2 - y^2$ sive $2z^2 = m(m^2 + n^4)$, et m vel 2 vel factor ipsius z esse deberet. Si prius; erit $y^2 = m^2 - n^4 = 4 - n^4$, ergo $n = 1$, et y irrationale. Si autem posterius; perspicuum est, numerum m ob $2y^2 = m(m^2 - n^4)$ factorem esse quantitatis y, quod est contra hypothesin, cum z et y sint numeri inter se primi.

7ma) est absurda, cum summa minor non esse possit differentia eorundem numerorum.

8va) est absurda ob eandem rationem.

9na) est absurda ob rationem N. 7. allegatam.
10ma) est impossibilis, et hic casus ad casum 6tum reduci potest
11ma) est impossibilis, secundum theorema praemissum.
12ma) est impossibilis, quia hic casus ad casum 6 redit.
13tia) est absurda ob rationem N. 7.
14ta) est impossibilis, vid. cas. 6.
15ta) est absurda, vid. supposit: 7.
16ta) est impossibilis ob rationem N. 6. allegatam.
17ma) est impossibilis ob eandem causam.
18va) est impossibilis; vid. theorema praemissum.
19na) est impossibilis, ob rationem casu 6. allegatam.

Cum autem hae suppositiones omnes casus possibiles involvant; evidenter patet, non dari duos numeros integros et inter se primos, quorum biquadrata invicem addita seu detracta biquadratum faciant, et ex iis, quae initio demonstrata sunt, sequitur, nec dari numeros fractos hac proprietate gaudentes.

NOVA DEMONSTRATIO THEOREMATIS, NEC SUMMAM, NEC DIFFERENTIAM DUORUM CUBORUM CUBUM ESSE POSSE.

Auctore
C. F. KAUSLER.

Conventui exhibita d. 7. Nov. 1799.

I. Theorema.

Impossibile est, expressiones $x - y$ et $x^2 + xy + y^2$ simul cubos fieri posse, si x et y numeri integri esse supponantur.

Demonstratio.

Si hae expressiones cubis aequales essent; haberentur aequationes: $x - y = m^3$, et $x^2 + xy + y^2 = z^3$; ex priori sequeretur $x = m^3 + y$, qui valor in posteriori substitutus, eam in: $3y^2 + 3m^3 y + m^6 = z^3$ transmutat. Haec autem aequatio quadratica nobis praebet valorem: $y + \frac{m^3}{2} = \frac{\sqrt{(12z^3 - 3m^6)}}{6}$, et perspicuum est, expressionem sub signo radicali rationalem fieri debere. Ponamus igitur: $12z^3 - 3m^6 = Q^2$, ubi Q per 3 divisibile esse necesse est. Sit $Q = 3R$; erit $z^3 = \frac{3R^2 + (m^3)^2}{4}$. Jam cum z numerum integrum signi-

ficet, summa $3R^2 + (m^3)^2$ per 4 divisibilis erit, quod fit 1°) si tam R quam m numeros pares significent, et 2°) si hae quantitates impares accipiantur. Si prius, scilicet si $R = 2P$ et $m = 2M$; aequatio $z^3 = \frac{3R^2 + (m^3)^2}{4}$ abit in hanc: $z^3 = 3P^2 + (4M^3)^2$ et quaestio eo deducta est, an dentur tales valores integri numerorum P et M, ut formula $3P^2 + (4M^3)^2$ cubo aequalis fiat? Ad eam solvendam, egregiam solutionem Celeber. Euleri, quam in Elementis suis Algebrae Tom. II. Capit. XII. de transformatione formulae $ax^2 + cy^2$ in quadrata et in potestates altiores dedit, in subsidium vocemus. Demonstrat enim loco citato §. 188. formulam $ax^2 + cy^2$ fieri Cubum positis $x = ap^3 - 3cpq^2$ et $y = 3ap^2q - cq^3$, p et q denotantibus nnmeros integros quoscunque, et ex methodo, qua utitur, patet has formulas omnes valores possibiles numerorum x et y huic conditioni satisfacientes necessario includere. Quodsi nunc adplicemus haec ad formulam $3P^2 + (4M^3)^2 = z^3$; habebimus $a = 1$ et $c = 3$, proinde x vel $4M^3 = p^3 - 9pq^2$, et y vel $P = 3p^2q - 3q^3$. Ex aequatione $M^3 = \frac{p^3 - 9pq^2}{4} = \frac{p(p^2 - 9q^2)}{4}$ sequitur, numerum 4 esse factorem vel numeri p vel quantitatis $p^2 - 9q^2$. Si 4 est factor ipsius p; ponamus $p = 4n$, et erit $M^3 = n(16n^2 - 9q^2)$, unde concludimus, n esse factorem numeri M. Sit itaque $M = nN$, et aequatio nostra evadet: $n^2N^3 + 9q^2 = 16n^2$, haec vero aequatio impossibilis est pro omnibus valoribus numeri N, qui majores sunt numero 2. Quod valores autem $N = 1$ et $N = 2$ attinet; pariter perspicuum est, hanc aequationem subsistere non posse, cum priori casu quadratum $9q^2$ numero $15n^2$ aequale esse nequeat, posteriori vero casu

$9q^2 = 8n^2$ esse deberet, quod ex eadem ratione impossibile est.

Si numerus 4 factor quantitatis $p^2 - 9q^2$ est; p factor ipsius M esse debebit. Posito itaque $M = pN$, aequatio $4M^3 = p(p^2 - 9q^2)$ mutabitur in hanc: $4p^2N^3 + 9q^2 = p^2$, cujus impossibilitas per se patet, cum N fit numerus integer et positivus.

Transeamus nunc ad formulam $z^3 = \frac{3R^2 + (m^3)^2}{4}$ sub hypothesi, quod numeri integri R et m sint impares. Hoc casu habebimus $8z^3 = 6R^2 + 2(m^3)^2$, vel $(2z)^3 = 6R^2 + 2(m^3)^2$, et solutio Euleri, cujus mentionem fecimus, ad hanc expressionem adplicata, dabit valores $x = R = 6p(p^2 - q^2)$ et $y = m^3 = 2q(9p^2 - q^2)$. Cum vero hi valores numerorum R et m (qui omnes solutiones possibiles includunt), sint numeri pares; suppositio prima subsistere nequit, nec dantur numeri impares R et m qui reddant formulam $\frac{3R^2 + (m^3)^2}{4}$ cubo aequalem. Ergo et impossibile est, expressiones $x - y$ et $x^2 + xy + y^2$ simul cubo aequales fieri posse.

II. Theorema.

Numeri formae $T(T+1)$ simul in expressione $9W^3 + 9W^2 + 3W$ contineri non possunt, positis T et W numeris quibuscunque integris et positivis.

Demonstratio.

Quaevis harum expressionum seriem numerorum integrorum in infinitum crescentium praebet, si loco T et W omnes numeri naturali progressione progredientes in iis substituantur. Nullum autem terminum primae seriei simul terminum secundae esse posse, id est, formulas $T(T+1)$ et $9W^3 + 9W^2 + 3W$ nunquam inter se aequales esse, si T et W significent numeros integros positivos, nunc demonstravimus.

Quodsi $T(T+1) = 9W^3 + 9W^2 + 3W = 3W(3W^2 + W + 1)$ esset; haec aequalitas non nisi per sequentes explicari posset casus: aut enim esset

1°) quantitas 3W vel factor ipsius T, vel

2°) factor summae $T+1$, vel

3°) numerus 3 esset factor numeri T, et W factor numeri $T+1$, vel tandem

4°) numerus W factor quantitatis T et numerus 3 factor summae $T+1$.

Si 1°) quantitas 3W esset factor numeri T; haberemus $T = 3WV$, significante V numerum quendam integrum et positivum; proinde $T(T+1)$ esset $= 3WV(3WV+1)$; haec vero expressio formulae $3W(3W^2 + 3W + 1)$ aequalis esse deberet, unde sequitur: $V(3WV+1) = 3W(W+1) + 1$, vel $V - 1 = 3W(W + 1 - V^2)$, et quantitatem $V - 1$ per 3W divisibilem esse necesse est. Sit jam $V - 1 = 3WR$, hincque $V = 3WR + 1$, et aequatio $V - 1 = 3W(W + 1 - V^2)$ abit in:

$3WR = 3W(W+1-V^2)$, seu $R = W+1-(3WR+1)^2$, unde $(3WR+1)^2 + R = W+1$; hanc vero aequationem impossibilem esse, per se patet.

2°) Si 3W esset factor numeri $T+1$, vel si $T+1 = 3WV$, aequatio $T(T+1) = 3W(3W^2+3W+1)$ abiret in hanc: $3WV(3WV-1) = 3W(3W^2+3W+1)$, vel in: $3WV^2 - 3W^2 - 3W = V+1$, et numerus $V+1$ per 3W divisibilis esse deberet. Sit $V+1 = 3WR$ hincque $V = 3WR-1$, et erit $V^2 - W - 1 = R$; proinde ob $V = 3WR-1$ erit $(3WR-1)^2 - W - 1 = R$; ideoque $9W^2R^2 - 6WR = W+R$; unde patet, R per W esse divisibile. Posito itaque $R = WU$, haec aequatio induit formam $3UW(3UW^2-2) = 1+U$ cujus impossibilitas perspicua est. Quicunque enim valor in numeris integris numeris U et W tribuatur, terminus $3UW(3UW^2-2)$ semper major erit termino $1+U$.

3°) Si autem 3 esset factor numeri T, et W factor numeri $T+1$, scilicet si ssset $T = 3V$, et $T+1 = 3V+1 = WR$; haberemus $3VWR = 3W(3W^2+3W+1)$, ex quo sequitur $VR = 3W^2+3W+1$. Sed $3V+1 = WR$, ergo $V = \frac{WR-1}{3}$, et $VR = \frac{WR^2-R}{3}$; proinde $\frac{WR^2-R}{3} = 3W^2+3W+1$, et $R^2W - 9W^2 - 9W = R+3$, et $R+3$ per 3W erit divisibile. Sit $R+3 = WU$; tunc aequatio praecedens abit in: $(WU-3)^2 - 9W - 9 = U$, vel in: $W^2U^2 - 6WU - 9W = U$ et W factorem ipsius U esse oportet. Posito itaque $U = MW$, aequationem $MW(MW^2-6) - 9 = M$ nanciscimur. Ergo 9 per M divisibile, et M vel 3, vel 9 esse debet. Si prius, scili-

cet si $M = 3$; aequatio nostra erit $3W(W^2 - 2) = 1$, cujus absurditas evidens est; si autem posterius, sive $M = 9$; habebimus aequationem $3W(3W^2 - 2) - 1 = 1$, quae pariter absurda est, cum $3W(3W^2 - 2) - 1$ semper major sit unitate.

4°) Si denique W esset factor numeri T, et 3 factor numeri $T + 1$, scilicet si $T = WR$ et $T + 1$ vel $WR + 1 = 3U$; aequatio $T(T + 1) = 3W(3W^2 + 3W + 1)$ mutaretur in: $RU = 3W(W + 1) + 1$, vel in $RU - 1 = 3W(W + 1)$. Est vero $U = \frac{WR + 1}{3}$, et $RU = \frac{WR^2 + R}{3}$ ergo $WR^2 + R - 3 = 9W(W + 1)$, et $R - 3$ per W divisibile esse debebit. Posito itaque $R - 3 = WV$, erit $R^2 + V = 9(V + 1)$. Cum autem R sit $= WV + 3$, haec aequatio abit in $W^2V^2 + 6WV + V = 9W$; et V per W divisibile est. Sit $V = NW$ eritque $W^3N^2 + 6WN + N = 9$. Hujus vero aequationis impossibilitas exinde intelligitur, quod positis $N = W = 1$, quantitas $W^3N^2 + 6WN + N$ erit $= 8$, et per consequens minor termino 9; multo autem major evadit, si pro numeris N et W majores valores ponantur.

Ex his concludimus, numeros formae $T(T + 1)$ nunquam in formula $9W^3 + 9W^2 + 3W$ contineri posse, atque ita aequationem $T(T + 1) = 9W^3 + 9W^2 + 3W$ impossibilem esse, si T et W numeros integros et positivos denotent.

III. Theorema.

Nec summa nec differentia duorum cuborum cubus esse potest.

Demonstratio.

Sufficiet demonstrare, differentiam duorum cuborum cubum non esse posse; nam si impossibile est, esse $x^3 - y^3 = z^3$, nullo etiam modo $x^3 = y^3 + z^3$ fieri poterit. Hoc quoque theorema, si x, y et z sint numeri integri, facillime ad numeros fractos extenditur. Nam si $\frac{p^3}{q^3} - \frac{m^3}{n^3}$ esset = cubo, multiplicato utroque latere per cubum $q^3 n^3$, etiam $p^3 n^3 - q^3 m^3$, vel (positis $pn = P$, et $m = Q$) $P^3 - Q^3$ cubum esse oportebit, quod est contra theorema nunc demonstrandum. Sint igitur x et y ejusmodi numeri integri, ut differentia cuborum $x^3 - y^3$ aequalis sit cubo z^3, et erit quoque: $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = z^3$. Est autem z aut numerus primus, aut non. Si est numerus primus, erit vel:

A) $x - y = 1$, et $x^2 + xy + y^2 = z^3$; vel

B) $x - y = z$, et $x^2 + xy + y^2 = z^2$.

Si autem z non est numerus primus; loco z ponatur mZ; (m et Z significantibus numeros integros, qui multiplicati producant radicem cubicam z) et erit vel:

C) $x - y = 1$, et $x^2 + xy + y^2 = m^3 Z^3$, qui casus ad A reducitur, vel

D) $x - y = mZ$, et $x^2 + xy + y^2 = m^2 Z^2$, qui est casus B, vel

E) $x - y = m^2 Z$, et $x^2 + xy + y^2 = mZ^2$, vel

F) $x - y = m^3 Z$, et $x^2 + xy + y^2 = Z^2$, vel

G) $x - y = m$; et $x^2 + xy + y^3 = m^2 Z^3$.

H) $x - y = Z$; et $x^2 + xy + y^2 = m^3 Z^2$, qui casus ad praecedentem redit, permutatis inter se m et Z.

I) $x - y = Z^2$; et $x^2 + xy + y^2 = m^3 Z$.

K) $x - y = Z^3$; et $x^2 + xy + y^2 = m^3$.

L) $x - y = m^2$; et $x^2 + xy + y^2 = mZ^3$, qui casus ad casum I reducitur.

M) $x - y = m^3$, et $x^2 + xy + y^2 = Z^3$, qui est casus K.

Omnes vero hosce casus partim ad absurdum, partim ad impossibile ducere, ita demonstrabo:

1°) Si in B, E, F valores ipsius x, scilicet $y + z$, $y + m^2 Z$, et $y + m^3 Z$ in expressionibus $x^2 + xy + y^2 = z^2$, $x^2 + xy + y^2 = mZ^2$ et $x^2 + xy + y^2 = Z^2$ substituantur; hae expressiones abeunt in $3y^2 + 3yz + z^2 = z^2$; $3y^2 + 3ym^2 Z + m^4 Z^2 = mZ^2$, et $3y^2 + 3ym^3 Z + m^6 Z^2 = Z^2$, quarum absurditas per se patet, cum y, z, Z et m sint numeri integri et positivi.

2°) Eodem modo, si in A, G et H loco x valores $y + 1$, $y + m$ et $y + Z$ substituantur; formulae $x^2 + xy + y^2 = z^2$; $x^2 + xy + y^2 = m^2 Z^2$; et $x^2 + xy + y^2 = m^3 Z^2$ mutantur in $3y^2 + 3y + 3 = z^2$; $3y^2 + 3ym + m^2 = m^2 Z^2$ et

$3y^2 + 3Zy + Z^2 = m^3Z^3$, ex quibus deducitur: $y = \frac{-3 + \sqrt{(12z^3 - 3)}}{6}$, $y = \frac{-3m + m\sqrt{(12Z^3 - 3)}}{8}$ et $y = \frac{-3Z + Z^3\sqrt{(12m^3 - 3)}}{6}$; expressiones autem $\sqrt{(12z^3 - 3)}$ vel $\sqrt{(12Z^3 - 3)}$ sive $\sqrt{(12m^3 - 3)}$, nullo modo rationales fieri posse in numeris integris, nisi casu z, vel Z vel $m = 1$ sequenti modo patebit. Si enim $12z^3 - 3 = p^2$ statuatur; p per 3 divisibile esse necesse est. Sit ergo $p = 3P$, unde erit $4z^3 - 1 = 3P^2$. Est autem $4z^3 - 1$ numerus impar, ergo et P debet esse numerus impar, formae $2T + 1$; ex quo sequitur $z^3 = 3T(T + 1) + 1$. Sit $z = 1 + V$, et erit $3V + 3T^2 + V^3 = 3T(T + 1)$ et numerus V per 3 divisibilis. Si itaque loco V substituatur valor 3W, haec aequatio abit in $T(T + 1) = 9W^3 + 9W^2 + 3W$, quae vero impossibilis est ex theoremate II, ideoque si retrogrediamur, formula 12. $z^3 - 3$ nunquam $= p^2$ poni poterit, nisi in casu W et $T = 0$, sive $z = 1$.

3) Formulae C, K et M impossibiles sunt. vid. Theor. I.

4) Superest casus I vel L, qui sequenti modo ad casus A, G vel H in N. 2 reduci potest. Valor $x = y + m$ in aequatione $x^2 + xy + y^2 = mZ^3$ substitutus, illam in $3y^2 + 3m^2y + m^4 = mZ^3$ transmutat, unde oritur $y + \frac{m^2}{2} = \frac{1}{6}\sqrt{(12mZ^3 - 3m^4)}$. Et perspicuum est, quantitatem $\sqrt{(12mZ^3 - 3m^4)}$ rationalem fieri debere. Ponamus $12mZ^3 - 3m^4 = Q^2$, et Q per $3m$ divisibile esse oportet. Sit $Q = 3mR$; aequatio nostra evadet $4Z^3 - m^3 = 3mR^2$, et Z per m erit divisibile. Facto igitur $Z = mZ'$, obtinebimus $m^3(4(Z')^3 - 1) = 3R^2$, et $\frac{4(Z')^3 - 1}{3}$ erit quadratum. Proinde et

12 $(Z')^3 - 3$ quadrato aequale esse debet; quod, ut supra ostendimus, non fit nisi casu $Z' = 1$. Hoc autem casu erit $Z = m$, et $y = 0$.

Cum vero suppositiones praecedentes omnes casus possibiles involvant, certi esse possumus, nullo modo $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = z^3$ fieri posse, positis x, y et z numeris integris et positivis, unde etiam sequitur, neque in numeris integris neque fractis dari duos cubos, quorum differentia vel summa cubo aequalis sit.

PHYSICA.

METHODUS NOVA
POTASSINUM CARBONICUM PLENE SATURATUM OBTINENDI,

ADJECTIS

NOVIS OBSERVATIONIBUS POTASSINI ACIDO CARBONICO IMPERFECTE SATIATI NATURAM SPECTANTIBUS.

Auctore
T. LOWITZ.

Conventui exhibita die 8 Jun. 1797.

§. 1.

Potassinum, ut quidem sal hoc lixiviosum e vegetabilium cineribus et e tartaro crudo combusto elixatione, depuratione et inspissatione obtinetur, acido carbonico ex parte quidem, nunquam vero perfecte satiatum esse, neminem chemicorum fugit. Hinc, quando sale hoc perfecte satiato nobis opus est, ex proposito et singularibus quibusdam artificiis illud praeparemus oportet.

§. 2. Constat porro, alcalia carbonico acido plane satiata permultis in operationibus chemicis longe aliter sese

gerere, et toto coelo diversos effectus, quam quidem eadem acido hoc partialiter tantum satiata, edere. Variis quidem in operationibus perinde omnino esse videtur, perfectene an imperfecte tantum satiato potassini carbonico utamur. Sunt tamen ejusmodi quoque experimenta, quae necessario vel hujus vel illius usum peculiari quasi jure suo sibi vindicant, ita ut egregie falleremur, si duo haec salia, primo quidem intuitu inter se similia, reapse autem a se invicem valde discrepantia, uni eidemque scopo nullo discrimine impendere vellemus; quae igitur duo salia, ut fastidiosa circumscriptione supersedere liceret, ita in hac dissertatione distinguere constitui, ut id quod acido carbonico arte perfecte saturatum esset, *potassini carbonici* nomine appellarem; dum contra illud, quod partialiter tantum acido memorato nuptum esset et consueta depuratione e cineribus clavellatis nec non e combusto tartaro elicitur, *Potassinum vulgare* vocarem.

§. 3. Primariae, quibus duo haec salia a se invicem discrepant, qualitates sequentes sunt:

1) Potassinum vulgare siccum, vasis apertis repositum, brevi tempore, humore aëris attracto, in liquorem deliquescit:

2) Perexigua, suo nempe ponderi aequali, aquae copia facillime solvitur:

3) Sapore gaudet valde nauseoso, lixivioso sīc dicto:

4) Alcoholi vini phlegmatico aquam eripit, in singularem cum eadem abiens liquorem alcoholis fundum occupantem:

5) Hydrargium, in acido nitri solutum flavo sub colore praecipiat:

6) Plerumque in crystallos concrescit magnas, pyramides obliquas duplicatas referentes, quarum basis figura rhomboidea est:

Potassinum carbonicum.

1) Aëri libero expositum nec liquescit neque fatescit, sed permanens omnino deprehenditur:

2) Aqua ut solvatur, quatuor sui ponderis ejusdem partes postulat:

3) Saporem ejus quod attinet, tantum abest, ut illum nauseosum potassini vulgaris imitetur, ut potius haud ingratus esse videatur:

4) Alcoholi phlegmatico partes aquosas non eripit:

5) Mercurium in acido nitri solutum, albo non flavo, sub colore praecipitat:

6) Crystallos plerumque format, prismata sex laterum referentes, breviora et compressa illa; sit quoque, ut etiam aliter figuratae sint, semper tamen diversissimas ab illis potassini vulgaris.

§. 4. Primariae, eaeque a se invicem diversae, quibus hodienum Potassinum carbonicum praeparari solet, methodi sunt sequentes:

1) Potassini vulgaris solutio, in apertis vasibus iisque satis latis libero aëris accessui exposita acido carbonico, quod ex aëre atmosphaerico attrahit, perfecte saturetur, quo fit, ut tandem sua sponte in crystallos sibi proprias concrescat. Methodus haec, quamvis simplicissima esse videatur, eo tamen laborat incommodo, quod temporis intervallum, usque dum plenaria saturatio locum obtineat, nimis longum requiratur.

2) Tempore quidem non nihil breviori eadem methodo perfecta ista saturatio obtinetur, potassini vulgaris solutio si ejusmodi in locis reponitur, quae acido carbonico, e materiis fermentationi vinosae subjectis, evoluto abundant.

3) Cartheuserus potassinum carbonicum obtinuit, dum super potassinum vulgare retortae immissum spiritum salis armoniaci aquosum destillatione abstraxisset, quae methodus et mihi optime aliquoties successit.

4) Centum potassini caustici partes cum 263 partibus natri carbonici recens crystallisati in 300 aquae partibus solutae, interveniente leni ebullitione, in potassinum carbonicum commutantur:

5) Eodem modo potassinum, mediantibus 168 magnesiae carbonicae partibus, crystallos format *). In quibus quidem tribus posterioribus casibus acidum carbonicum,

*) Bergmanni Opusc. phisic. chem. Vol. I. p. 43. seq.

ob majorem suam cum potassino affinitatem, pristina sua connubia cum ammoniaco, natro et magnesia deserit et ad potassinum transit:

§. 5. Expositae in paragrapho antecedente methodi eo omnes nituntur, quod potassinum vulgare uberiore acidi carbonici accessu, sive mediato illo sive immediato, ad perfectum saturationis statum perducitur. Mihi vero viam ab illis methodis prorsus diversam invenire licuit, qua quippe Potassinum carbonicum in vulgari contentum, abundantem in eo partem alcalinam removendo, elicitur.

§. 6. Potassinum vulgare quum non sit nisi sal neutrum imperfectum, potassinum nempe carbonicum alcali quadam copia supersaturatum; et cum alcali purum aqua facillime. Potassinum vero carbonicum difficilius solvatur: prona utique conjectura est, Potassinum carbonicum uno et simplici crystallisationis adminiculo ab abundante parte alcalina segregari posse, quod si revera ita sese haberet, facillima certe via patesceret, potassinum carbonicum ejusque largioris adeo quantitates obtinendi. Ast experimentorum eventus, de quo propriis et ex proposito circa hanc rem institutis tentaminibus convictus sum, conjecturam istam prorsus omnino refellit. Potassini nempe vulgaris solutio, lenissimo igne ad crystallisationis usque cuticulam evaporata, magnas quidem eas et pulchras crystallos gignit, quas chemicorum nonnulli, potassinum carbonicum esse, crediderunt; quas autem reapse, quantumvis repetitis vicibus denuo solvantur et ad formandas crystallos evaporentur, non nisi ipsum potassinum vulgare esse, invenire mihi licuit.

§. 7. Phoenomenon hoc, quod fallor an a chemicocorum nomine hodienum observatum est? tanti mihi quidem momenti et memoratu adeo dignum videtur, ut, antequam modum meum, potassinum carbonicum e potassino vulgari

eliciendi, exponam, opere pretium esse existimem, brevibus praemittere, quid de ipsa essentiali Potassini vulgaris natura, propriis meis observationibus et experimentis edoctus, sentiam.

Salia composita dum praeparantur, si partium constituentium unius vel alterius copia ea, quae perfectae utriusque saturationi debetur, major addatur: Solutio vel alcalina parte vel acida supersaturata esse dicitur; atque hujus quidem supersaturationis binae quasi species sedulo distingui debent, quarum unam, me judice, mechanicam et fortuitam quasi, alteram vero chemicam appellare convenit.

§. 8. *Supersaturationem mechanicam* appello eam, in qua superabundans sive alcalina sive acida pars ipsa sali composito adeo leviuscule adhaeret, ut absque ullo singulari artificio chemico, vel crystallisationis ope, vel charta humefacta, vel alcoholis adminiculo, modo ipsum sal compositum spiritu vini non solvatur, ita segregari possit, ut ipsum sal compositum perfecte saturatum restituatur. Ita e. g. si potassini nitrici solutioni aliquam acidi nitrici vel potassini caustici copiam superadderes; nitrum, hac supersaturatione non obstante, peracta debita evaporatione, in crystallos sibi proprias concresceret, superadditam vel potassini vel acidi partem supersaturantem in superstite liquore relinquens; vel si, crystallisationis loco, nitrum e solutione hac mechanice supersaturata alcohole praecipitares, addita illa vel potassini vel acidi pars nitrum deserens, superstite in liquore remaneret.

§. 9. *Supersaturationem* vero *chemicam* eam appello, in qua pars supersaturans, vel alcalina vel acida, ipsi sali composito longe fortiori et intimiore vinculo nectitur, ut nec alcoholis, nec crystallisationis, neque etiam chartae madefactae auxilio segregari ab eo possit; quo et id accedit, quod crystalli hoc supersaturationis genere obtinendae non forma tantum

sed variis etiam aliis qualitatibus a salibus ex iisdem quidem partibus constitutivis, sed perfecta saturatione conflatis, toto coelo discrepant. Hujusce modi supersaturationis chemicae exempla in tartaro crudo, in sale acetosellae, in natro sulphurico, potassino sulphurico, ammoniaco tartarico, acido supersaturatis, in alumine, in mercurio sublimato et in Borace obvia nobis sese offerunt.

§. 10. Atque haec omnia (§§. 6 — 9) si probe perpenduntur; mea quidem sententia, nullum omnino relinquitur dubium, potassinum vulgare, acido carbonico imperfecte saturatum, chemicam potius supersaturationem eamque alcalinam, quam statum quasi fortuitum, quae hodienum est chemicorum quorundam sententia, prodere, hancque ob caussam salium supersaturatorum classi adscribendum esse; hac enim admissa hypothesi omnia eaque sequentia supersaturationis chemicae criteria in sale hoc nostro quam pulcherrime conveniunt:

1) Potassinum vulgare proprias sibi crystallos format, ab illis potassini carbonici et caustici plane discrepantes:

2) Qualitatibus ab illis potassini carbonici omnino diversis praeditum est:

3) Pars ejusdem alcalina supersaturans neque crystallisationis (§. 6.) neque alcoholis auxilio a potassino carbonico, in potassino vulgare contento, segregari potest:

4) Potassinum vulgare, quamvis insigni satis alcali supersaturantis copia abundet, causticitatis tamen plane nihil ostendit; dum contra cetera salia neutra super-

saturationis chemicae impatientia, si solutioni eorum tantillum lixivii caustici addatur, causticitatem haud dubiis indiciis produnt.

§. 11. Salia chemice supersaturata, constat, in duo genera dividi posse, quorum unum acido, alterum lixivioso sale supersaturata salia complectitur. Priorem illam salium classem acido scilicet supersaturatorum quod attinet; variae ejusdem, quas §. 9. enumeravimus, species jam cognitae sunt: altera vero classis, in qua nimirum alcalina basis partem constituit supersaturantem, hodienum quantum equidem memini, uno Borace absolvitur; cui jam nunc Potassinum vulgare ceu alteram speciem jure meritoque inseri debere, iis, quae supra exposui, argumentis convictus, affirmare nullus dubito.

§. 12. Quemadmodum certa cujuscunque acidi vel alcali copia ad perfectam suam neutralisationem determinatam alterius salis simplicis quantitatem requirit; ita simili omnino modo salia composita supersaturationis chemicae capacia, ut ad perfectae supersaturationibus statum perveniant, non nisi determinatum salis supersaturantis copiam recipiunt. Quae quum ita sint, salia chemice perfecte supersaturata, si salis supersaturantis major copia superaddatur, ad duplicis quasi supersaturationis, et chemicae et mechanicae, statum redigi, nemo chemicorum negabit. Hocce in casu salis ejusmodi dupliciter supersaturati, pars illa superabundans et supersaturationem fortuidam efficiens vel crystallisationis vel alcoholis beneficio, salvo ejusdem salis chemico supersaturationis statu, segregari potest, utpote quae sali chemice supersaturati jam non nisi mechanice, neutiquam vero chemice, adhaeret. Si e. g. Potassinum tartaricum (Tartarus tartarisatus), quod sal neutrum exhibet, potassino et acido tartarico constans, perfecte satiatum, per uberiorem eum-

que accurate determinatum acidi tartarici accessum supersaturationis chemicae jam statum subiens, totum in cremorem tartari convertitur; qui aqua aegerrime solubilis e solutione mox ad fundum delabitur. Quo facto, quicquid acidi tartarici, omnibus debita aquae copia antea solutis, superadditur, id jam neutiquam chemice copulatur; nam instituta debita evaporatione, verus iterum tartarus concrescit, postremam illam superadditam acidi copiam omnem in liquore post crystallisationem superstite relinquens. Egregium quoque asserti hujus nostri explicandi exemplum Borax suppeditat, utpote qui sal exhibet tanto basis suae, natri nimirum, excessu chemice supersaturatum, ut ad perfectum neutralisationis statum aequale fere acidi boracinici pondus postulet. Haec autem natri abundantia, quum natro boracinico chemice adhaereat, nec crystallisatione, nec filtro humectato, neque alcohole, tolli potest. Si vero boracis solutioni vel tantillum natri puri superadditur; Borax praeter eam, quam dixi, chemicam jam mechanicam quoque supersaturationem subit; quo fit, ut superaddita ista natri pars vel crystallisationis vel alcoholis ope a borace segregari queat.

§. 13. Ex iis, quae paragrapho antecedente diximus, luculenter patet, salis cujuscunque chemice supersaturati partem eam, quae non nisi mechanicam supersaturationem efficit, ceu heterogeneum salis chemice supersaturati inquinamentum considerandam esse. At alia quoque ex parte salia chemice supersaturata labe quadam laborare possunt, idque modo ei quem diximus, contrario, quippe quae ex defectu determinatae copiae materiae supersaturantis originem repetit. Hoc enim in casu sal supersaturatum, salis compositi nondum supersaturati quantitatem isti, quem dixi, defectui proportionalem contineat, necesse est; cui quidem vitio, si sal chemice perfectissime supersaturatum desideretur, iisdem depurandi mediis, quibus mechanica supersaturatio corrigi solet, crystallisationis praecipue adminiculo, medela afferri potest.

§. 14. Omnia haecce, quae paragrapho 12 et 13 de salium supersaturatione chemica, tam perfecta illa quam imperfecta et mechanica, allegavimus momenta in potassino quoque ejusdemque ad acidum carbonicum relatione egregie comprobantur:

1) Potassinum carbonicum sal est compositum, supersaturationi cum basi sua valde abnoxium (§. 10. n. 1 — 4):

2) Etiamsi sub vegetabilium materiarum et tartari crudi combustione quantitas acidi carbonici producitur plenariae praesentis potassini saturationi satis superque sufficiens; maxima tamen ejusdem pars, ob intimum suum cum calorico consortium, aeris sub forma in auras abit; quo ipso id efficitur, ut potassinum e relictis post comburationem cineribus elixatum, non nisi imperfecte acido nostro nuptum, vel quod idem est, basi sua alcalina supersaturatum, hoc est, potassini vulgaris sub forma, deprehendatur.

3) Quum pro vario caloris gradu combustioni impenso necessario quoque alia atque alia acidi carbonici copia in auras abeat; potassinum quoque, peracta elixatione alia atque alia acidi hujus copia sociatum reperiatur, necesse est, hanc ob causam potassinum vulgare, nisi arte et data opera, rarissime perfecto sub supersaturationis chemicae statu obtinetur:

4) Fortiori scilicet calcinatione, ob uberiorem acidi carbonici jacturam potassinum vulgare alcalina parte mechanice jam supersaturatum prodit.

5) Si vero vegetabilium corporum incineratio, quantum quidem fieri potest, lenissimo peragatur igne, potassinum vulgare, ob minorem acidi carbonici jacturam, alcalina parte imperfecte adeoque nimis parum chemice supersaturatum obtinetur.

§. 15. Potassinum vulgare, utpote sal compositum chemice supersaturatum, cum sub crystallisatione sua partem illam alcalinam, quae supersaturationem chemicam revera efficit, neutiquam amittat (§. 6.); ex ejusdem crystallisatione commodissimum medium repeti potest, utrique ejusdem labi medelam afferendi, quae ex ignis gradu combustioni vegetabilium impenso nimis vel magno vel parvo proficiscitur (§. 14. n. 4. et 5.). Priori scilicet in casu (n. 4.) superabundans pars alcalina, mechanicam potassini vulgaris supersaturationem quae efficit, peracta crystallisatione, in superstite ultima muriae parte lixivii caustici sub forma remanebit. Altero vero in casu, (n. 5.) ob insufficientem partis supersaturantis copiam, potassinum carbonicum sub primo crystallisationis initio una cum aliqua potassini vulgaris parte crystallos format (conf. infra §. 21.), ita ut in superstite jam liquore, purum potassinum vulgare remanere, necesse sit.

§. 16. Atque his omnibus (§§. 7 — 15), quibus, potassinum vulgare sal esse basi sua alcalina chemice supersaturatum, demonstravi, expositis, de qua quidem materia peculiari in dissertatione plura dicere animus mihi est; ad id progredior, quod caput hujus dissertationis est, methodum, qua potassinum carbonicum in potassino vulgari contentum a parte, qua chemice supersaturatur, alcalina liberari potest, expositurus.

Potassini vulgaris solutio aequali vel duplici aquae quantitate parata acido quodam debiliore e. g. aceto destil-

lato vel cremore tartari, quin etiam fortioribus acidis, uti sulphurico, nitrico etc. larga aquae copia dilutis, si saturetur, sub operationis hujus initio, non obstante acido carbonico in potassino illo contento, solutio ista satis insignem acidorum dictorum quantitatem absque ullo effervescentiae indicio recipit. Terram, quae audit foliata tartari, pro usu pharmaceutico praeparanti, observare mihi semper licuit, effervescentiam prius non oriri nisi addita jam dimidia circiter parte totius quantitatis aceti, plenariae saturationi debitae; quod phoenomenon etsi dudum cognitum, tamen hodierum quoque erroneo modo a chemicis explicatur, opinantibus nimirum, istam effervescentiae moram aquae in solutione abundanti, utpote quae liberatum a potassino acidum carbonicum resorberet, adscribendam esse. Quae explicatio quam parum valeat, ex eo jam patescit, quod dictum phoenomenon, uti multiplici experientia edoctus sum, tunc quoque locum habet, quando potassini vulgaris cum acidis illis dilutis saturatio accedente ipsa solutionis ebullitione super igne suscipitur; enim vero hoc in casu, constat nullam plane acidi carbonici in aqua absorbtionem locum habere, cum aqua acido carbonico frigida impraegnata, et igni exposita subtilissimum hoc acidum sub ipso ebullitionis initio prorsus omne aëris sub forma in auras emittat. Denique sententia ista eo quoque potissimum argumento refellitur, quo constat, si inverso ordine potassinum acidis addatur, effervescentiam sub ipso additionis initio absque mora et sine ullo adeo caloris adminiculo subsequi. Veram igitur tardae istius effervescentiae causam, jam inde a quinque annis compertum habeo, ex eo repeti debere, quod acida potassino vulgari addita, primum eam alcali partem, quae superabundat, aggrediantur, hacque parte jam saturata, et acidis etiamnum additis, nunc demum ipsa effervescentia subsequatur.

§. 17. Haec igitur, quae praecedente paragrapho exposui, potissimum ea sunt, quae potassinum carbonicum e potas-

sino vulgari segregandi, commodissimam eamque novam mihi viam patefecerunt, et quae sequenti operatione absolvitur:

Potassini vulgaris depurati quantitas quaecunque aequali vel duplici aquae frigidae copia solvatur et filtretur. Solutioni huic frigidae, mox et continue spatulo ligneo in gyrum actae, pedetentim acetum destillatum adfundatur; haecque omnia eousque continuentur, donec effervescentiae primum indicium se prodat, quo viso, jam nihil aceti superaddatur, liquor autem filtretur et leni igne ad cuticulam usque evaporetur. Omnibus probe refrigeratis, concretae in liquore potassini carbonici crystalli sacculo conoideo linteo a liquore superstite separentur, et qui crystallulis in sacco contentis etiamnum inhaeret, liquore manibus, quantum fieri potest, omni expresso, lixivium denuo leni calore ad crystallisationis usque punctum evaporetur; eodemque plane modo superstes post singulas crystallisationes liquor toties tractetur, donec nullas jam crystallos gignat. Inficias quidem ire non licet, quae ulterioribus crystallisationibus obtinentur, crystallos aliqua quoque potassini vulgaris portione inquinatas esse solere; quo tamen non obstante, cunctae crystalli dicto modo collectae justa aquae frigidae copia, ut depurentur, junctim solvantur, et filtratae, lenissimo colore denuo ad crystallisationem revocentur; quae per alternas solutiones et crystallisationes depuratio tribus vicibus repetita, purissimum albissimumque et in aëre libero nunquam non integrum potassinum carbonicum suppeditat.

His omnibus absolutis, liquores, a prioribus crystallisationibus et a binis vel ternis crystallorum depurationibus refidui et mixti, si aceto destillato plene saturentur, consueto procedenti modo potassinum aceticum sive terram sic dictam foliatam tartari largientur.

N o t a n d a.

1) Potassini vulgaris, antequam acidum aceticum adfunditur, praevia in aqua solutione ideo hac in operatione opus est, quo acidi carbonici minor jactura fiat, acetum enim si sali ficco immediate adderetur, acidi illius aliqua pars in auras non abire non potuisset. Eademque de caussa acetum quantum fieri potest, non nisi paullatim, tenuissimi rivuli ad instar, idque perpetua sub solutionis agitatione, addi debet: Quibus cautelis omnibus rite observatis, nulla fere acidi carbonici jactura pertimescenda est, donec materiae supersaturantis pars alcalina aceto propemodum saturata fuerit, quod quidem momentum ex primis effervescentiae primordiis cognoscitur.

2) Ea acidi carbonici pars, cui potassinum carbonicum plenum saturationis suae statum debet, potassino tam laxe adhaeret, ut sola, inprimis continuata, ebullitione sensim sensimque tota in auras dissiperetur, quam ob caussam solutionis hujus salinae evaporationem lenissimo calore fieri oportet, neglectaque hac cautela, potassini carbonici magna pars in potassinum vulgare iterum converteretur.

3) Ipsius operationis ratio cuivis obvia est, aceticum nimirum acidum adfusionis ipsius initio supersaturantem tantummodo partem alcalinam aggreditur, quo

ipso fit, ut nulla hoc tempore effervescentia concitetur (§. 16.). Hacce jam parte saturata, quod ex effervescentia tum demum oriunda cognoscitur, et qua oriente nihil jam acidi superaddi oportet, duo in liquore continebuntur salia neutra, potassinum videlicet aceticum et carbonicum, quorum posterius, ob insignem, qua pollet, crystallisandi facultatem, evaporando et refrigerando facili negotio separari potest a priori, quod utpote sal deliquescens, post singulas crystallorum formationis liquore, a formatis potassini carbonici crystallis decantando, remanebit.

4) Obtinenda hac methodo ex certa potassini vulgaris copia potassini carbonici quantitas quanta futura fit, adcurate definiri non potest; siquidem pro vario ignis gradu evaporationi adhibito, alia atque alia ipsius acidi carbonici copia expellitur. E duabus quidem libris potassini vulgaris septem circiter potassini carbonici uncias obtinere mihi licuit.

§. 18. Simili prorsus ratione potassinum carbonicum e potassino vulgari segregari quoque potest, si pars superabundans alcalina acido sulphurico, in locum aceti substituto et aqua antea probe diluto, methodo, quam exposui, prorsus eadem saturetur; quo in casu, instituta debita evaporatione, potassinum sulphuricum primum, continuata postea evapotione ipsum demum potassinum carbonicum in crystallos concrescunt. In ultima denique superstite muriae parte sem-

per aliqua quoque potassini vulgaris copia etiamnum deprehenditur.

§. 19. Potassinum carbonicum denique eo quoque modo elicere mihi contigit, dum ebullienti super igne potassini vulgaris solutione sulphuris pulverisati tantam copiam adderem, ut jam nihil ejus amplius solveretur, quo facto, solutionem evaporando, crystallisando, obtentasque crystallos depurando, purum consecutus sum potassinum carbonicum. Hoc in experimento perinde, ac in praecedente, non nisi superabundans potassini vulgaris pars alcalina sulphur aggreditur, potassinum sulphuratum vel Hepar sulphuris sic dictum cum eodem constituens; ipsum autem potassinum carbonicum, cujus via humida nulla plane vis in sulphur est, crystallisationis et depurationis adminiculo a hepate sulphuris, utpote quod in superstite post crystallisationem liquore remanet, separari potest.

§. 20. Monendum mihi est, priorem illam methodum, acetico nimirum acido adminiculante potassinum carbonicum e potassino vulgare eliciendi, posterioribus duabus praeferendam esse idque sequentes inprimis ob caussas:

1) Quia in officinis pharmacevticis ubi potassinum aceticum saepiuscule in usus medicos praeparatur, istius, quam dixi, methodi ope potassinum quoque carbonicum, uno quasi eodemque labore obtineri potest.

2) Quia potassinum carbonicum, aceti ope quod obtinetur, ab adhaerente ipsi potassino acetico per crebriores alternasque solutiones et crystallisationes longe facilius quam quidem idem, acidi sulphurici vel sulphuris ope quod obtinetur, a potassino sulphurico depurari potest.

§. 21. Superest denique alia quoque occasio in laboratoriis chemicis obvia, qua potassinum carbonicum commode obtineri posse observavi, cujus hic mentionem facere non erit alienum. Hanc scilicet occasionem spiritus, ut ajunt, et olei tartari foetidi e tartaro crudo destillatio suppeditat, qua quippe in operatione, quod post destillationem in retorta carbonis sub forma remanet, sal tartari acido quidem carbonico non perfecte saturatum, tanta tamen ejusdem copia imbutum esse consuevit, ut unica elixatione lixiviique ad crystallisationis cuticulum usque evaporatione sine ullo alio artificio aliquam potassini carbonici copiam elicere liceat; ubi quidem notari oportet, obtinendas hac occasione crystallos, ab insigni, qua inquinatae sunt, potassini vulgaris copia binis vel ternis adeo depurationibus liberari debere. Ex quadraginta superstitis ejus materiae nigrae libris duas fere potassini carbonici purissimi crystallisati libras hac methodo nancisci mihi quondam contigit. Probe autem meminisse oportet, methodi hujus nullum plane successum esse, si caput mortuum ab olei tartari destillatione superstes, salis tartari plenius depurandi caussa, uti mos fert,

ante elixationem igne aperto fuerit calcinatum; cujus nimirum operationis vi tanta acidi carbonici copia in auras expellitur, ut simplici crystallisatione, perinde ac e cineribus clavellatis (§. 6.) potassini carbonici ne hilum quidem obtineatur.

DESCRIPTION
DE LA
CÉLÈBRE MINE D'ARGENT DE ZMÉOF
AUX MONTS D'ALTAÏ EN SIBÉRIE.

Avec cinq Planches.

PAR

B. F. I. HERMANN.

Présenté à l'Académie le 31 Mai 1798.

Les mines de Sibérie sont divisées par la Nature même en trois départemens placés à de grandes distances les uns des autres. Le *premier*, c'est-à-dire le plus voisin de l'Europe, est celui de *Cathérinbourg* qui s'étend sur toutes la grande chaîne de *monts d'Oural*; le *seconde* est celui de *Kolyvan* à l'Est de Cathérinebourg, auquel appartiennent toutes les mines des *montagnes Altaïques*, qui sont separées des monts Ourals par des plaines immenses, et le *troisième* département est celui de *Nertschinsk* dans la *Daourie* qui est la partie la plus orientale de la Sibérie.

La célèbre mine de *Zméof* ou *Zmeïnogorsk* se trouve au département de *Kolyvan* dans les montagnes, qui forment

les premiers gradins occidentales autour de cette grande croupe, laquelle nous connoissons sous les nom de *monts d'Altaï*. Elle est située sous le 50°, 9′, 25″ de lat. et sous le 79°, 49′, 30″ de longitude à compter du méridien parisien, entre les deux grandes rivières *Ob* et *Irtiche*, qui dans cette contrée ne sont eloignées l'une de l'autre que d'environ 250 verstes. Les allemands l'ont nommé *Schlangenberg*, ce qui signifie *la montagne des serpens*, en russe *Zméïnogorskoï Roudnik*, dénomination qui lui a été donnée à l'occasion de serpens, qui s'y trouvoient en si grande quantité lorsqu'on commença à travailler *), que la direction étoit obligée de commander des gens exprès pour les tuër.

Les anciens habitans de la Sibérie, qu'on appelle aujourd'hui *Tschoudes*, y avoient déjà travaillés, et ce n'étoit que d'après les vestiges de leurs traveaux, qu'on a découvert la riche mine de *Zméof*, ainsi que beaucoup d'autres dans ces contrées. Un bas-officier de mines, nommé *Träguer*, allemand de nation, y trouva le premier de l'or et de l'argent natif, et c'étoit en conséquence de cette importante découverte qu'on a commencé à l'exploiter sous l'administration de la Couronne en 1745, quoique la mine étoit déjà connuë depuis 1730.

La roche, dont cette colline est entourée le plus près, qui contient le filon, consiste d'une espèce de pierre

*) Il y a des personnes qui croient que cette dénomination dérive des cornes d'ammon qu'on trouve dans le voisinage, mais cette assertion est absolument fausse, car des ouvriers qui y ont travaillé du commencement, lesquels vivent encore, et qui ont tué eux-mêmes beaucoup de serpens, assurent le contraire.

de corne *schisteuse* disposée en bancs plus ou moins inclinés vers l'horizont, qui se laissent séparer quelquefois, sans se défeuiller pourtant, en plaques assez minces. Sans être *Pierre de corne* (Petrosilex) proprement ainsi nommée, ni de *Schiste argileux*, ni de *Jaspe* non plus, cette roche fait le milieu entre la véritable *Pierre de corne* et le *Schiste argileux*. Elle est presque terreuse ou grainue à la cassure, n'a point de transparence, pas même aux extrémités, étant en même tems si dure quelle donne des étincelles assez vives contre le briquet, et elle n'est pas fusibles sans addition d'un fondant. Toutes les collines les plus proches de la mine sont composées de cette roche, entre autre celle qu'on appelle *Karaoulnaya-Sopka*, qui est la plus élévée du voisinage; celle qui est vis-à-vis du *Kommiskoï-Rosnoss*, ainsi qui celle sur laquelle se trouvent les batimens principales de la couronne, et enfin plusieurs autres qui l'environnent; mais un peu plus loin on trouve de roches primitives et plusieurs d'une origine secondaire; par ex. du coté du Nord et de l'Est elle est environnée de montagnes *granitiques*, qui se prolongent à une distance de plus de cent verstes, entre lesquelles se trouvent placés des *Syénytes*, des *Porphyres* et des *Schistes cornés* et *argileux*. — A l'Ouest il y a dans le voisinage de la mine des dépôts calcaires contenant de *pétrifications*, entrourés de collines de *Porphyre*, de *Pierre de corne schisteux* et de *Schiste argileux*. Du coté du Sud, en allant vers *l'Irtiche*, est un pays presque entièrement découvert, ayant au Sud-Ouest une grouppe de collines de Granit, qui vont se joindre à celles qui entourent le beau lac de *Kolyvan*, en se prolongeant jusques à une mine de cuivre très considérable appellée *Lokiefskoï* sur l'Aléï.

Mais la colline même, qui contient le filon, est composé de Pierre de corne *véritable*, c'est-à-dire de *Pétrosilex* des Minéralogistes, disposé en bancs épais et fendû en tout

sens, de sorte qu'il représente un amas énorme des masses irrégulières, sur lesquelles répose le filon, qui lui-même est couvert de couches de *Schiste argileux*, tandis que la pierre de corne s'adosse contre une espèce de *pierre talqueuse*, qui vraisemblablement a pour base le Granit de ces montagnes vers le Sud, dont nous avons fait mention ci-dessus.

A l'égard de l'élévation de cet endroit comparée avec la hauteur des plus hautes montagnes du voisinage, on sait que le Baromètre se soutient à la montagne des serpens presque toujours à 27 pouces plus ou moins, mésure d'Angleterre, et que dans les observations correspondantes faites sur les *Biélki* ou montagnes *blanches* de *Tiguéretzk*, qui tirent leur nom de la neige, qui les couvre une bonne partie de l'année, les Baromètre y marquoit 23 pouces; mais ces montagnes ne sont pas les plus hautes des monts d'Altaï, car ceux-ci en sont encore bien éloignées, et ne se trouvent que dans les environs de la *Bouctourma*, rivière qui s'unit avec *l'Irtiche*.

Pour faire connoître la riche mine de *Zméof* mieux qu'elle ne l'étoit jusqu'à présent, je l'ai représentée avec toutes les roches, dont le filon est enveloppé, sur cinq Planches ci-jointes. La première est le *Profil* du filon et marque son *inclinaison*; la seconde est le *Plan* montrant sa *continuation* auquelle appartiennent aussi les N. 3 et 4; et la cinquième enfin représente le *Prospect* et sa *position extérieure*, dont l'explication detaillée se trouve à la fin de ce Mémoire. Maintenant je passe à la déscription des roches et des mines, que cette célèbre montagne métallifère contient.

a) Roches. (Bergarten oder das Hangende und Liegende.)

1) *Pierre de corne. Petrosilex.* (Hornstein.)

Sa couleur est pour la plûpart d'un gris foncé tirant sur le noirâtre; quelquefois elle est près que toute noire, mais plus souvent encore d'un gris clair tirant sur le rouge. J'ai même trouvé, quoique sur un seul endroit dans le *Kommiskoï-Rosnoss*, une belle variété, très joliment *rubannée* de couleur rouge et grise.

La pierre de corne se trouve ici toujours en masses informes, et je n'en ai jamais pû remarquer aucune crystallisation; mais elle est souvent comme rongée, et quelquefois on voit un approchement à la figure stalactique. Elle est d'une surface seche et très-rarement un peu lisse. Sa fracture n'est pas terreuse, quoique matte, souvent écailleuse (splitericht) et quelquefois conchoïde, ce qui s'entend surtout de la variété de couleur noire, dont la cassure est toujours plutôt conchoïde qu'écailleuse. Ses fragments sont indéterminés et pour la plûpart transparens aux extrémités. Elle est dure, et on en peut tirer des etincelles très vives avec le briquet, étant en même tems si dense, qu'elle ne se casse pas trop facilement. Sa pésanteur spécifique est de 2655 à 2670 comptant celle de l'eau pour 1000. Elle est infusible sans fondant et n'est de rien mélée que de quelques petits points de Feldspath ou de Quarz. En un mot cette pierre est ce que les Minéralogistes nomment proprement *Pierre* de *Corne* ou *Petrosilex*. Elle fait le mûr, contre lequel le riche filon de *Zméof* s'addosse, et long tems on l'a regardé comme la veritable parois inférieure,

jusqu'à ce que par une traverse marquée sur la Planche sous N. 10., en l'ayant percé, on trouva que la Pierre de Corne elle même répose encore sur une autre roche, qui ressemble à une variété de Stéatite; cependant le Petrosilex a dans cet endroit une épaisseur de 60 toises.

2) *Stéatite.* (Talk mit Spekstein.)

Cette pierre est disposée en grandes masses informes traversées de beaucoup de fissures. Sa couleur est verdâtre et cendrée, tirant sur la jaune et le gris clair avec différentes petites taches noirâtres et blanchâtres Elle est composée pour la plûpart de parties assez à distinguer, qui consistent de *Talk* et de *pierre de lard* melées de beaucoup de grains de Quarz et de pierre de corne, parsemées quelquefois de *Pyrite sulfureuse.* Sa surface est un peu lisse et onctueuse au toucher; elle à la fracture grainue et n'est pas ou presque point, transparente aux extrémités. Elle est un peut difficile à casser et ne fait feu contre le briquet que lorsque celui-ci frappe un grain de *Quartz* ou de *Petrosilex*, dont elle est melée. Cette roche donc fait le fond, sur lequel la pierre de corne est couchée, de sorte qu'il semble que le Petrosilex avec le filon ne soit qu'une et seule masse étendue en deux moitiées sur cette roche; mais quant à moi je suis très disposé de regarder toujours la *Pierre de corne* seule comme le parois *véritable*; car si l'on ne vouloit nommer *parois* la roche *la plus voisine* du filon d'un épaisseur si considérable, on sera obligé, en perçant jusqu'au *Granit*, de ne regarder que celui-ci pour le veritable parois, ce qui seroit aller un peu trop loin.

3) *Schiste marneux.* (Thonmergelschiefer.)

Il est disposé en couches qui sont le toît d'une partie de la *Pierre de corne* et *de Stéatite* du coté de Sud dans la vallée, qui a été creusée par la petite rivière *Zmeofka.* La couleur de ce schiste est grise tirant sur le rougeâtre. Les couches se séparent en plaques assez minces. Sa cassure est égale, est le tissu est serré quoique un peu aride au toucher; à l'air libre il se décompose assez facilement et se délite en fragmens trapézoïdales. La terre argileuse y prédomine; elle n'est pas dure et ne donne point de feu contre le briquet.

Ces trois roches, savoir le *Petrosilex*, le *Stéatite* et le *Schiste marneux* font ensemble la *base*, sur laquelle le filon répose; ainsi il nous reste à décrire le *toît* ou le parois *supérieur*, qui consiste d'un

4) *Schiste argileux.* (Thonschiefer.)

Sa disposition est en bancs d'une épaisseur de quelques pouces, et quoique il ne se casse pas en feuillets, son tissu est toujours plus ou moins *schisteux;* mais il ne se fend jamais en feuilles si minces comme p. ex. *l'Ardoise.* Sa couleur est d'un gris foncé quelquefois prèsque noire; il est aride et terreux dans la fracture; la surface est mainte fois un peu onctueuse au toucher; il se délite plutôt en fragmens trapezoïdales qu'en feuilles; il n'a pas la moindre transparence, pas même dans les extrémités. Sa dureté est pourtant assez considérable, parceque on en peut tirer quelquefois des etincelles avec le briquet; mais il y en a deux variétés. L'une couvre immédiatement le filon, et ses bancs sont plus épais; elle est plus noïre et communement aussi plus dure.

L'autre fait la couche supérieure, qui en est separée par un dépôt de *Poudingue*, remarqué sur la Planche N. 6.

5) *Poudingue.* Brèche filiceuse. (Kieselbreccia.)

Entre les deux couches de *Schiste argileux* ci-dessus mentionnées, qui font ensemble le toît du filon, il y a un banc de *Brèche* ou de *Poudingue*, qui est d'autant plus remarquable, qu'il renferme des *Corails pétrifiés* du même genre que ceux qui se trouvent dans un dépôt calcaire à deux verstes de la mine vers l'Ouëst. Ce Poudingue consiste de fragmens de *Pierre de corne*, de *Quartz*, de *Jaspe* et de *Schiste argileux* liés ensemble par un ciment calcaire. Il prend un beau poli est donne des etincelles contre le briquet. Une brèche semblable se trouve aussi dans le voisinage où elle couvre immédiatément le filon de *Spath pésant* de la minière de *Karamyschef*.

6) *Argille.* (Thon- oder Lettenlager.)

Le Schiste supérieur, ou le *toît*, est lui-même couvert d'une couche assez épaisse de différentes sortes d'Argille de toutes couleurs; il y en a de rouge, jaune, brûne, noirâtre, bleuâtre, grise et de blanche, dont la dernière est une véritable *terre de porcelaine*, comme l'on s'est convaincû par des épreuves. La plûpart de ces argilles sont mouës, les autres endurcies.

Voilà donc *six* différentes espèces de roche et de terre, dont le filon de *Zméof* est envelopé; passons présentement à la description de sa masse.

b) Gangue ou la masse du filon. (Gangarten.)

La masse du filon consiste principalement de *spath pésant* melangé de quelques autres pierres, dont voici l'énumeration :

1) *Spath pésant.* Baryte vitriolée. (Schwerspath.)

Sa couleur est ordinairement blanchâtre tirant sur le gris ; rarement il se trouve tout blanc, mais plus souvent d'un gris foncé et noirâtre. Il est disposé en grandes masses pour la plûpart cunéiformes et très - fortement liées l'une à l'autre, ayant pourtant des fissures et des fentes de toutes parts. Le tissu est lamelleux et le plus souvent écailleux (schuppicht), jamais compacte ou terreux et encore moins il se trouve en cristaux réguliers. Sa surface est aride au toucher quoique près que toujours assez luisante. La fracture est écailleuse, avec cette différence pourtant, qu'une variété consiste de feuilles de quelque lignes et même quelquefois d'un demi pouce de largeur, tandis que l'autre n'est composée que d'écailles minces. Il se délite en fragmens trapezoïdales et rhomboïdales transparens aux extrémités. Quoique sa durété ne soit pas si grande pour en pouvoir tirer des etincelles avec le briquet, il est pourtant assez solide et ne se laisse pas trop facilement casser. Sa pésanteur spécifique est de 3545 jusqu'à 5,41 contre 1000, selon sa pureté ; ordinairement il pése d'environ 4400.

2) *Witherite.* Baryte aérée. (Witherit.)

On a aussi remarqué depuis peu cette rarété minéralogique dans le *filon de Zméof*, et notamment par nids dans le Spath pésant ordinaire, mais en très - petite quantité. Il est de

couleur blanche tirant sur le jaune et sur le rougeâtre. On le trouve en petites masses cunéiformes d'un tissu fibreux, dont les fragmens sont demi-transparens, luisans dans leur cassure et reflechissant un eclat de nacre.

3) *Quartz.* (Quarz.)

Dans une profondeur d'environs de 75 toises on a rencontré une grande masse de Quartz, occupant une espace assez considérable entre la pierre de corne et le filon. Il est d'une couleur blanchâtre tirant sur le jaune et le gris; il est compacte et plutôt matte que luisant à la cassure; il est dense, peu transparente et dure, en un mot il est ce qu'on appelle Quartz *sec* étant de cette variété qui déjà approche beaucoup à la pierre de corne. Dans le voisinage du filon il est tout parsemé de *Pyrite soufreuse*, de *Bleinde* et de *Galène.* Outre cette masse on trouve le Quartz parfois en petits rognons et en grouppes cristallisés aux fentes du Petrosilex ou dans un mélange de pierre de corne, de spath pésant et de mines.

4) *Schiste argileux gras.* (Fetter Thonschiefer.)

Entre la dite masse de Quartz et la Pierre de corne, qui fait le parois *inférieur*, il se trouve une fente assez large remplie d'un schiste argileux noire, qui est mou et onctueux au toucher, impregné de *Pyrite*, de *Galène*, d'*Argent vitreux* et d'*Argent natif* en feuilles et en grains.

5) *Spath calcaire.* (Kalkspath.)

Cette pierre si commune dans presque toutes les mines des pays étrangers est très-rare ici; on n'en trouve que des petits morceaux en feuilles rhomboïdales ou en pyramides triangulaires, qui quelquefois sont ressemblées en *crête de cocq.*

6) *Spath fluor.* (Fluss - Spath.)

Celui - ci est encore plus rare, que le Spath calcaire, et on n'en a trouvé que quelques petites grouppes de cristaux cubiques verdâtre et une seule fois on l'a rencontrée de couleur violette.

7) *Lithomarge.* (Steinmarck.)

On en trouva aux travaux de *Nycolaéfsky*, qui contenoit 2 Sol. d'argent par poud; il est de couleur blanche tirant sur le jaunâtre, d'un tissu compacte et très - fin.

8) *Stéatite fin.* Pierre de savon. (Seifenstein.)

Il s'y trouve, mais en petite quantité, de couleur blanche et grise, tacheté de points bleuâtres. Il est très - onctueux au toucher.

9) *Argille.* (Thon.)

Elle y est assez commune, principalement dans les travaux supérieurs, où l'on a exploité beaucoup *d'oxide de plomb* mélé d'une bonne quantité d'argille de chaque couleur, surtout de jaune, de rougeâtre et de brune, ainsi que de blanche, de grise et de bleuâtre.

10) *Trapp.* (Trapp.)

Le filon *principal* de Zméof, ainsi que ceux de plusieurs autres mines altaïques, est coupé dans une direction inverse par des fentes considérables remplies de *Trapp*, circonstance très-remarquable, qu'on ne voit, à ce que je sache, nulle part en Sibérie, hors les monts d'Altaï; mais ce qui est encore plus curieux, c'est, que ce *Trapp* coupe non seulement le Spath pé-

sant, mais aussi dans la même direction la Pierre de corne du parois inférieur, ainsi que le schiste qui fait le toît, et que les *filons de Trapp* tombent avec le filon *principal* dans la même profondeur, en faisant avec lui un angle plus ou moins obtus. On en connoît jusqu'à présent cinq, dont quatre se trouvent dans la grande taille à jour (dans le grand *Rosnoss*) et un dans celle de la *commission.*

Sa couleur est noire, ou d'un gris noirâtre et cendré ; il est disposé en grandes masses informes, qui se délitent en fragmens trapezoïdales ; son tissu est très serré ; il est matte à la surface ainsi que dans sa fracture, qui est en même tems terreux et un peu aride au toucher. Il n'a pas la moindre transparence, pas même aux extrémités et il n'est pas dur, de sorte, que rarement on en peut tirer quelques etincelles avec le briquet ; mais sa densité est telle qu'il faut employer beaucoup de force pour le casser, surtout en morceaux qui n'ont point de fentes ; et c'est un indice très-caractéristique, qui est propre à toutes les variétés de Trapp *véritable ;* reduit en poudre il donne une poussiere cendrée, qui fait une legère effervesence avec les acides.

De cette pierre sont remplies, comme il est dit ci-dessus, *cinq* filons, dont 4 traversent le filon du côté de Sud-Est, ce qui est la *partie capitale*, et un celui des travaux de la *Commission*, qui représente un gîte de minérai *séparé.* Leur epaisseur ne surpasse pourtant guère une Archine et demie.

Voilà donc 10 différentes pierres, dont toute la masse du filon de Zméof est composée ; mais la principale en est toujours le *spath pésant*, qui se represente souvent en masses enormes prèsque toutes pures, et sans aucun mêlange visible. — A présent nous passons à la description des *mines* que ce grand filon contient.

c) Mines. (Erzarten.)

1) *Or natif.* (Gediegen Gold.)

Il étoit assez commun au commencement de l'exploitation et principalement dans les trav ux supérieurs ; mais dans la profondeur du filon, où l'on travaille présentement, il ne se rencontre que rarement. Sa couleur est quelquefois d'un jaune assez foncé, mais plus souvent très-pâle, étant toujours mêlé d'une bonne portion d'argent. Pour la plûpart on le rencontre en feuilles très-minces, quelquefois en plaques, dont l'épaisseur va jusqu'à l'epaisseur d'une lame de couteau. Souvent il se trouve en grains plus ou moins grands. La forme dans laquelle on rencontre ici *l'or natif* le plus rarement est celle des filets capillaires et des pyramides tetraédres, lesquelles pourtant sont toujours très-petites. La plus grande quantité d'or natif se trouva dans la partie qu'on appelle *Kommiskoï-Rosnoss*, où l'on en rencontre encore aujourd'hui. Près que toutes les mines qui s'y exploitent à l'ordinaire, lui servent de matrice ; cependant le plus souvent c'est le spath pésant et la pierre de corne, sur lesquelles il se trouve ; le plus rare est celui, qui est implanté en plaques et en feuillets minces sur la mine d'argent muriatique ou *lune de corne*, la quelle pourtant étoit assez commune autrefois dans les mêmes travaux de *Kommiskoï*. Au reste on trouve ici l'or natif sur la *Lithomarge*, *Galène*, *Pyrite de cuivre* et même sur le *cuivre vitreux*. Invisiblement il inhère à toutes sortes de mines, puisque tout l'argent de Zméof est *aurifère*.

2) *Argent natif.* (Gediegen Silber.)

Il est beaucoup plus commun dans la mine de *Zméof* que l'or natif, quoique la plus grande partie soit tellement

aurifère, qu'il en reçoit une couleur très-jaunâtre, dont resulte cette variété qu'on appelle *Electrum ;* mais il y en a de toutes couleurs, surtout celle d'un blanc terne et grisâtre souvent d'une surface mâtte.

Quant à la figure on le rencontre pour la plupart en petites lames minces superficielles *sur* et *dans* le *Petrosilex*, dont souvent les plus petites fissures sont remplies; on le trouve aussi en filets capillaires assez longs et très-fins, qui quelquefois sont réunis en faisceaux. Une de ses figures les plus communes est celle en rameaux; quelquefois il est denticulé, grenu et en forme de mousse. Très-rarement on le rencontre en petits cristaux avec des pyramides tetraédres. Toutes les roches et mines, dont le filon est composé, lui servent de matrice, surtout la pierre de corne, laquelle est parcourie quelquefois de lames d'argent natif comme en filons; mais on l'a aussi trouvé dernièrement en feuilles minces sur le schiste noire ci-dessus mentionnée. Autrefois l'argent natif étoit, ainsi que l'or plus commun dans les travaux supérieurs. Il faut remarquer au reste qu'il est très-rare de le trouver sur la mine muriatique au lieu que l'or natif s'y rencontre souvent.

3) *Mine d'argent vitreuse,* (sulfure d'argent). (Glaserz.)

Sa couleur est d'un gris noirâtre. Le couteau y laisse une impression plus ou moins luisante sans la pouvoir pourtant couper, car elle est pour la plus grande partie fragile. C'est aussi par cette raison qu'ordinairement elle n'est pas flexible ni maléable. On la trouve en petites masses informes compactes, ainsi qu'en grain, en lames minces et en feuilles superficielles, surtout dans les fentes et dans les fissures de la pierre de corne. Souvent elle se décompose en Ocre noire riche en argent. Dans le *schiste noire onctueux* on l'a trouvé, il y a quelque tems, cristallisée en petits octaédres entassés

l'un sur l'autre de manière, qu'en résulte une espèce de ramification dendritique.

4) *Mine d'argent cornée.* Muriate d'argent natif.
(Silberhornerz.)

Elle est d'un blanc perlé, tirant sur le gris foncé; quelquefois elle est d'un gris jaunâtre ou brun; la couleur violette et verte y est la plus rare; d'ailleurs cette mine a assez de demi-transparence et se coupe très-facilement. Son tissu est pour la plûpart compacte et dense, mais quelquefois elle se trouve d'une forme terreuse, près que comme la bouë, à l'ordinaire on la rencontre en plaques, dont l'epaisseur va jusqu'à un demi-pouce, ou en feuilles minces, en petites veines et en taches plus ou moins grandes. La variété de couleur verte est quelquefois cristallisée en petites aiguilles arangées en points étoilés. Cette mine ne se trouve que dans les traveaux *supérieurs* de la partie du filon qu'on appelle *Kommiskoï-Rosnoss*, et jamais on l'a rencontré dans la profondeur. Sa matrice est toujours ce Petrosilex *aride*, dont la fracture paroît plus *terreuse* qu'aucune autre espèce de ce genre. On la trouve très souvent ensemble avec l'or natif, dont elle est parsemée; une seule fois, je l'ai aussi trouvé sur le *bleu de cuivre terreux;* mais plus souvent on la rencontre dans un mélange de cuivre vert, de spat de plomb et d'ocre rouge argentifère.

5) *Mine d'argent alliée avec le soufre et le cuivre.*
(Silberglanz.)

C'est une mine de couleur d'étain et d'un tissu lameleux ayant en même tems un grand brillant métallique.

On la trouve en masse compacte et impregnée dans les autres mines et dans la roche, surtout dans la pierre de corne et le spath pésant. Son contenu en argent va quelquefois jusqu'à 50 pour cent, mais elle ne se trouve qu'en petite quantité.

6) *Mine d'argent rouge.* (Rothgülden.)

Cette variété des mines d'argent n'a pas encore été trouvée dans toute la Sibérie; et quoique on pretend d'en avoir rencontré quelques indices dans la mine de Zméof, j'ai lieu d'en douter. Pour moi je n'en ai jamais rien pû rémarquer.

7) *Mine d'argent blanche.* Argent combiné avec le Plomb, le Soufre, le Fer etc. (Weissgülden.)

Elle s'y rencontre quelquefois, mais rarement et en très petite quantité.

8) *Mine d'argent grise.* Argent combiné avec le Soufre, le Cuivre, le Fer etc.

C'est une des mines les plus communes, que le filon de *Zméof* contient. Sa couleur est d'un gris plus ou moins clair, souvent foncé tirant sur le rougeâtre, et dans ce cas elle contient toujours beaucoup de cuivre, dont la quantité va quelquefois prèsque à la moitié de son poid. Son tissu est d'un grain très serré; elle est dure est donne volontièrement des etincelles contre le briquet. Sa fracture est pour la plûpart conchoïde.

Elle est d'ordinaire très-riche en argent, dont le contenu est de 15 jusqu'à 70 Sol. par Poud. Il y en a une variété, qui, étant frottée, donne une odeur puante; elle contient 15 Liv. de cuivre et 30 Sol d'argent par Poud. Au reste *la mine d'argent grise* se trouva et se trouve encore dans toutes les profondeurs du filon, mais rarement seule; elle est presque toujours mélangée de *Galène*, de *Pyrite*. de *Blende* etc. Sa matrice la plus commune est le spath pésant.

9) *Ocre le Plomb.* Oxide de Plomb terreux.
(Bleyocher.)

Sa couleur est grise et jaunâtre tirant sur le rouge et le brun; elle est souvent mélé de Spath de Plomb ou de l'Oxide spatheux. Pour la plûpart elle se trouve en forme terreuse et friable, quelquefois en masses endurcies; on en rencontre avec de l'argent natif et de cuivre verd et bleu. Cette mine était assez commune dans les travaux supérieurs, mais dans la profondeur, ou l'on travaille présentement, elle ne se trouve guère.

10) *Spath de Plomb*, Oxide de Plombe spathique.
(Bleyspath.)

Il se rencontre ici de couleur blanche, grise et jaunâtre. Son tissu est quelquefois compacte et la fracture est vitreuse; il est transparent ou de moins demi-transparent, se trouvant en morceaux très-pésants ainsi, qu'en cristaux prismatiques quadrangulaires rhomboïdales, ou en hexaèdres terminés par une pyramide du même nombre de facettes. On le rencontre aussi en forme de géodes, dont l'intérieur est fibreux avec des rayons excentriqúes. Les différentes

ocres argentifères, qui s'y rencontrent, et la pierre de corne, dans les fentes de laquelle il s'est niché, lui servent principalement de matrice.

11) *Galène*, Sulfure de Plomb. (Bleyglanz.)

Cette espèce de mine y est assez commune; elle est cependant plus rare aujourdhui qu'elle n'étoit au commencement du travail. On la trouve ordinairement d'un grain fin et brillant, et d'un tissu écailleux à petites facettes luisantes. Elle est toujours riche en argent; mais il est rare de la trouver pure, puisque pour la plûpart elle est melangée de *Bleinde* et de *Pyrite*. Elle aime pour matrice mieux le *Spath pésant* que la *Pierre de corne*.

12) *Cuivre natif*. (Gediegen Kupfer.)

Celui-ci n'étoit pas rare autrefois dans la mine de *Zméof*, surtout dans les travaux de la commission (Kommiskoï-Rosnoss); mais à présent on n'y en trouve point. Parmi les echantillons anciennement exploités on voit de très belles pieces d'une figure dendritique, de couleur jaune et d'un brillant métallique assez beau. Il se trouva aussi en morceaux informes, ainsi qu'en feuilles et en grains, dans du Spath pésant, dans un melange argileux et dans la mine de cuivre vitreuse.

13) *Ocre de cuivre rouge*. Carbonate de cuivre rouge. (Erdigtes Roth-Kupfererz, Kupferblüthe.)

Elle est d'une belle couleur rouge, qui ressemble au cinabre. Elle adhère sous forme pulverulente comme un en-

duit, tantôt à la pierre de corne, tantôt à un mélange de *Petrosilex*, de *Spath pésant*, de *cuivre natif* et de *cuivre vitrueux*, et quelquefois à une *argille blanche*, dans laquelle on la rencontre en nids et en veines.

14) *Cuivre vitreux rouge.* Cuivre oxidé rouge vitreux.
(Rothes Kupferglas.)

Sa couleur est un rouge foncé; il se trouve ou compacte ou cristallisé en octaèdres et en filets capillaires assez transparentes. On la rencontre pour la plupart en morceaux informes dans l'Argille blanche melée de cuivre rouge terreux. Au reste c'est une mine, qui se trouve très rarement au filon de Zméof.

15) *Cuivre vitreux gris.* Cuivre oxidé gris vitreux.
(Graues Kupferglas.)

La couleur de cette mine est un gris foncé tirant sur le gris de plomb noirâtre; il est compacte, d'une fracture inégale et quelquefois prèsque conchoïde. Il est aussi rare ici que l'oxide de cuivre rouge.

16) *Cuivre vitreux violet.* Cuivre oxidé violet vitreux.
(Violettes Kupferglas.)

Il est d'une belle couleur violette foncé, à cassure vitreux; et ce n'est pas, comme on pourroit croire, une croûte superficielle resultée par un commencement de la décomposition de la pyrite cuivreuse, dont elle acquiert sou-

vent ces couleurs variées, vives et changeantes, qui la sont alors désigner sous le nom de *cuivre pyriteux en gorge de pigeons;* nôtre oxide en est très différent, car il se trouve en placques, dont l'epaisseur va jusqu'à un demi-pouce, qui parcourent le petrosilex et le spath pésant. Il est en même tems fragile, et très souvent dans le même echantillon accompagné de mine d'argent blanche et grise, de pyrite et d'argent natif. Ce dernier le couvre quelquefois en feuilles minces et brillantes.

17) *Bleu de montagne*, cuivre bleu, Azur de cuivre, oxide de cuivre bleu. (Kupferblau.)

On le trouve sous la forme pulverulente ou friable et en globules mamelonés, ainsi qu'en forme cristalline. Sa couleur va d'un bleu pâl jusqu'à celle d'un bleu très foncé, près que noirâtre. L'intérieur de globules est souvent strié. Lorsqu'il est cristallisé c'est pour le plupart en prismes tetraédres rhomboïdaux, d'une surface forte luisante et à cassure spathique. Autrefois on en a trouvé des grouppes superbes, dont les cristaux sont souvent entremélés de l'oxide de plomb blanc spathique. Il se rencontre près que dans toutes les roches, souvent avec l'oxide de plomb terreux et quelquefois même avec de l'or et de l'argent natif.

18) *Vert de montagne*, Cuivre vert, Oxide de Cuivre vert. (Kupfergrün.)

Il s'y trouve pour la plupart de fois dans un état terreux, rarement fibreux et près que jamais d'une surface mamelonée et stalactitique. On l'a rencontré cependant plus souvent aux travaux supérieurs qu'aujourd'hui dans la profondeur.

19) *Mine de cuivre grise.* (Kupferfahlerz.)

Ce n'est qu'une variété de la mine d'argent de grise décrite sous Nr. 8., et qui n'en diffère que par la plus grande quantité du cuivre qu'elle contient, ayant au reste presque toutes les autres propriétés en communs.

20) *Mine de cuivre pyriteuse.* (Kupferkies.)

Cette espèce de mine y est très-commune, surtout dans les travaux inférieurs et même dans la profondeur la plus grande, où l'on travaille présentement et où le minérai est fort pyriteux. Sa couleur est ordinairement d'un jaune foncé tirant sur le rougeâtre. Souvent elle est décomposée en ocre noire. Il se trouve quelquefois en masses solides assez considérables, mais pour la plûpart il est parsemé dans le mélange de minérai avec d'autres mines.

21) *Pyrite sulfureuse.* Sulfure de fer.
(Schwefelkies.)

Elle est de couleur jaune pâle et d'un grand brillant. On la trouve informe, à cassure granuleuse et solude, et d'une figure stalactitique en gros mamelons lisses, dont le tissu intérieur est fibreux et souvent disposé en plusieurs couches concentriques. Elle est toujours plus ou moins argentifère et ne se trouve guère seule, mais presque partout mélangé d'autres mines.

22) *Pyrite arsénicale.* Arsenic pyriteux.
(Arsenikal-Kies.)

Elle s'y trouve d'une couleur jaune très-pâle tirant sur le blanc d'étain, et d'une figure mamelonée, dont l'intérieur

est pour la plûpart fibreux ou gainu. On l'a rencontré très fréquemment dans les travaux supérieurs.

23) *Zinc spathique.* Carbonate de Zinc.
(Zinkspath.)

Il s'y rencontre, mais rarement, en figure stalictitique et même crystallisée en tables oblongues quadrangulaires, dont les deux bords sont en biseau et les angles solides légèrement tronqués. Ces cristaux sont blancs, transparents d'un tissu spathique et souvent rassemblés en grouppes très-jolies.

24) *Bleind de Zinc.* Zinc combiné avec le Soufre et le Fer.
(Zinkblende.)

C'est un minéral qui se trouve très-frequemment dans la mine de Zméof aussi bien aux travaux supérieurs qu'inférieurs. Sa couleur est grisâtre, jaune tirant sur le rouge, verdêtre, brune et noirâtre. Elle a une cassure luisante et lamelleuse consistant de feuilles minces, qui pour la plûpart sont d'un tissu très-serré. La surface de quelques-unes approche quelquefois à la forme stalactitique et à la cristallisation pyramidale tetraédre. Au reste toutes les variétés des Bleindes de Zméof sont très *phosphorescentes* en les frottant dans l'obscurité.

25) *Minium naturel.* (Natürliche Mennig.)

Enfin il faut aussi faire mention du *Minium* qu'on y trouve depuis peu, et qui dérive de l'embrasement, qui se faisoit il y a quelques années dans une partie de la manière

de Zméof, par lequel une partie de la Galène se changea en *Minium*. Les Minéralogues à venir ne laisserons pas sans doute de le donner pour une veritable production *naturelle*, lorsqu'on aura absolument oublié cet accident.

Voilà toutes les mines, qu'on a trouvé jusqu'à présent dans le filon de *Zméof;* mais celles, qui s'exploitent dans la plus grande quantité, ne sont que la *mine grise* (Fahlerz), la *Galène* (Bleyglanz), la *Pyrite cuivreuse* (Kupferkies), la *Bleinde* (Zinkblende), et *l'Ocre argentifère*, dont le *Spath pésant* et le *Petrosilex* sont impregnés.

Le minérai le plus riche, excepté *l'or* et *l'argent natif*, consiste pour l'ordinaire d'un *mélange* de *mine grise* parsemée de petits points de *mine d'argent blanche*, de *Galène*, de *Pyrite* et de *Bleinde*, dont le contenu en argent va de 3 jusqu'à 30 Solot. par poud. Celui de moindre richesse consiste de *Spath pésant*, melangé souvent de fragmens de *Petrosilex*, qui toutes les deux sont impregnés d'*Ocre*, de *Galène*, de *Pyrite* et de *Bleinde* en grains très dispersés Mais le *minérai le plus ordinaire*, et qui fait aujourd'hui la plus grande partie de l'exploitation, est le *Spath pésant* seulement impregné d'Ocre argentifère, dont il reçoit une couleur grisâtre plus ou moins foncée, de même que le *Petrosilex*, dont les gerçures contiennent de l'Ocre, de la mine cornée ou de petites parcelles d'argent natif près que invisibles.

On divise ici les mines exploitées en *deux sortes principales*, dont l'une s'appelle *le minérai spathique* (Spath-Erze), et l'autre (c'est-à-dire le Petrosilex argentifère) *le minérai sec* (trockene Erze) à cause de leur propriété dans la fusion, parceque celui-ci, étant très refractaire, le premier lui sert de fondant.

Quant à *l'étenduë* et à la *position intérieure du filon*, comme cela se répresente sur les desseins ci-jointes, je ne dirai rien ici, si non qu'il occupe un espace de 5 jusqu'à 50 toises en epaisseur, près de 100 toises en profondeur et de 150 toises en longueur sur la superficie de la montagne, y *non* comprise la partie separée des *travaux de la Commission*; mais dans la plus grande profondeur il ne s'étend en longueur qu'à 15 toises en se comprimant et se racourcissant de toute part, de manière qu'on doit craindre en peu de tems sa perte entière, si l'on ne découvre pas peut-être des nouvelles indices de sa continuation, dont il est pourtant fort à douter.

A l'égard de la *maniére d'exploiter le minérai* je remarquérai qu'au commencement on travailla *au jour à taille ouverte*; dans la suite on creusa des *puits*, des *galéries* et des *traverses* en grand nombre, pour la plupart à l'aide de la poudre, parceque non seulement la *roche*, c'est-à-dire la *pierre de corne*, mais aussi le *Spath pésant*, ne peut guère être exploité sans poudre à cause de leur dureté. — Pour en tirer le minérai, et principalement pour tenir à sec la miniére, il s'y trouvent *deux Machines* avec des roues à l'eau, dont le diamétre a plus de 50 pieds de Londres.

Pour *séparer la mine du rebût* on employe chaque année plus de mille garçons, et quoique présentement on transporte aux fonderies des mines assez pauvres, la quantité du rebût monte toujours près que à deux tiers, de sorte que pour rétirer p. ex. un million de pouds de *minérai*, qui *mérite* d'être fondû, il faut exploiter 3 millons de pouds de la *roche minéralisé*, dont on sépare ensuite le minérai *fusible*.

Le *nombre de tous les ouvriers* employés aujourd'hui à la mine de Zméof monte à 3400 têtes y compris environ 20 Officiers de mines, 100 bas-Officiers et maitres en différents

métiers et les 1000 garçons susmentionnés, qui cependant ne travaillent qu'en été.

Il y a présentement au département de Kolyvan *sept* fonderies pour la fusion des mines d'argent, dont la principale est celle de *Barnaoul* sur l'Ob, à 250 Verstes de la *montagne de serpens;* c'est ici où se fond la plus grande quantité du minérai de Zméof, dont l'exploitation aujourd'hui monte annuellement à 1200000 pouds; son contenu en argent est en général à $2\frac{1}{2}$ Sol., quoique une partie en contient de 3 à 4 Sol.; mais la plus grande portion n'est que de $1\frac{1}{4}$ jusqu'à 2 Sol. par Poud; et 100 Pouds d'argent contiennent 2 jusqu'à 3 Pouds d'Or.

Depuis le commencement, c'est à dire de l'an 1747 jusqu'à 1793, on a exploité et fondu de la seule mine de Zméof 37,784249 Pouds 24 Livres de minérai, qui contenoit en *argent* 34441 Pouds 11 Livres $28\frac{24}{96}$ Sol., y compris environ 1000 Pouds *d'Or*, et dont la valeur de tous les deux monte prèsqu'à 44 millions de Roubles *).

En voici la repartition par année:

---

*) En compt ant pour la 5e partie le déchet du métal causé par les différents procédés de fusion et de purification, cette mine a donc donné pendent 47 années la valeur à peu près de 36 Millions de Roubles et jusqu'à 1798 pour plus de 40 Millions en Or et en Argent *pur*.

TABLEAU

de la quantité du minérai tiré de la *mine de Zméof* et foudû dans les années ci-après marquées.

Années.	Minérai.		Contenu en argent.		
	Pouds.	Liv.	Pouds.	Liv.	Sol.
1747	58591	—	66	33	92½
1748	166608	—	238	25	16¼
1749	201585	—	258	31	23⅛
1750	137585	—	219	30	23⅞
1751	214665	—	409	12	47¾
1752	128890	—	227	19	95
1753	268535	—	472	21	48¾
1754	200488	—	293	26	31½
1755	248711	—	345	18	34⅛
1756	304409	—	431	25	32⅛
1757	152638	—	211	3	93¼
1758	344303	—	448	22	68¼
1759	303335	—	419	—	78¾
1760	166979	—	243	29	75⅞
1761	547489	—	848	20	70
1762	217341	—	309	37	4⅜
1763	388006	—	558	25	45½
1764	447381	—	653	14	78⅝
1765	444820	—	560	33	52⅝
1766	543846	—	914	30	44¾
1767	451990	—	780	3	25⅝
1768	421870	—	651	10	32
1769	706782	—	960	39	27⅜
1770	1107270	—	1303	22	14⅜
1771	1507840	—	1788	12	85
1772	1020242	—	1120	8	51¾
1773	1198895	—	1283	17	38⅝

Années.	Minérai.		Contenu en argent.		
	Pouds.	Liv.	Pouds.	Liv.	Sol.
1774	1326719	—	1479	14	$51\frac{1}{8}$
1775	1338753	—	1311	5	$36\frac{3}{4}$
1776	1561012	—	1483	14	$89\frac{4}{8}$
1777	1494122	—	1192	19	82
1778	1391317	—	968	17	$77\frac{7}{8}$
1779	1597118	—	1034	30	—
1780	1653567	—	920	28	$65\frac{7}{8}$
1781	963593	—	509	5	$86\frac{7}{8}$
1782	614319	—	378	20	$64\frac{7}{8}$
1783	1099392	23	689	16	$1\frac{66}{96}$
1784	866067	33	559	38	$85\frac{44}{96}$
1785	1513731	18	851	5	$71\frac{6}{8}$
1786	1434939	14	875	6	$52\frac{69}{96}$
1787	1273301	24	801	6	$40\frac{28}{96}$
1788	1498757	14	953	23	$16\frac{64}{96}$
1789	1581887	10	1031	6	$39\frac{40}{96}$
1790	1352422	15	878	30	$19\frac{1}{96}$
1791	1068350	38	748	34	$65\frac{84}{96}$
1792	1142318	5	801	10	$94\frac{57}{96}$
1793	1131466	30	952	16	$53\frac{46}{96}$
Total	37784249	24	34441	11	$28\frac{34}{96}$

EXPLICATION DES PLANCHES.

Tab. IV. Profil perpendiculaire de la Mine de Zméof.

1) gîte de minérai ou la gangue de Spath pésant.

2) Le parois inférieur de Petrosilex.

3) Le mûr de Stéatite sur lequel répose toute la masse du filon avec ses parois.

4) Schiste marneux.

5) Schiste argileux noire dure.

6) Depôt de Poudingue siliceux avec des pétrifications.

7) Schiste argileux grisâtre.

8) Couche de différentes espèces d'argille.

9) Puits principals.

10) Traverse par laquelle on a trouvé la base qui consiste de Stéatite.

Tab. V. Profil horizontal de la Mine de Zméof de la surface de la montagne.

A. 1) Le filon de Spath pésant (qui représente la partie principale).

2) Le parois inférieur de Petrosilex.

3) Schiste marneux qui couvre la base du roc.

4) Schiste argileux qui fait le toît.

5) Filons de Trapp noir.

6) Cette marque indique l'endroit du filon où l'on a pris le Profil perpendiculaire.

B. 1) Gite separée du filon appellée *Kommiskoï - Rosnoss.*

2) Le parois inférieur du Petrosilex.

3) Filon de trapp.

4) Schiste argileux du toît.

Tab. VI. Profils horizontals dans une profondeur de 29 et de 37 toises.

A et B. 1) Le filon de Spath pésant.
2) Le parois de Petrosilex.
3) Schiste argileux du toît, ou le parois supérieur.
4) Filons de trapp noir.

Tab. VII. Profils horizontals dans une profondeur de 76 et de 86 toises.

A et B. 1) Gîtes de minérai.
2) Le Petrosilex.
3) Ces points marquent la continuation supposée de Petrosilex.
4) Quartz sec imprégné de quelques points de mine.
5) Schiste noir onctueux minéralisé.
6) Schiste argileux du parois supérieur.
7) Filons de trapp.

Tab. VIII. Vûë de la Mine de Zméof.

1) Le puit de Wosnesensk.
2) Le puit de Préobragénsk.
3) Le puit d'Ekaterininsk.
4) Le filon de Spath pésant selon sa plus grande largeur.

4') Parois inférieur de Petrosilex.

4'') Couche d'argille.

5) Mûr au de là du quel se trouve le Kommiskoi-Rosnoss.

6) Tas de minérai.

7) Maisons pour la séparation du minérai.

8) Magazins de bled etc.

9) Laboratoire chimique.

10) Fortification.

11) Transporteurs de mine.

12) La petite rivière Zméofka.

MIRABILIUM JALAPARUM HYBRIDARUM ULTERIUS CONTINUATA DESCRIPTIO.

Auctore

Dr. J. T. KOELREUTER.

Conventui exhibita die 10 Dec. 1798.

Exp. XXV.

vulg. rubr. ♀. } ♀.
Jalap. longifl. ♂. }
longifl. ♂.

Semina ex plantis Exp. XXIV. an. 1770. sponte nata. Prod. an. 1771. ex seminibus hisce sponte natis plantae quatuor.

a) Tubus floris $2''$, $8 - 11'''$ longus; Limbus $1''$, $3'''$ latus. Calyx valde hirsutus. Laciniae floris oblongiores, plicatae, ac profundius fissae. Color satis lacteus, ostio tubi e violaceo purpureo. Habitu tota planta longiflorae adhuc similior, quam vulgari, ast nunc plane sterilis mihi visa.

b) Tubus floris $3''$, $5'''$ longus; Limbus $1''$, $3 - 5'''$ latus. Calyx hirsutissimus, pilis quoad maximam partem pur-

purascentibus. Laciniae corollae valde oblongae, plicatae ac profundius fissae. Color, ut in a), ostio tubi e violaceo purpurascente, ac stella exinde prodeunte viridule, margine rubello. Planta haec habitu suo in universum priori a) similis quidem, ast proventu seminum perpaucorum urnulaeformium spontaneo ab eadem abludens.

c) Tubus floris 2″, 9 — 11‴ longus; Limbus 1″, 1 — 2‴ latus. Calyx fere omnis glaber. Laciniae corollae satis rotundatae, ac minime fissae. Color pulchellus, qualem *Lilac* vocant, stella e violaceo purpurea. Planta caulium paucitate a caeteris distincta.

d) Planta unicaulis, ramis perpaucis, sero autumno demum florens, pigmaea quidem, caeterum autem ad longifloram satis adhuc accedens.

Exp. XXVI.

vulg. alb. ♀. } ♀.
Jalap. longifl. ♂. }
longifl. ♂.

An. 1770 d. 7 Aug. Flor. plur.

Prodierunt An. 1771 sub hoc primo gradu ascendente plantae quatuor.

a) Tubus floris 4″, 1‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Laciniae corollae, ad modum longiflorae, jam satis lacteolae, oblongae ac plicatae. Ostium tubi e violaceo purpureum, cum stella pallidissime violacea. Plantae vastissimi ambitus, uti communiter assolent, sub situ caulium procumbentium jam jam valde horizontali, ac in universum patri nunc multo propinquior, quam sub priori statu

hybrido. Semina perpauca bona sero nimis dabat, vix maturescentia.

b) Tubus floris $2''$, $6 - 7'''$ longus; Limbus $1''$, $1'''$ latus. Color floris lacteolus, ostio tubi e pallide violaceo purpureo. Figura laciniarum corollae parabolica; hinc hae ipsae antice angustiores, leviter incisae ac explanatae. Planta ambitu *a*) vix inferior, caulibus ramisque numerosioribus ac suberectis. Vis vegetativa florescentiae tempore adeo lenta, ut pauci tantum ejus flores sese recluderint; caeterum plane sterilis.

c) Tubus floris $3''$, $7'''$ longus; Limbus $1''$, $4'''$ latus. Flos lacteolus, stella pallide viridi, ac exterius subviolacea. Figura laciniarum corollae circiter, ut in *a*) et *b*). Planta habitu universo ad *a*) accedens; vis ipsius vegetativa non minus lenta, quam *b*), hinc infoecunda plane.

d) Tubus floris $3''$, $2'''$ longus; Limbus $1''$, $5'''$ latus. Tubus floris admodum angustus: Laciniae rotundiores, haud profunde incisae, ast valde complicatae. Color florum lacteolus, ostio e pallide violaceo purpureo. Planta, proprietatum respectu *c*), similis.

Exp. XXVII.

Jalap. vulg. rubr. ♀. } ♀.
Jalap. dichot. ♂. }
Jalap. vulg. rubr. ♂.

An. 1776 d. 17 — 29 Aug. Flor. plur.

Prod. An. 1777 plantae quatuor, vulgari rubrae, tanquam matri naturali nunc rursum similiores, quam dichotomae: omnes in ferendis seminibus satis felices.

Pond. plantae *a*) 10 ℔ 6 lot. Radicis 2 ℔.
— — *b*) 2 ℔ 16 lot. — 1 ℔ 16 lot.
— — *c*) 5 ℔ 11 lot. — 1 ℔ 21 lot.
— — *d*) 1 ℔ 12 lot. — 1 ℔ 1 lot.

Exp. XXVIII.

Jalap. vulg. flav. ♀. / dichot. ♂. } ♀.

Jalap. vulg. rubr. ♂.

An. 1771 mens. Jul. Flor. plur.

Prod. An. 1772 plantae quinque.

a) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus: laciniis satis rotundis. Color florum illi, ex copula Jalap. v. flav. cum v. alb. vel Exp. invers. (vid. infra Exp. XLIII et XLIV.) semper oriundo simillimus: sc. ruber, cum levi aurantii tinctura. Genitalia ultra corollam longe porrecta. Tota planta vasti ambitus, ac 3′, 3″ alta: caulibus, ramis ac floribus fere innumeris. Folia permagna. Foecunditas ipsius, praecipue ob florum copiam, major, quam vulg. ejusque varietatum. Pond. plantae d. 23 Oct. 12 ℔. Radicis 1 ℔ 29 lot.

b) Tubus floris 1″ longus; Limbus 1″, 2‴ latus: laciniis suboblongis. Color florum e pallide violaceo carmesinus, absque notabili flavedine. Magnitudo plantae vulgari inferior. Folia obscure viridia. Foecunditas infrequentior, quam in vulg. vel sub priori ipsius statu hybrido. Pond. plantae 3 ℔ 7 lot. Radicis 5 ℔ 10 lot.

c) Tubus floris 1‴, 1‴‘ longus; Limbus 1‴, 2‴‘ latus. Color florum pallidior paulo, quam *a*). Planta, propter bifurcationes suas obtusangulas, vastissimi ambitus ac giganteae magnitudinis. Folia permagna ac dilute viridia. Fasciculi florum innumerorum densius congesti modicam tantum bonorum seminum copiam dabant. Seminum forma illi dichot. adhuc multum similis.

d) Tubus floris 1‴, 1‴‘ longus; Limbus 1‴, 4‴‘ latus. Color florum elegantissimus, sc. e profunde violaceo carmesinus. Silvula plantae humilior, foliis plurimis angustioribus ac intense viridibus, laudabili foecunditate praedita.

e) Tubus floris 1‴, 2‴‘ longus; Limbus 1‴, 3‴‘ latus. Flores aurantii, stella e violaceo carmesina; ac ostio tubi purpureo. Genitalia ultra corollam longius porrecta. Silva plantae modicae quidem altitudinis, ast bifurcationum obtusangularum ratione vasti ambitus. Flores innumeri, foecundiores, quam vulg.

Exp. XXIX.

Jalap. vulg. flav. ♀. } ♀.
Jalap. dichot. ♂. }
Jalap. vulg. alb. ♂.

An. 1771 mens. Jul. Flor. plur.

Prod. An. 1772 plantae septem, quibus omnibus cotyledonum folia permagna.

a) Tubus floris 1‴, 2‴‘ longus; Limbus 1‴, 7‴‘ latus. Color florum pallide carmesinus, sive intense roseus. Planta notabiliter minor, quam ulla vulgarium. Folia e flavo

viridia. Foecunditas, ut sub priori statu hybrido. Pond. radicis 1 ℔ 1½ lot.

b) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 7‴ latus. Color florum amoenus valde, e violaceo carmesinus. Silvula hujus plantae respectu ambitus sui aeque magna, ac vulg. ast eadem multo humilior, caulibus ramisque minoribus, furculisque gracilioribus ac brevioribus. Folia e flavo viridia ac lucida. Foecunditas tanta, quanta vulg. Pond. plantae 4 ℔ 20 lot., Radicis 1 ℔ 11 lot.

c) Tubus floris 1″, 2‴ longus; Limbus 1″, 6‴ latus. Flores pallide carmesini, marginem versus flavedine notabili perfusi. Planta respectu magnitudinis totiusque sui habitus vulgarem maxime referens. Folia intense viridia ac lucida. Foecunditas vulgari non multo inferior. Semina majora, quam vulg. at jam ex incano villosa, ut in eadem. Pond. plantae 5 ℔ 6 lot., Radicis 5 ℔ 17 lot.

d) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Color florum pallide carmesinus sive intense roseus. Planta staturae humilioris minorisque ambitus, quam vulg. foecunditate autem eidem fere par: furculis gracilioribus ac brevioribus. Semina paulo majora, nigriora, angulisque acuratioribus dotata, quam vulg. Pond. plantae 2 ℔ 1 lot. Radicis 1 ℔ 19 lot.

e) Tubus floris 1″, 1‴ longus; Limbus 1″, 2″ latus. Color florum e pallide violaceo carmesinus, marginem versus flavedine vix notabili suffusus. Silvula magnitudine mediocris, foliis intense viridibus, furculisque patulis. Foecunditas haud minor, quam parentum natutalium. Semina iis vulg. majora quidem, ast jam valde similia.

f) Tubus floris 1″, 2‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flores intense violaceo carmesini, calycibus majoribus. Planta, ut *e*) vulgari jam persimilis, foecunditatis autem paulo remissioris.

g) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 8‴ latus. Flores tam amplitudine, quam colore ex intense violaceo omnium speciosissimi. Genitalia ultra corollam longius exporrecta.

Exp. XXX.

Jalap. vulg. flav. ♀. } ♀.
Jalap. dichot. ♂. }
Jalap. vulg. flav. ♂.

An. 1771 mens. Jul. Flor. plur.

Prod. 1772 sub hoc primo gradu descendente plantae quinque.

a) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flos totus flavus, attamen notabiliter pallidior, quam vulg. flav. Tubus corollae satis incurvus. Planta ipsa magnitudine ac fertilitate ad vulg. flavam proxime accedens. Calyces, semina matura includentes, majores, patentiores ac pallidiores erant, quam in eadem. Folia e flavo viridia. Pond. plantae 3 ℔ 8 lot., Radicis 1 ℔ 7 lot.

b) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Flores e pallide violaceo carmesini ac marginem versus notabili flavedine tincti. Genitalia ultra corollam longe porrecta. Planta vasto ambitu *a)* Exp. XXVIII. neutiquam cedens, ac fertilitate vulg. flavae par. Caules ramique longi ac graciles, bifurcationibus jam sat acutangulis. Folia e flavo viridia. Pond. plantae 5 ℔ 23½ lot., Radicis 1 ℔ 14 lot.

c) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Color florum idem fere ac in *a)* Silvula plantae vulg. flava

notabiliter minor. Folia satis intense viridia. Bifurcationes caulium ramorumque sub angulis obtusioribus, quam *a*) et *b*). Caeterum fertilitate vulg. flavae longe inferior. Pond plantae 3 ℔ 12 lot., Radicis 3 ℔ 23 lot.

d) Tubus floris 1‴, 4‴‘ longus; Limbus 1‴, 3‴‘ latus. Flos pallidius flavicans, quam *a*) et *e*). Silvula plantae ambitus fere ejusdem ac vulg. flavae, ast paulo depressior. Furculae caulium ramorumque satis obtusangulae. Folia e flavo viridia. Calyces, semina matura continentes, ut in *a*). Foecunditas circiter vulg. flavae. Pond. plantae 2 ℔ 16 lot., Radicis 1 ℔ 23½ lot.

e) Tubus floris 1‴, 3‴‘ longus; Limbus 1‴, 4‴‘ latus. Flos *a*) concolor. Calyces valde parvuli. Tubus corollae gracilis ac incurvus. Planta ambitu, habitu toto, florum copia ac fertilitate ad *e*) Exp. XXVIII. proxime accedens. Calyces, semina matura includentes, ejusdem quidem magnitudinis, ac vulg. flavae, ast pallidiores.

Exp. XXXI.

Jalap. { vulg. rubr. ♀. / dichot. ♂. } ♀.

Jalap. dichot. ♂.

An. 1776 mens. Aug. Flor. plur.

Prod. an. 1777 sub hoc primo gradu ascendente plantae duae, toto habitu ♂, si dichotomae jam multo similiores, quam sub priori statu hybrido. Utraque modicum tantum bonorum seminum numerum dabat. Pond. plantae unius, sub dio plantatae, 2 ℔ 19 lot., Radicis 1 ℔.

Exp. XXXII.

Jalap. vulg. rubr. ♀.
longifl. ♂.

Sem. an. 1772 sponte nata.

Plantae ex seminibus hujus hybridae (Exp. I.) an. 1773 mihi prognatae sex. Folia nonnullarum juniorum vesiculosa.

a) Planta pigmaea, foliis vesiculosis, sordide viridibus, rubigine foedatis varieque convolutis; floribus valde longis e violaceo albicantibus, ostio tubi amoene violaceo. Penitus sterilis. Pond. plantae 16 lot. Radicis 18 lot.

b) Planta vastissimi ambitus, caulibus numerosis, procumbentibus, foliisque obscure viridibus. Semina perpauca bona. Pond. plantae 7 ℔ 14 lot. Radicis 2 ℔ 4 lot.

Not. Hac et subsequens sub statera odorem vinosum de se spargebant.

c) Planta divaricati habitus, sat magna, ramis exactis, tota villosa, calyx praecipue. Flores e violaceo carmesini, quamvis numerosissimi, vix unum alterumve semen bonum dabant. Pond. plantae 3 ℔ 18 lot. Radicis 1 ℔ 5 lot.

d) Planta alta ac divaricata, caulibus crassis, valde longis, rubicundis, hirsutis; foliis pallide viridibus, vesculosis; floribus longis, e rubro violaceis, pilosis: omnibus infoecundis; caeterum habitu longiflorae adhuc valde affinis. Pond. plantae 1 ℔ 13 lot. Radicis 2 ℔.

e) et *f*) Plantae parvulae, divaricati habitus, subpigmaeae, quarum flores statum perfectum haud attigerunt. Ambae sat cito in genicula sua dilapsae. Pond. radicis unius 5½ lot. alterius 26 lot.

Exp. XXXIII.

Jalap. vulg. alb. ♀.
longifl. ♂.

Sem. an. 1770 sponte nata.

Plantae ex seminibus hujus hybridae (Exp. II.) an. 1771 enatae quinque.

a) Tubus floris 2‴, 3‴‘ longus; Limbus 1‴, 5‴‘ latus. Color ac conformatio florum fere ut sub priori statu hybrido, attamen lobi oblongiores ac profundius incisi, stella pallide viridi, ostioque tubi intensius violaceo, quam antea. Planta quoque ipsa habitus prioris anni, ampli ac divaricati, ast penitus sterilis.

b) Tubus floris 1‴, 4 — 6‴‘ longus; Limbus tantum 10 — 11‴‘ latus. Totus flos albicans, ne ostio quidem excepto, cum levissima *Lilac* tinctura. Lobi corollae subrotundi, leviterque incisi. Tubus corollae satis incurvus. Planta ipsa magnitudine mediocris, habituque toto ad vulg. albam rursus aliquantisper accedens; caeterum summo gradu infoecunda.

c) Tubus floris 1‴, 6‴‘ longus; Limbus 1‴, 3‴‘ latus. Color florum *Lilac*, ostio tubi pallide violaceo. Tubus ipse aliquantulum incurvus. Lobi corollae subrotundi, ac levissime incisi. Planta habitu *b*) consimilis, parvum bonorum seminum numerum praebuit.

d) Tubus floris $2''$, $1 - 3'''$ longus; Limbus $1''$, $2 - 3'''$ latus. Flos totus pallide *Lilac*, lobis, quam prius, multo rotundioribus, minusque incisis, tubo corollae incurvo magis, ejusque ostio saturatius violaceo. Planta, licet satis ampla ac divaricata fuerit, ad vulg. albam jam multum vergebat, semenque unicum tantum bonum, ast insolenter magnum dabat.

e) Tubus corollae $1''$, $9''' - 2''$ longus; Limbus $1''$, $2'''$ latus. Flos albus, ostio tubi e pallide violaceo carnesino, Lobis corollae rotundioribus quidem, ast aeque profunde incisis, quam prius. Planta vasto suo ambitu *a*) Exp. XXVI. superabat; caules primarii valde crassi. Divisio caulium ramorumque, ac foliorum natura circiter ut sub priori statu hybrido. Quamlibet opportuno tempore ac copiose floruerit, in summo tamen gradu sterilis erat.

Exp. XXXIV.

Jalap. vulg. flav. ♀.
longifl. ♂.

Sem. an. 1770 sponte nata.

Plantae edae generationis ex seminibus hujus hybridae (Exp. III.) an. 1771 enatae duae.

a) Planta ratione florum, quas hoc anno obtinueram, omnium pulcherrima. Tubus floris $2''$, $1 - 2'''$ longus, inferius gracilis, superius satis amplus, sursumque inflexus; Limbus $1''$, $5'''$ latus, lobis profundius incisis ac fluctuatim plicatis. Color floris intense *Lilac*, sive roseus, violaceo permixtus. Flores equidem haud fle-

xibiles, nec adeo graciles, ut longiflorae, ast notabiliter deorsum flexi ac quasi penduli. Tota planta in universum eidem approximata, foliis licet minoribus instructa ac minor vulg. flava fuerit. Plures ejus flores sequebatur exordium impraegnationis, hincque calyces ipsorum persistentes, verum ovaria postinde marcescentia. Semina pauca bona.

b) Tubus floris undique sat crassus, priorisque *a*) instar inflexus, 1″, 6 — 8‴ longus. Planta adhuc satis divaricata, substantiae colorisque foliorum autem respectu vulg. flavae notabiliter rursum approximata. Vis ejus vegetativa adeo lenta ac remissa erat, ut florum non adeo multi ad perfectionem pervenerint. Plurimi eorum decidui, rariorum calyces persistentes semen includebant superius valde depressum ac emortuum.

Exp. XXXV.

Jalap. vulg. rubr. ♀.
dichot. ♂.

Sem. an. 1771 sponte nata.

Plantae ex seminibus hujus hybridae (Exp. IV.) an. 1772 prognatae mihi decem.

a) Tubus floris 1″, 3‴ longus, 1″, 1‴ latus. Color floris e violaceo carmesinus, tinctura flavicante vix notabili marginem versus permixtus. Tubus corollae gracilis. Planta vasti ambitus, quo parentes naturales longe superabat, ac fertilitatis conspicuae; caeterum vulg. rubrae proximior, quam dichotomae. Folia laete viridia. Semina longe majora, glabriora ac nigriora, quam vulg.

rubrae, angulis acutis tuberculisque prominentibus, dichotomae instar, insignita. Pond. plantae 9 ℔ 24 lot. Radicis ramosae 7 ℔.

b) Tubus floris 11‴ longus; Limbus 1″ latus. Color florum praecedentis, modo pallidior paulo. Tubus corollae, totius floris respectu, satis crassus. Habitus plantae in universum vulg. rubrae jam satis respondens. Folia obscurius viridia, quam *a*). Seminum bonorum numerus multum infra Exp. IV. Pond. plantae 9 ℔ 7 lot.

c) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flores peramoeni, ex intense violaceo carmesini. Tubus corollae mediae magnitudinis. Planta habitus respectu *b*) non absimilis, foliis autem laete viridibus, tantaque foecunditate praedita, quanta vulg. rubrae unquam competit. Pond. plantae 3 ℔ 30 lot.

d) Tubus floris 10‴ longus; Limbus 1″ latus. Flos e violaceo carmesinus, cum tinctura flavescente notabili. Ostium tubi inferius flavescens. Tubus ipse sat crassus. Planta exigua, foliis obscure viridibus, floribusque rarioribus praedita, ac deciduis fere omnibus. Semina bona tantum perpauca, iis vulg. rubrae valde similia. Florescentia sub finem Septembris in hac jam cessaverat, cum plures aliae hybridarum ipsaeque naturales adhuc laete florerent. Pond. plantae 1 ℔ 9 lot.

e) Tubus floris 1″, 1‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flores aurantii, stella e violaceo carmesina. Tubus corollae mediae longitudinis. Planta habitu *b*) non absimilis, fertilitatis haud exiguae. Semina angulis acutis tuberculisque prominentibus instructa. Pond. plantae 4 ℔ 24 lot.

f) Tubus floris 1″, 2‴ longus; Limbus 1″, 3 — 4‴ latus. Color florum circiter ut *d*). Tubus corollae mediae conformationis. Habitu, plantae propter bifurcationes acutangulas, valde erectus. Folia grandia longeque acuminata. Fertilitate vulg. rubrae par.

g) Tubus floris 1″, 1‴ longus; Limbus 11‴ latus. Color florum e violaceo carmesinus, absque flavescentis admixtione notabili. Tubus corollae solito crassior. Plantae silvula exilis, ut *d*); folia itidem obscure viridia, ac semina bona perpauca.

h) Tubus floris 9 — 10‴ longus; Limbus 11″ — 1″ latus. Flores *c*) instar, peramoeni. Tubus corollae crassiusculus. Planta equidem aliquanto major *g*) ast vulg. rubra minor. Folia laete viridia. Semina bona tantum perpauca. Florescentia cum fine Septembris jam penitus cessans.

i) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flores ex intense violaceo carmesini, cum levissima tinctura flavescente. Planta satis spectabilis, certe vulg. rubra major, ac aeque foecunda. Folia obscure viridia. Bifurcationes obtusangulae. Semina sat grandia, nigricantia ac obtusa.

k) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 2‴ latus. Flores *i*) consimiles. Planta exilis equidem, caulibus ramisque parcius instructa, attamen satis foecunda. Semina grandiora, bruna ac antice acuminata.

Exp. XXXVI.

Jalap. vulg. alb. ♀.
dichot. ♂.

Sem. an. 1771 sponte nata.

Plantae ex seminibus hujus hybridae (Exp. V.) an. 1771 enatae novem.

a) Tubus floris 1‴, 2‴‘ longus; Limbus 1‴, 3‴‘ latus. Flores peramoeni, e violaceo carmesini, absque ulla flavedinis mixtura. Tubus corollae sat gracilis. Planta quidem non admodum alta, at fasti ambitus, caulibus divaricatis, partim fere horizontaliter decumbentibus, ac fertilitatis vulg. rubra vix inferioris. Pond. plantae 6 ℔ 24 lot. Radicis 2 ℔ 7 lot.

b) Tubus floris 1‴, 2‴‘ longus; Limbus 1‴, 2‴‘ latus. Color florum aurantius, stella e violaceo carmesina. Tubus corollae gracilior. Silvula plantae exilis, foliis insolenter parvis; de reliquo satis foecunda. Semina obtusiora, iisque vulg. similia. Pond. Plantae 1 ℔ 29 lot.

c) Tubus floris 1‴ longus; Limbus 1‴, 2‴‘ latus. Flores pallide violaceo carmesini, absque notabili flavescentis tinctura. Tubus floris amplus. Silvula plantae exilis, humilis ac densa, folia ipsius obscure viridia ac ampla adeo contigua erant, ut rami vix conspectui paterent. Florescentia sub fine Septembris jam finita. Semina bona perpauca ac impressa valde. Pond. plantae 2 ℔.

d) Tubus floris 11‴‘ — 1‴ longus; Limbus 1‴ — 11‴, 1‴‘ latus. Flores penitus albi, antheris flavis. Tubus corollae gracilior. Plantae statura non adeo magna; Folia laete viridia. Foecunditas mediocris. Pond. plantae 1 ℔ 17 lot.

e) Tubus floris 1″, 1‴ longus; Limbus 1″, 1‴ latus. Color florum speciosissimus, ex saturate violaceo carmesinus. Tubus corollae mediocris. Planta toto suo habitu ad *c*) valde accedens, at seminibus bonis feracissima. Pond. plantae 1 ℔ 26 lot. Radicis 2 ℔ 20 lot.

f) Tubus floris 1″, 2‴ longus; Limbus 1″, 2‴ latus. Color florum idem ac *e*) ast paulo obscurior. Tubus corollae gracilis. Silvula plantae vulgari minor, seminibus bonis feracissima. Pond. plantae 3 ℔ 16 lot.

g) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flores speciosissimi, ex intense violaceo carmesini. Calyx solito major. Plantae statura mediocris, foliis obscure viridibus, furculisque acutangulis, infoecundior longe, quam sub priori statu hybrido.

h) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 2‴ latus. Color. flor. prioris *g*), sed pallidior.

i) Tubus floris 1″ longus; Limbus 1″ latus. Color florum circiter, ut *h*). Silvula plantae humilior, foliis densius congestis, furculisque brevioribus. Foecunditas ipsius multo remissior, quam sub priori statu hybrido.

Exp. XXXVII.

Jalap. vulg. flav. ♀.
dichot. ♂.

Sem. an. 1771 sponte nata.

Plantae ex seminibus hujus hybridae (Exp. VI.) an. 1770 mihi prognatae novem.

a) Tubus floris 1″ — 1″, 1‴ longus; Limbus 1″, 2 — 3‴ latus. Flores straminis colore, adeoque multo pallidiores, quam vulg. flavae. Tubus corollae leviter incurvus, crassitiei mediae. Antherae rubrae. Lobi corollae antice satis profunde incisi. Planta magnitudine vulgari flava inferior, multoque minoris foecunditatis, quam sub priori statu hybrido. Pond. radicis 2 ℔ 10½ lot.

b) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus: lobis oblongis ac antice satis profunde incisis. Color florum fere igneus sive pallide carmesinus, cum tinctura flavescente marginem versus. Tubus corollae gracilior. Planta speciosi ambitus habitusque subdivaricati: furculis caulium ramorumque multo magis obtusangulis, quam vulg. flavae. Folia perampla, e flavo viridia. Calyces et semina insolitae magnitudinis. Caeterum valde foecunda. Anguli seminum subacuti, eorumque tubercula prominulae, ut in dichotoma. Pond. plantae 4 ℔ 6 lot. Radicis 4 ℔ 1 lot.

c) Tubus floris 1″, 6 — 7‴ longus; Limbus 1″, 8 — 9‴ latus: lobis rotundioribus minusque incisis. Color florum pallide sulphureus. Antherae rubrae. Tubus corollae inferius gracilis. Calyx solito major. Planta toto suo habitu, magnitudine ac fertilitate cum vulg. flava conveniens. Pond. plantae 3 ℔ 18 lot.

d) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flores pallide carmesini, cum tinctura flavescente marginem versus. Tubus corollae gracilis. Planta humilis, at robusta ac densius compacta: foliis parvis, obscure viridibus, furculisque numerosis, brevioribus. Numerus florum conjunctim florentium insolenter magnus.

Fertilitas tanta fere, quanta vulg. flavae. Pond. plantae 3 ℔.

e) Tubus floris vix 1‴ longus, adeoque valde brevis; Limbus 1‴, 2‴‘ latus: lobis profunde incisis. Flores pallide carmesini, marginem versus multa flavedine tincti. Ostium tubi penitus flavum. Tubus ipse quoque uno latere flavescens, ac in medio rubellus. Planta habitu ac magnitudine circiter vulg. flavae, fertilitate autem a priori suo statu hybrido multum diminuta. Semina fere, ut *b*). Pond. plantae 2 ℔ 10 lot.

f) Tubus floris 1‴, 3 — 4‴‘ longus; Limbus 1‴, 1 — 2‴‘ latus. Flores straminis coloris pallidioris. Antherae rubrae. Tubus corollae gracilior. Calyx solito major. Planta ipsa jam gigenteae altitudinis erat, priusquam floreret. Folia e flavo viridia, perampla longiusque acuminata. Caules ac rami valde robusti. Caeterum non admodum foecunda, forsan serioris florescentiae causa potius, quam vitii innati. Semina dichotomae valde similia. Pond. plantae 13 ℔. Radicis varie divisae 5 ℔ 24 lot.

g) Tubus floris 1‴, 4‴‘ longus; Limbus 1‴, 2‴‘ latus. Flores e pallide violaceo carmesini, cum tinctura flavescente marginem versus vix notabili. Silvula plantae per exigua quidem, ast foliis amplis, saturate viridibus probe contecta, penitusque foecunda.

h) Tubus floris 1‴, 3‴‘ longus; Limbus 1‴ latus. Flores e pallide violaceo carmesini. Ostium tubi flavum. Calyx parvus. Planta altior ac divaricata, furculis praelongis, acutangulis, foliisque e flavo viridibus. Flores plurimi decidui ac semina tantum perpauca bona.

i) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flores in medio e pallide violaceo carmesini, ac marginem versus subaurantii coloris. Planta vastissimi ambitus ac altitudinis valde conspicuae: divaricationibus obtusangulis. Folia laete viridia. Foecunditas vulg. flava superior. De reliquo toto fere habitu ac ipsis seminibus, quamlibet vulg. flava majoribus et longioribus, ad dichotomam valde accedens.

Exp. XXXVIII.

Jalap. dichot. ♀.
longifl. ♂.

Sem. an. 1772 sponte nata.

Plantae ex seminibus hujus hybridae (Exp. VIII.) an. 1773 prognatae sex.

a) Planta pigmaea: caulibus rubris, longis, huc et illuc versis, ac admodum Tropaeoli indici depressis ac repentibus, foliisque parvis, pallide viridibus ac rubigine foedatis. Ad florescentiam haud pervenit. Caulis primarius inferne fasciatus. Pond. plantae 6 lot. Radicis 2 drachm.

b) Planta parvula, habitus divaricati, foliis e flavescenti viridibus ac vesiculosis. Nec floruit. Pond plantae 24 lot. Radicis 5½ lot.

c) Haec serum autumnum versus flores demum produxit, apertionem non amplius attingentes. Pond. plantae 1 ℔ 16 lot. Radicis 10 lot.

d) Planta magna, toto habitu ad longiflorum valde accedens. Flores coloris *Lilac*, numerosi valde, sed plane infoecundi. Calyx villosus ac subglutinosus. Pond. radicis 2 ℔ 29 lot.

e) Silvula plantae plusquam mediae magnitudinis, caulibus ramisque tenuibus, glabris ac obtusangulis; foliis parvulis, itidem glabris ac rubigine valde foedatis. Huic ratione florescentia eadem plane sors ac c). Pond. plantae 3 ℔ 22 lot. Radicis 2 ℔ 15 lot.

f) Planta pigmaea. Pond. radicis tantum 6 lot.

Exp. XXXIX.

vulg. flav. ♀.

Jalap. { vulg. rubr. ♀. / longifl. ♂. } ♂.

Sem. an. 1770 sponte nata.

Plantae 2dae generationis, ex seminibus hujus hybridae, et quidem ex variet. *b*) Exp. XX. an. 1771 prognatae septem.

a) Tubus floris 1″, 4 — 6‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flores e pallide rubicundo flavescentes, sive *chamois*: ostio tubi purpureo. Planta circiter magnitudine vulg. flavae, foliis e flavescenti viridibus. Copia florum maxima, quorum plurimi decidui quidem, attamen sat numerosi foecundi. Semina natura e calycibus suis prominentia, iis vulg. quidem minora, ast jam satis similia.

b) Tubus floris 1″, 5 — 6‴ longus; Limbus 1″, 2‴ latus. Color florum *chamois*, plus in flavum, quam rubrum,

inclinans: ostio tubi concolore. Tubus ipse totus flavus. Planta magnitudinis respectu multum infra vulg. ac fere pigmaea, penitusque infoecunda. Folia obscure viridia.

c) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 6‴ latus. Flores ex *chamois* jam rursus in rubicundum vergentes. Ostium tubi purpureum. Calyx magnitudine vulg. cum e contrario in caeteris omnibus minor fuerit, quam in eadem. Planta toto suo habitu vulgari valde affinis. Flores, licet copiosissimi, numerum seminum bonorum modicum tantum dabant.

d) Tubus floris 1″, 7 — 9‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Color circiter ut *a*). Habitus hujus plantae, matris suae hybridae instar, subdivaricatus. Flores licet copiosissimi, ast semina bona perpauca.

e) Tubus floris 1″, 7 — 8‴ longus; Limbus 1″, 1‴ latus. Flores saturate flavi, ut Narcissi Jonquillae, absque ulla rubicundi mixtura, odoris gravis ac suavissimi. Tubus floris gracillimus. Calyx omnium hujus Exp. minimus. Folia in flavum valde inclinantia. Florescentia larga. Semen bonum ne unicum quidem.

f) Tubus floris 1″, 7‴ longus; Limbus 1″, 4 — 5‴ latus. Florum color fere ut *a*). Planta habitus divaricati, foliis e flavescenti viridibus. Florescentia larga, verum seminum bonorum numerum sero demum autumno paucissimus. Semina ipsa valde longa et angusta.

g) Tubus floris 1″, 7 — 8‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Tota planta circiter ut *c*). Folia ex obscure viridia. Florescentia largissima. Semina bona plane nulla.

Exp. XL.

vulg. flav. ♀.

Jalap. vulg. rubr. ♀. longifl. ♂. } ♂.

Sem. an. 1771 altera vice sponte nata.

Plantae 3tiae generationis, ex seminibus praecedentis (Exp. XXXIX.) et quidem ex individuis *a*), *d*) et *f*) an. 1772 prognatae quindecim. (Ex *a*.)

a) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flores e pallide rubicundo flavescentes, sive *chamois*: ostio tubi purpureo. Calyx valde angustus. Tubus corollae gracilis valde, superne satis amplus ac incurvus. Silvula plantae minor ac rarior, quam vulg flavae. Folia obscurius viridia, parvulae Bifurcationes caulium ramorumque graciliorum sat obtusangulae. Fasciculi florum densiores. Planta ab initio florescentiae infoecunda, autumnum versus semina bona pauciora dabat nigricantia ac satis angusta. Calyces seminum maturorum fere cylindrici, ancre apperssi, apicibusque suis vix ultra ea porrectis. Pond. plantae 2 ℔ 26 lot. Radicis 26½ lot.

b) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Color ac forma florum circiter ut *a*). Silvula plantae vulg. flava vix minor habitusque antecedentis. Fasciculi florum densissimi, hinc numerus simul florentium omnium maximus. Foecunditatis ratio eadem, ac *a*). Pond. plantae 3 ℔ 4 lot. Radicis 26½ lot.

c) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Color florum *a*) et *b*) consimilis. Calyx crassior, laciniis sol to longioribus. Planta habitu ac magnitudine *b*) fere similis; Folia autem majora, et fasciculi florum rariores. Foecunditas priorum. Calyces seminum maturorum apicibus suis ultra horum fastigium porrecti. Semina notabiliter minora, quam vulg. flavae Pond. plantae 3 ℔ 18 lot. Radicis 26 lot.

d) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus: lobis oblongioribus. Flores toti pallide flavescentes: tubo graciliore. Calyx valde angustus. Planta vulg. flava notabiliter major, habitus autem ac proprietatum ratione eadem cum praecedentibus, immo foecundior paulo. Calyx seminum naturarum adeo brevis erat, ut apicibus suis illorum fastigium haud attigerit. Pond. plantae 4 ℔ 2 lot. Radicis 25 lot.

e) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Flores e pallide rubicundo flavescentes, sive *chamois*. Calyx parvulus. Tubus corollae inferne valde gracilis, superne sat amplus. Sub initium Septembris florere demum incepit planta, magnitudine mediocris, habitus irregularis ac divaricati: foliis amplis, splendentibus, vesiculoso-rugosis. Fasciculi florum densi. Semina pauca sero nimis dabat, vix maturescentia. Calyces horum, ut in *a*).

f) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Totus flos pallide flavus. Calyx parvulus. Tubus corollae gracilis. Florescentia serior. Planta ipsa *e*) paulo minor, habitus satis exacti, foliis parvulis, dilute viridibus, nitidis et rugosis. Florum plurimi decidui, pauci serius foecundati. Semina horum e calyce longius prominentia, ad maturitatem plenariam vix pervenere.

g) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flos *f*) concolor. Calyx et corollae tubus eidem similis. Planta vulg. flava aliquanto minor, ac quoad habitum et florescentiam ab *f*) vix differens.

Ex *d*).

a) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 6‴ latus: lobis oblongioribus. Flores pulcherrimi, e bruno flavescentes, sive coloris boli armenae: ostio tubi purpureo. Calyx parvulus, laciniis angustis. Tubus corollae inferne valde gracilis, superne sat amplus. Planta non adeo magna, habitus divaricati ac irregularis: caulibus paucis, inaequalis longitudinis ac fere ad horizontem prostratis, ramisque rarioribus, sub angulis valde obtusis exeuntibus. Caules primarii autumnum versus e bruno rubicundi, foliisque jam vacui. Folia ramorum eodem tempore parvula sordide viridia, maculisque rubiginosis infecta. Florum plurimi propullulando marcescentes vis vegetativae debilioris causa, pauciores perfecte aperti ac foecundi. Semina matura bona paucissima, parvula ac nigricantia, calycibus suis penitus contecta. Pond. radicis 17½ lot.

b) Tubus floris 1″, 7‴ longus; Limbus 1″, 7‴ latus. Flores pallide flavi, marginem versus dilute bruni. Calyx major. Tubus corollae valde incurvus. Genitalia solito longiora. Planta magnitudine vulg. flavae, habitus divaricati ac irregularis. Caules pallide virides, longitudinis inaequalis. Folia intense viridia, splendentia. Fasciculi florum adeo densi, ut plurimi horum semper simul floruerint, decidui licet postea permulti. paucique tantum serius foecundati. Semina matura bona perpauca.

c) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Flores e pallide rubicundo flavescentes, sive *chamois*. Calyx parvulus ac brevissimus Tubus corollae valde gracilis. Genitalia solito longiora. Planta mediae magnitudinis ejusdemque cum *a*) habitus: caulibus prostratis, nudis autem plurioribus; ramis sub bifurcationibus acutangulis fere perpendiculariter erectis. Folia ramorum parvula, sordide viridia, hinc et inde rubiginosa. Florescentiae ac foecundationis phaenomena eadem, ac *a*). Semina bona glabriora et angustiora, quam vulg. flavae. Pond. plantae, fine Octobr. foliis fere penitus denudatae 28 lot.

d) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Florum color *c*) consimilis fere, ast paulo intensior. Calyx angustus valde. Tubus corollae ut in *c*). Planta ipsa mediae magnitudinis, foliis minoribus, intense viridibus ac splendentibus. Caules ac rami primarii foliis orbi. Florescentiae ac foecundationis phoenomena *a*) et *c*) similia. Calyces apicibus suis ultra seminum maturorum summitatem haud exporrecti.

e) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Florum color *chamois*. Calyx ac tubus corollae, ut in *d*). Planta minor, habitus divaricati ac valde irregularis, foliis intense viridibus et splendentibus; de reliquo ab eadem haud abludens.

f) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Florum color itidem *chamois*. Calyx et corollae tubus *e*). Planta ipsa autem *d*) consimilis.

Ex *f*).

a) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Totus flos omnium pulcherrimus, e bruno flavescens,

ostio tubi purpureo. Planta mediae magnitudinis, habitusque divaricati ac regularis. Caules ramique primarii crassiores, foliis amplis, intense viridibus ac splendentibus ornati. Rami sub bifurcationibus acutangulis erecti. Fasciculi copiosius florentes: floribus plurimis deciduis, paucioribus serius foecundatis. Semina bona perpauca, iis longiflore valde affima. Pond. plantae 2 ℔ 17 lot. Radicis 31 lot.

b) Tubus floris 1″ 5‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flores in medio e pallide violaceo carmesini, marginem versus in aurantium vergentes. Calyx sat magnus. Tubus corollae amplior. Planta satis magna, habitus divaricati ac regularis: bifurcationibus subacutangulis; foliis magnis, laete viridibus, ad vulg. flavam rursum valde accedens. Fasciculi florum rariores. Florum plures infoecunde decidui, paucissimi semina bona proferentes. Semina iis longiflorae aliquomodo similia.

Exp. XLI.

vulg. rubr. ♀. } ♀.
Jalap. longifl. ♂. }
vulg. alb. ♂.

Sem. an. 1770 sponte nata.

Plantae 2dae generationis, ex seminibus hybridae (Exp. XIV. *a*.) an. 1771 mihi prognatae octo.

a) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 6 — 8‴ latus. Flores pulchelli e carmesino violacei: ostio tubi coloris ejusdem intensioris. Semina bona pauca.

b) Tubus floris 1″, 4 — 5‴ longus; Limbus 1″, 4 — 5‴ latus. Color florum ut in *a*), ast saturatior, ac in violaceum magis vergens, pulcherrimus. Semina bona pauca.

c) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flores e violaceo carmesini: ostio tubi coloris ejusdem saturatioris. Semina bona sat multa.

d) Tubus floris 1″, 4 — 5‴ longus; Limbus 1″, 4 — 5‴ latus. Flores albi, et quidem ejusdem, ac vulg. albae. Semina bona perpauca, vix matura.

e) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Color florum ut in *b*). Semina bona perpauca.

f) Tubus floris 1″, 8‴ longus; Limbus 1″, 5 — 6‴ latus. Color florum idem, ac in *b*) et *e*).

g) Tubus floris 1″, 7‴ longus; Limbus 1″, 3 — 4‴ latus. Flores albi, *d*) consimiles. Vis vegetativa plantae adeo debilitata erat, ut, licet alta satis, sero nimis ad florescentiam pervenerit; hinc etiam semen bonum vix unum alterumve foecundatum.

h) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Color florum, ut in *b*), *e*) et *f*). Semina bona sat multa.

Not. Omnes hae plantae ejusdem habitus erecti erant, ut illa prioris anni, caulibusque suis crassis ac foliis peramplis ab aliis ejusmodi plantis maxime distincta.

Exp. XLII.

Jalap. vulg. flav. ♀.
longifl. ♂.

Semina an. 1771 altera vice sponte nata.

Plantae 3tiae generationis, ex seminibus hybridae (Exp. XXXIV. *a.*) an. 1772 prognatae novem.

a) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 6 — 7‴ latus: lobis rotundis. Totus flos albus: ostio tubi pallide flavescente, et, quod in floribus Jalapae albis plane singulare est, tam stigmate, quam antheris rubris. Superficies tubi exterior e pallide flavo viridescens. Calyx fere glaber. Planta haec ab omnibus individuis subsequentibus in eo potissimum maxime diversa, quod tota facie ad Jalap. vulg. proprius iterum accederet, cum istae e contrario non minimam cum Jalap. longifl. similitudinem retinuerint. Silva plantae valde magna, rotunda et densa, Jalap. vulg. flavam tam magnitudine, quam florum copia multum superans. Folia intense viridia. Quamlibet florum plurimi infoecundati defluxerint, numerus tamen seminum bonorum haud exiguus erat. Semina inter ♀ et ♂ media. Pond. plantae 7 ℔ 12 lot. Radicis 3 ℔ 9 lot.

b) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 11‴ latus. Flores rosei coloris, omnium pulcherrimi. Planta pigmaea, caulibus paucis, prostratis ac irregularibus, foliisque parvulis, saturate viridibus, densis ac hinc inde quasi inflatis instructa. Vis ejus vegetativa adeo lenta erat, ut, jam mense Majo sub dio transplantata, d. 16 Sept. demum florere inceperit. Florum plurimi propullusando marcescentes, perpauci tantum perfecti. Semen bonum

unicum, serius maturescens. Pond. plantae vix ultra aliquot lot. Radicis $4\frac{1}{2}$ lot.

c) Tubus floris 1″, 11‴ longus; Limbus 1″, 6‴ latus: lobis oblongioribus, subplicatis. Color florum ut *b*), modo pallidior paulo. Superficies tubi exterior pallide rubicunda. Calyx subpilosus, laciniis sat, longis et angustis. Planta habitu prioris anni, ejusdemque foecunditatis. Semina pauca bona, iis longifl. satis similia, ast iisdem longiora, quamlibet 2‴ tantum lata.

d) Tubus floris 2″, 2‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Color florum, ut *b*). Laciniae calicis latiores, margine valde pilosae. Tubus floris inferne gracilis valde, superne sat amplus. Planta subvillosa, pigmaei habitus ac vegetationis lentae. Folia parvula, obscure viridia. Quamvis flores plures ad plenariam perfectionem pervenerint, quam in *b*) semen tamen bonum ne unicum quidem dabant.

e) Tubus floris 1″, 7‴ longus; Limbus 1″, 7‴ latus; lobis rotundioribus ac plicatis. Color florum, ut *c*). Tubus coroll e crassior ac incurvus valde. Statura plantae valde mediocris, divaricata et irregularis. Expansio caulium et ramorum fere ad modum longiflorae. Folia parvula, obscure viridia ac splendentia. Vitia florescentiae eadem, ac *b*). Semina foecunda perpauca. Pond. radicis 9 lot.

f) Tubus floris 2″ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Color florum idem, ac *b*) et *d*). Statura hujus plantae praestantior ac vegetior, quam *e*). Florum perfectorum paucissimi semina nonnulla bona dabant iis longiflorae valde similia, ast multo minora; plurimi vel plane steriles, vel semifoecundati, decidui. Calyces *d*), *e*) et *f*)

adeo patuli, quasi semen bonum includerent, vel inclusum continuissent, non nisi mera germina vel semina semifoecundata exhibebant.

g) Tubus floris 2″ longus; Limbus 1″, 1‴ latus. Flores intense rosei coloris, amoenissimi: lobis valde plicatis. Calyx major, laciniis villosis ac patulis. Tubus corollae inferne gracilis valde, superne impressus eodemque loco incurvus Planta pigmaea, satis villosa: caulibus ramisque paucioribus, divaricatis; foliis parvulis, sordide viridibus et quasi hinc inde sufflatis instructa. Calyces seminum semifoecundatorum valde patentes. Flores perfectiores paucissimi. Semen bonum unicum, iis longifl. valde simile, ast gracilius, longiusque.

h) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 2‴ latus: lobis valde plicatis. Color florum, ut *g*). Calyx similis. Tubus corollae inferne valde gracilis, superne sat amplus. Planta humilis, divaricati habitus, foliis parvulis, saturate viridibus ac splendentibus probe contecta. Fasciculi florum densiores. Calyces seminum semifoecundatorum valde patuli. Semina bona perpauca, vix maturescentia.

i) Plantula omnium maxime pigmaea, ac habitus satis divaricati: foliis sordide viridibus, sufflatis et veluti convolutis. Caulis primarius 2‴ tantum latus; rami ejus maximi vix ultra 8″ longi; folium omnium maximum cum suo petiolo 2″ tantum longum ac 1″, 3‴ latum. Ad florescentiam haud pervenit, licet jam initio Maji sub dio plantata, nec aliis coërcita fuerit. Pond. totius plantulae d. 4 Octobr. 2 lot. Radicis 3 lot. $2\frac{1}{2}$ drachm.

Exp. XLIII.

Jalap. vulg. alb. ♀.
vulg. flav. ♂.

An. 1769 et seq. Flores plures.

Prod. an. 1770 et seq. plantae plures. Omnium flores e pallide violaceo carmesini, multa flavedine suffusi, sive aurantii coloris, ostio tubi purpureo ac stella e violaceo carmesina notati.

Exp. XLIV.

Jalap. vulg. flav. ♀.
vulg. alb. ♂.

An. 1769 et seq. Flores plures.

Prod. an. 1770 et seq. plantae plures, iis Exp. inversi XLIII. per omnia similes. Quam ob causam ex copula harum varietatum tam hoc, quam inverso experimento color semper ruber oriatur, merito quaeritur; cum tamen id in Verbascis similis coloris (*Siehe die dritte Forts. meiner vorläufig. Nachr. Vers.* III. IV. VIII. IX. XIII. XIV. XV. XVI.) olim non acciderit.

CHEIRANTHUS TAURICUS.

DESCRIPTUS

AB

JOANNE LEPECHIN.

Conventui exhibita d. 1. Apr. 1799.

Unicuique Phytologorum notum est, quanta incrementa plantarum scientia, praesertim labente hoc seculo, coeperit, quorum que non spernendam partem vindicat sibi patria nostra, nam Academiae hujus sodales celeberrimi, jussu ac auspicis CATHARINAE MAGNAE Rossiarum IMPERATRICIS, pie defunctae, dissitas varias que Rossiae regiones investigandarum rerum naturalium caussa peragrantes, diversa vegetabilia collegerunt atque descripserunt et hoc modo herbariam rem auxerunt multum. Inter hos numerare liceat et Beatum Zuew collegam nostrum quondam meritissimum, qui nutu ac consilio atque adeo ope excellentissimi Domini a Domachnew, tunc temporis Academiae scientiarum Directore, sustentatus, suscepit iter in provincias patriae australes ad investiganda et determinanda varia Naturae producta in his reperiunda, peninsulam que Chersonesum Tauricum visurus, diversa ac numerosa vegetabilia, quibus prata colliculis distincta et huic adjacentia, superbiunt, tegit, ex his collectionem et herbarium suum repleri curavit, ex quo, ut quodammodo ab imminenti interitu vindicarem, plantam minime notam,

icone expressam et ad tetradynamiam Linn. pertinentem, nunc in medium profero.

Rudimenta denticulorum utrinque germini insidentium et omnis plantae habitus externus, illam ad genus Cheiranthi pertinere nullum locum dubio relinquunt.

DESCRIPTIO.

Radix parva, recta sub terra descendens, formata sat validis, ratione sui, fibris lateralibus, oppositis, a capite, ex quo erumpunt, firmioribus. Tab. IX.

Caulis, longitudine duorum, et quod excurrit, pedum, elevatus, glaber, pilis vix perceptibilibus, rarioribus tectus, teres, simplex, vestitus foliis ab ipso radicis capitulo ad divisionem ipsius in tyrsum.

Folia: *Radialia* ex ipso capitulo radicis exurgentia conserta, fere linearia, denticulata; *Caulina* modo alterna, modo opposita, angusta, sessilia, uno margine ut plurimum dentato-erosa, dentibus foliiformibus, sursum spectantibus, terminata processu longiori, fere lineari, acuto, ast folia superiora et alae integerrimae, angustae, lineares.

Summus caulis dividitur per dihotomiam et ex alis prodeunt tyrsi sat longi, teretes glabri, florigeri.

Flores pedunculati, pedicellis tenuibus, longitudine florum, alternatim egredientibus.

Calyx: periathium, pro more generis, tetraphyllum, foliolis duobus versus exteriora basi gibbis.

Corolla tetrapetala, cruciformis: ungues petalorum longitudine calycis, ipsa vero subrotunda, ultra calycem exserta, coloris sordiode flavi.

Stamina: *Filamenta* sex, subulata, longitudine petalis cedunt, et, uti classis prae se fert, duo opposita reliquis breviora, *Anthaerae* erectae, basi bifidae, reflexae.

Pistillum: *Germen* prismaticum, longitudine cum filamentis certat. *Stygma;* bipartitum, crassiusculum persistens.

Pericarpium: *Siliqua* compressa, angulis duobus oppositis obliteratis, rudimento denticuli notatis, bilocolaris, bivalvis, stylo brevissimo, et stygmate bifido, erecto instructa.

Semina plurima, alternatim posita, margine membranula cincta.

DESCRIPTION
D'UNE
NOUVELLE MINE DE CUIVRE
NOMMÉE
ACHIRITE.

Avec une Planche.

PAR

B. F. J. HERMANN.

Présenté à l'Académie le 23 Janv. 1800.

Il y a quinze ans à présent qu'on a vu en Sibérie la premiere fois une pierre verte, laquelle étoit regardée comme une Emeraude véritable orientale, car feu Mr. l'Académicien *Ferber*, qui voyoit une grouppe de ces cristaux apportée à St. Pétersbourg par Mr. le Général *Bogdanof*, l'a décrit dans les Annales de Chimie de Mr. de *Crell*, en les comparant à l'Emeraude orientale. Il répétoit ce jugement dans son Mémoire sous le titre: *Mineralium quorundam rariorum recensio adjectis observationibus geologicis*, qui est inseré au 3e tome de nouvelles Actes de nôtre Académie, où il s'exprime là dessus (pag. 260) de la maniere suivante: „D. *Bogdanof*, dit-il, ante aliquot annos Smaragdos

„cristallisatos e deserto Kirgisensi Petropolin attulit;“ mais dans une note il ajoute ces mots: „Colore et facie quidem Smaragdis „similes cristallos e superiore Irtis fluvii regione aliquoties ac„ceptas vidimus, sederant durioris fluoris species in cristallos „prismaticas efficta, nec ad chalybem scintillans.“

Comme on ne connoît point de Spath fluor de la contrée supérieure de l'Irtiche, il est probable que Mr. *Ferber* a vû la même pierre deux fois en la prenant premièrement pour une Emeraude, et l'autre fois pour un fluor, parceque cette pierre effectivement vient du désert des Kirguises et par consequent aussi des contrées d'Irtiche.

L'opinion d'un Minéralogiste si célèbre, comme Mr. *Ferber*, induisit en erreur les autres, et on parla longtems de ces Emeraudes. L'anglois, Mr. *Bentham*, autre fois au service de la Russie, et qui a sejourné plusieurs années en Sibérie pour connoître les richesses naturelles de ce pays, a fait une voyage exprès pour chercher dans les déserts Kirguisiens cette mine d'Emeraude sans la pourtant trouver, à ce que je sache.

Pendant mon sejour aux mines altaïques je tachois de me procurer entre autre aussi cette prétendue Emeraude et d'en savoir le lieu natal, ainsi que les circonstances de son exploitation; j'en ai appris ce qui suit: Dans la forteresse de Semipalatna sur l'Irtiche vit depuis longtems un Marchand bouccarien nommé *Achir Mahméd*, qui se trouve en grande liaison avec les Kirguises, les Boucars et les Tachkiniens. Comme il fait quelquefois des voyages dans les déserts à cause du commerce, il apporta une fois un sac entier rempli de ces pierres vertes, qu'il avoit reçu des Kirguises, et qu'il regarda d'abord comme vitriol de fer. Parmi les cristaux se trouvoient plusieurs, qui étoient reunis en grouppes, et dont Mr. *Bogdanof* a reçu une, après avoir trouvé, que ces pierres, qui ne pouvoient pas être dissous dans l'eau, ne soient point du vitriol.

Mr. *Bogdanof* apporta sa grouppe comme une grande rareté à St. Pétersbourg, et une autre étoit à Barnaoul, que j'ai vu en 1787. Toutes les deux doivent se trouver aujourd'hui dans la collection impériale à l'Eremitage.

Tandis que les Minéralogistes se rejouissoient d'avoir retrouvé la véritable Emeraude orientale, on fit quelques essais avec elle au Laboratoire d'une des minières d'Altaï, et on trouva, qu'elle contenoit une assez grande quantité de cuivre; mais la rareté extrême de ces pierres n'a pas permis de les poursuivre plus loin, et on se contentoit avec la découverte, que cette pierre ne soit point de l'Emeraude, mais une espèce de mine de cuivre tout-à-fait particulière, en lui donnant en attendant le nom d'*Achirite* en l'honneur du susdit Marchand boucarien qui l'apporta le premier des déserts des Kirguises.

Comme je me suis procuré, quoique très difficilement, une certaine quantité de ces cristaux j'en sacrifiois avec plaisir la plus grande partie à l'Analyse chimique, dont l'Académie a bien voulu charger notre habille confrère Mr. *Lowitz*, lequel trouva, que non seulement l'Achirite soit une véritable mine de cuivre, mais aussi d'une composition différente de toutes les mines pareilles. Cette pierre merite donc bien d'être mieux connue, qu'elle ne l'étoit jusqu'à présent; en consequence de quoi j'en donnerai ici sa description.

Couleur.

L'*Achirite* est d'une couleur verte d'Emeraude très foncée, et par consequent plus beau que sont à l'ordinaire les Emeraudes d'Amérique.

Transparence.

Il n'est transparent que quand il se rencontre en petits cristaux, ou en le cassant en petits fragmens; ceux d'un volume un peu plus grand ou dont la cristallisation n'est pas finie, ne sont transparentes qu'aux coins; mais des pieces taillées minces sont parfaitement transparentes, ayant toute la ressemblance avec l'Emeraude; cependant il est rare de trouver des cristaux tout nets, la plus grande partie est impure et opaque.

Pésanteur.

Son poids spécifique, comptant celui de l'eau pour 1000, est de 3361 contre 1000.

Cristallisation.

C'étoit particulièrement à cause de sa cristallisation que feu Mr. *Ferber* comparoit nôtre *Achirite* à l'Emeraude Orientale, croyant selon Mr. *Brückmann*, que celle-ci étoit, ainsi que l'Achirite, un dodecaédre à prisme hexaédre, terminé par deux sommets à trois plans. quoique Mr. *Romé d'Isle* nië tout-à-fait dans sa *Cristallographie* l'existence des Emeraudes ainsi nommées *Orientales.* Mais la forme de l'*Achirite* est en effet un *Dodecaédre* très-regulier consistant, comme il est dit ci-dessus, d'un prisme hexaédre à faces égales et terminé par deux sommets à trois plans quadrangulaires, qui quelque fois sont un peu rhombes. Voyez Planche XI. Fig. *a*, *b*, et *c*, dont *a* represente le prisme du cristal en face, *b* le sommet, et *c* la base. Il est pourtant très rare de le trouver d'une cristallisation si regulière; à l'ordinaire les cristaux sont reunis confusement en grouppes, et souvent on n'en voit qu'une ou deux faces.

Grandeur des cristaux.

La grandeur des cristaux de nôtre *Achirite* varie de l'épaisseur d'une tête d'épingle jusqu'à celle d'un quart de pouce et rarement au delà. Les figures *a*, *b*, et *c* sont aggrandies, mais *d* et *e* sont copiées d'après leur grandeur naturelle.

Lueur.

Toutes les faces latérales, ainsi que ceux des sommets sont toujours lisses, et la surface paroit grasse; l'intérieur est de même assez luisant.

Cassure.

Sa cassure est pour la plûpart feuilletée en le cassant de travers, et même prêsque spateuse, parce que toute la pierre ne paroit composée que de petits rhombes; mais en le cassant suivant sa longueur elle est vitreuse.

Dureté.

Quoique la dureté de notre Achirite est si considérable, pour en pouvoir gratter fortement le verre, en se laissant tailler, et prenant un beau poli; mais il n'est pas si dur pour donner des etincelles en le frappant avec le briquet.

Parties constituantes:

Mr. *Lowitz* a trouvé par l'analyse qu'il a faite suivant les Ordres de l'Académie que l'*Achirite* contient en 100 parties.

Chaux de Cuivre	55	parties.
Terre siliceuse	33	—
Eau	12	—
	100	parties.

Il differe donc de toutes les autres mines de Cuivre et notamment du Malaquite cristallisé, par la circonstance que la terre siliceuse entre dans sa composition non méchaniquement, mais chimiquement, et qu'il ne contient point, suivant Mr. *Lowitz*, de l'acide carbonique.

Propriétés au feu.

A cause de son extrême rareté on n'en a pas pu faire beaucoup d'essais au feu; il est connu seulement qu'au premier coup de feu il décrepit et change sa couleur verte, tant à la surface que dans l'intérieur, en beau bleu foncé, après quoi il se fond assez facilement et donne une espèce de matte, dont on peut retirer son contenu en cuivre.

Usage.

Cette rareté n'a pas permis jusqu'à présent d'en faire quelque usage, excepté qu'on tailla quelque pièces, voyant qu'il prend un beau poli, et comme ces morceaux ressembloient assez bien à l'Emeraude on regarda, sans aller plus loin, toute la pierre comme telle.

Lieu natal.

Quant au lieu natal de nôtre *Achirite*, le Marchand bouquetin susmentionné m'a assuré, que l'endroit d'où l'on tire cette

pierre, se trouve à peu près 500 verstes au de là de l'Irtiche dans les déserts des Kirguises en allant de la forteresse de *Semipalatna* vers le midi. Il s'y trouve, dit-il, une montagne de couleur verte, qu'il croit couverte d'une efflorescence cuivreuse; et en effet parmi les cristaux nets de l'*Achirite*, que je possede, j'ai trouvé:

1) des petits morceaux de Malaquite rayonné.

2) Des petites pièces de verd de montagne compacte, melé des petits cristaux d'*Achirite*; et il y a même quelques morceaux de celui-là, dans lesquels sont implantés des cristaux d'*Achirite*.

3) Du Spath calcaire blanc.

4) Des fragmens de pierre calcaire compacte.

De tout cela on peut conclure, il me semble, que nôtre *Achirite*, qui lui même est une nouvelle espèce de mine de cuivre, se trouve aussi dans une montagne, qui contient des filons ou des couches cuivreuses, qui sans doute avec le tems pourroient devenir une riche minière.

DESCRIPTION
D'UNE
NOUVELLE ESPECE DE CANARD
ET D'UNE
VARIETÉ DE L'HUITRIER,

QUI SE TROUVENT
DANS LE CABINET D'HISTOIRE NATURELLE DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES.

PAR
L'ADJOINT SEWASTIANOFF.

Présenté et lu le 8 Octobre 1800.

En parcourant la précieuse collection d'oiseaux, apportée par Mr. le Capitaine de la flotte *Billings* de son voyage, fait dans l'Archipel des Iles, situées entre les côtes orientales de la Sibérie et de Kamtchatka et les côtes occidentales de l'Amerique, et que l'Impératrice, de glorieuse memoire, CATHERINE II. envoya à l'Académie pour être conservée dans son Musée, j'ai trouvé quelques varietés d'Oiseaux, et entre autres une nouvelle espèce de Canard, qui à mon sçu n'a jamais été decrite par aucun des naturalistes connus, c'est pourquoi j'ai entrepris d'en

faire la description et de donner la figure de cet oiseau, digne d'attirer la curiosité des Naturalistes par sa beauté et le mélange élégant de ses couleurs.

Ce Canard a le front, le haut de la tête et la nuque couvertes de plumes blanches, qui entourant la partie posterieure du col descendent en se rétrécissant jusqu'au dos; la gorge, les cotés et le milieu du col sont noirs, marqués de points blancs, qui se changent en raies sur les plumes qui couvrent le haut ou le commencement de la poitrine, couverte jusqu'au commencement du ventre des plumes d'une couleur clair-cendrée, liserées de noir et de blanc. Mais comme ces plumes, sont disposées très prés les unes des autres et se recouvrent, la couleur clair cendrée, qui fait le fond de chaque plume, n'y est pas apparente; de sorte que toute la poitrine paroit alternativement marquée des raies transversales blanches et noires. Le clair cendré devient plus apparent vers le ventre et s'eclaircit de plus en plus, en s'approchant du croupion, qui est d'un cendré tirant sur le blanc. Les plumes qui couvrent les cotés du corps, le dos, et le dessus des ailes sont pareillement d'une couleur clair-cendrée avec des raies transversales à leurs bords, dont la premiere est blanche et la seconde noire. Celles de plumes moyennes de l'ail, qui sont plus prés des grandes sont noires, excepté leurs bords saillants qui sont blancs. Les plumes du dessous de la queue et celles qui couvrent le croupion sont d'un clair-cendrée bordé de blanc. Les grandes pennes des ailes sont d'un brun très foncé et noires vers leurs bords. Toutes les autres sont noires. Les

ailes étant pliées forment un coin et couvrent les deux tiers de la queue, qui est cuneiforme et blanche par dessus. Les pieds, dont la couleur étoit prèsque perdue et meconnoissable chez l'individu empaillé, qui a servi de modèle à ma description, paroissent avoir été jaunes. La membrane, qui joint les doigts est de la même couleur. Les ongles sont noires. Le bec jaune, depuis sa racine jusqu'au bout, qui est noir. La mandibule superieure surpasse un peu en longueur l'inferieure. Les narines, posées à la racine du bec, sont d'une forme ovale, comme chez tous les autres oiseaux de ce genre. Les bords des mandibules sont dentelés. L'autre exemplaire de ce Canard, qui se trouve dans la collection mentionnée paroit être une femelle de cette espèce, comme il est même marqué dans le Catalogue.

Elle différe essentiellement de son mâle par sa taille qui est moindre et par quelques légeres nuances de la couleur de son corps. Les plumes qui couvrent les cotés et la partie superieure du dos sont comme chez le mâle d'un clair cendré, liserées de noir et de blanc; mais celles du reste du dos et du croupion ne sont bordées que de blanc. La queue est blanche par dessus, comme par dessous. Les plumes du haut de la poitrine tirent sur le brun ou le maron clair, et sont bordées d'un blanc jaunâtre. La couleur du reste de la poitrine et du ventre est un mélange de cendré, de brun et de blanc. L'espace entre les pieds et la queue est blanche. Dans toutes les autres parties le mâle et la femelle se ressemblent parfaitement. La figure jointe à cette description represente le mâle.

Dimensions.

	Pieds Anglois	— Pouces	— Lignes
La longueur du mâle depuis le bout du bec jusqu'à celui de la queue .	2 —	2 —	—
depuis le bout du bec jusqu'à celui des Ongles	1 —	4 —	3 —
son bec, depuis le bout jusqu'au coin de la bouche	0 —	1 —	8 —
sa queue	—	4 —	7 —
les pieds	0 —	3 —	3 —
le doigt du milieu avec l'ongle . .	0 —	2 —	8 —
le doigt exterieur	0 —	2 —	6 —
l'interieur	0 —	2 —	0 —
celui de derriere	0 —	0 —	9 —

Ce Canard, dans le Catalogue des Oiseaux apportés par Mr. Billings, porte le nom Systématique *d'Anas Canagica.* Il est très probable, que cette nouvelle espece a été decouverte par Mr. le Capitaine Billings sur l'Isle Canaga ou Kyktak, une des Iles Aléoutes les plus proches des côtes de l'Amerique septentrionale, et situé derriere le Cap. Aliazka, et que le nom de l'espece, c'est a dire *Canagica*, a été imposé à cet Oiseau du nom de la premiere ile, ou de celui des principaux habitans de l'ile Kyktak appellée *Caniagues* ou *Canagues*, qui peut être, ayant apprivoisé cet Oiseau, l'ont rendu domestique. Ces sont des sauvages très belliqueux et que les Russes, dans un second voyage entrepris par Schelichoff, avoient beaucoup de peine à se soumettre.

Je ne peux rien dire des moeurs et des autres particularités qui regardent cet Oiseau, car nous n'avons aucune notice sur le voyage de Mr. Billings, le Journal de son Voyage n'ayant jamais vu le jour et ayant été deposé dans les Archives du Collège de l'Amirauté, où il se trouve jusqu'à présent. Pour ce qui regarde le second voyageur russe, Mr. Schelichoff, qui a été sur les mêmes lieux que le Capitaine Billings, et qui a fait même la decouverte de quelques Isles, dans l'Océan oriental, quoiqu'il existe une brochure de son voyage, je n'en ai pu tirer aucune lumière sur l'oiseau dont je donne la description, ni sur les moindres objets qui concernent l'histoire naturelle, par ce qu'il a entrepris ce penible voyage, qui l'a rendu célébre parmis ses Compatriotes, plutôt pour des objets de commerce, que scientifiques, et que la brochure dessus mentionnée a été mise au jour à son insçu.

Parmi les autres Oiseaux de cette Collection, j'ai trouvé encore une variété d'huitrier, qui ne merite pas moins notre attention. Par la forme de son bec, des ses pieds et de tout son corps, il est parfaitement semblable à l'huitrier commun, connu dans le système de Linné sous le nom *d'Haematopus Ostralega*. Mais il en différe par la couleur de toutes ces parties. L'huitrier commun a les pieds et le bec d'une couleur rouge, très vive, au lieu que chez notre variété ils sont d'un blanc jaunâtre, de même qu'il a la tête, la nuque, le col et la poitrine d'un noir cendré et le reste du corps d'un brun très foncé, le dessous de la queue est de la même couleur, mais un peu plus clair. La tête, le dessus du corps et la queue de l'huitrier commun sont d'un brun foncé, mais le ventre et la poitrine blancs.

Notre variété différe aussi parfaitement de l'espece ou de la variété de l'huitrier, que Mr. Bougainville, pendant son voyage autour du monde, a rencontré en très grande quantité aux Isles Malouines. Cet huitrier ou pie de mer, comme on l'appelle autrement, n'avoit que les pieds blancs, mais d'ailleurs ressembloit parfaitement à la Pie de mer commune. M. de Buffon a donc bien tort d'affirmer, que cette espece si rependue, car on la trouve en Europe, comme en Asie, en Afrique, comme en Amérique, soit partout la même et sans variété.

REMARQUES
SUR LES DIFFÉRENTES METHODES
DE RENDRE
LE FER MALÉABLE

PAR

B. F. J. HERMANN.

Présenté à l'Académie le 15 Févr. 1801.

Le fer est un métal, dont la connoissance, quoique traitée par des excellens Metallurgistes, comme *Rinmann*, *Prignon*, *Buffons*, *Jars*, *Gerhard*, *Bergmann* et autres, ne laisse pas pourtant de presenter encore une foule de difficultés dans la pratrique. Le but est toujours le même, c'est-à-dire l'extraction des particules ferrugineuses de la mine en les rendant aussi malléables qu'il est possible, mais les methodes en sont très-différentes. Les autres métaux ne demandent qu'un degrés de chaleur pour ainsi dire *determiné*, au moyen duquel ils sont tirés de leur minérai, souvent par une *seule*, et toujours par la *méme maniere* de fusion; le fer au contraire passe ordinairement par différens procédés avant qu'il acquiere l'état de malléabilité qu'on exige.

Au commencement de l'Art on employoit sans doute les moyens les plus simples; en fondant les mines de fer dans

un petit four on tiroit par un seul travail le fer de son minérai en le rendant en même tems malléable. Mais dans la suite on a inventé les hauts fours où l'on fond la mine auparavant en *fer de fonte*, qui est porté ensuite aux forges pour l'y faire maléable en le refondant de nouveau.

C'est assurement prolonger le procédé, mais on a la commodité de pouvoir fondre dans les hauts-fours une très-grande quantité des mines à la fois, sur le même endroit, quelquefois avec un volume d'eau qui ne seroit pas sufisant, pour faire travailler un nombre de petits fours dont le produit reuni seroit égal à celui des hauts fours. Et c'est peut-être à cause de ces avantages, que dans quelques contrées on n'a point d'idée de l'existence d'une autre methode d'extraire le fer de son minérai que par la fusion dans les hauts-fours en travaillant ensuite la fonte aux forges. Cependant il existe encore en différents endroits, comme il est assez connû des gens de métier, des petits fournaux de fusion et des fours de forges, dans lesquels on tire le fer immediatement de son minérai, sans le faire passer par le haut-fourneau, en le rendant en même tems maléable, methode qui se pratique encore aujourd'hui en Corse, aux Pyrenées, et même en plusieurs endroits d'Allemagne, de Sibérie, de Russie et surtout en Carélie, où l'on trouve des petits fours de paysans, dans lesquels on fond les mines de fer des marais et des lacs en les convertissant par une seule fusion, suivant un procédé convénable, ou en fer *maléable*, ou en *acier cru*; mais qui plus est, on connoit aussi d'autres manières de rendre le fer maléable sans soumêttre à la fusion, ni la mine ni la fonte.

Dans le dernier voyage, que j'ai fait par Ordre de Sa Majesté L'EMPEREUR pour visiter les fondéries de canons d'Olonetz, Mr. de *Gascoïgne*, Directeur de ces fabriques, homme très-versé dans son metier et en tout ce qui regarde la fonte de fer, m'a communiqué deux faits très-interessants pour les Metallurgistes; les voici:

„J'ai vu, dit-il, du fer fondu, qui, ayant été exposé „pendant long tems à l'humidité de l'air acqueroit à sa „surface à une profondeur assez considérable toutes les „qualités du fer maléable, notamment des grands canons „fondus dans le tems du Prince *Rupert*, c'est-à-dire „vers l'an 1650, qui avoient été exposés aux injures de „l'air pendant plus d'un siècle dans le fort de *Tibourg*, „ayant été transporté à Carron pour y être refondus, se „trouverent en les coupant avoir à leur surface exte- „rieure plus d'un pouce d'epaisseur qui avoit toutes les „qualités du fer forgé, excepté la solidité ou la densité. „Les particules de sa texture étoient très-inadherentes „et avoient une apparence rouillée à l'interieur, ce qui „provenoit de ce que les particules fusibles non métalli- „ques du fer fondu, ayant été decomposées par l'action „de l'Atmosphère il ne restoit plus que les fibres fines „du fer. Ces Canons étant coupés avoient dans leurs „autres parties toute l'apparence du fer fondu ordi- „naire."

„Un fait semblable est raconté par le Docteur *Watson* „dans ses leçons de Chimie, savoir: que des Canons „de fer fondu Espagnols, qui avoient été coulés bas du „tems de la fameuse *Armada*, ayant été retirés de l'eau „par des pêcheurs, il y a environ 20 ans, on trouva leur „superficie changée en fer; au sortir de l'eau ce fer „étoit si mol, qu'on pouvoit le couper avec un canif, „mais peu de tems après il reprenoit sa dureté naturelle „en conservant cependant à une epaisseur considérable „la maléabilité du fer forgé."

Voilà donc plusieurs manières très-différentes par lesquelles le fer devient maléable; cependant il y a encore une autre, savoir la simple *cementation* de sa mine. Mr. de *Gascoïgne* a fait faire une epreuve en ma presence avec un morceau de mine de fer de *Carron* en Ecosse, dont on fond les ca-

nons si fameux dans toute l'Europe. Cette mine est de couleur noirâtre, terreuse dans la cassure et sans les moindres parcelles d'un éclat metallique, presque semblable au schiste argilleux noir compact, ou au trappe d'une texture très-fine; elle est cependant pesante et contient à peu près la moitié de son poids en fer. Nous l'avons fait cementer à la manière ordinaire dans un four d'acier; en sortant on la trouva demi-fondue et spongieuse, entremelée d'une quantité de petites lamelles de fer si maléables, qu'on pouvoit les couper avec le couteau. Il y a donc un moyen, quoique assûrement peu profitable, de rendre le fer maléable non seulement sans fondre son minérai en fer de fonte, ou refondre celui-ci, mais aussi sans aucune fusion de la mine, c'est-à-dire la *cementation*, par laquelle on ramollit aussi la fonte de fer la plus dure, comme il est detaillé plus au long dans l'ouvrage de *Réaumur* sous le titre: *l'Art de convertir le fer de fonte en fer doux*.

Mais il faut que je fasse encore mention d'une méthode, au moyen de la quelle on parvient de rendre maléable le fer fondu sans le porter, comme à l'ordinaire, aux forges pour y être refondu. Cette méthode est aussi pratiquée en Angleterre et consiste en ce qu'on fait remuer continuellement la fonte dans le fourneau de reverbere après en avoir ralenti la chaleur et qu'il n'y a qu'environ 6 pouces de profondeur dans la matière fondue; on la remue pendant une demie heure avec des barres de fer forgé; on ralentit encore le feu; on coupe des lisières en lames epaisses du métal pendant qu'il est presque figé; on les passe entre des cilindres qui sont en mouvement près du fourneau et cette pression unit les parties metalliques et rend le fer tout de suite maléable. — On voit aisement, ce me semble, que ce procedé est inventé par l'impossibilité de donner au fer le dégré de maléabilité convénable par le contact immédiat du Charbon de terre dans la refusion de fonte aux forges; la reussite de cette methode depend sans doute de la proportion du metal employé, qui doit être petite et seule-

ment autant qu'il en faut pour retirer une Loupe, et de ce que le métal soit purifié par un dégré de chaleur convenable et poussé jusqu'à ce que la masse ait reçu la maléabilité requise.

Le resultat de tout ce que je viens de dire est que le fer devient maléable par des agens d'une nature toute différente, c'est-à-dire, non seulement par l'action du feu, dont l'application à cet effet souffre pourtant une quantité de modifications, mais aussi par l'air, et même par l'eau de mer.

Il est reservé sans doute à la Chimie nouvelle d'éclaircir ces faits et de decouvrir les vrais principes, qui doivent nous conduire toujours au même but en employant des moyens si différents.

DESCRIPTION
DE
L'ACARAUNA LONGIROSTRIS.
NOUVEAU GENRE DE POISSON,
APPARTENANT À L' ORDRE DES TORACHIQUES,
ET QUI SE TROUVE
DANS LE MUSÉE DE NOTRE ACADEMIE DES SCIENCES.

PAR

L' ADJOINT SEVASTIANOFF.

Présenté et lu à l'Académie le 8 Avril 1801.

Dans l'immensité des êtres dont la nature a peuplée notre terre, elle semble avoir agi avec plus de caprice en formant les animaux et les autres productions destinées à habiter l'élement fluide des eaux. Mais elle n'y a pas moins prodigué de magnificence, que dans ses autres ouvrages. Parmi les poissons: les Zeus, les Chaetodons, le genre des Carpes etc. etalent à nos yeux les couleurs les plus éclatantes et le plus agréablement mélangées sur leurs écailles, tantôt argentées, tantôt resplendissantes d'or. Ce sont les habitans des eaux, qui fournissent les perles fines et le pourpre, qui servent d'ornement aux riches et

aux grands; c'est aussi d'un petit poisson *), que l'industrie de l'homme fait tirer la matière, pour la fabrique des fausses perles, dont se pare l'imitative indigence. Nous voyons briller l'interieur de plusieurs coquillages de toutes les couleurs de l'arc-en-ciel et disputer l'éclat à l'opal le plus precieux.

Mais c'est dans ces mêmes productions que la variété et la bizarrerie des formes frappent l'imagination et attirent l'attention du scrutateur des secrets de la nature et de son historien. En effet on ne trouve, ni parmi les quadrupedes, ni parmi les Oiseaux, ni parmi tous les autres habitants de la surface terrestre, des formes aussi capricieuses et aussi variées, et même des monstruosités aussi grandes, que ceux que la nature nous offre dans plusieurs habitans des eaux.

On n'a qu'à jetter les yeux sur le nombre infini des Coraux, des Tubipores, des Madrepores, des Eschares, des Cellepores pour être persuadé de cette verité. Et ce spectacle n'est il pas propre à jetter notre ame dans un transport delicieux, en presentant à nos regards les extérieurs les plus variés, les plus élégans et les plus symetriques? Qui peut contempler sans admiration la multiplicité bizarre et monstrueuse des formes, que nous presentent les différens genres des vers mollusques, tels que *la Laplysie*, *la Doris*, *l'Ascidie*, *la Thethis*, *la Seiche etc.* et les genres des poissons, comme les *Lophius où Diables de mer*, *les Balistes*, *les Syngnates*, *les Pegases*, *les Chimeres*, *les Rayes* et tant d'autres, dans le nombre desquels il faut compter les Dorées et le genre nombreux de Chaetodon, dont j'ai fait mention plus haut?

Tab. X. Le poisson que je vais decrire merite d'être rangé au nombre des productions de la nature les plus singulieres, et

*) l'Able, Cyprinus alburnus.

n'est pas moins remarquable par la forme de son corps, que tous ceux dont j'ai fait, ci-dessus, l'énumeration, comme chacun s'en persuadera encore mieux par le dessin, joint à cette description. Il s'est trouvé dans une collection d'animaux du Bresil, envoyé de Portugal en 1791 à Sa *Majesté l'Imperatrice* de glorieuse mémoire CATHERINE II, qui daigna remettre cette collection à notre Académie des Sciences, pour être conservée dans son Musée. Artedi, Linné et Bloch, le plus moderne de tous les Ichtyologues, n'en font aucune mention, et j'ai tout lieu d'espérer, que je ne me suis pas trompé, comme on le verra, par la suite de ce memoire, en faisant de ce poisson, non seulement une nouvelle espece, mais un nouveau genre.

Description.

Ce Poisson appartient au nombre des Thorachiques, par ce qu'il a les nageoires ventrales placées sous les pectorales.

Le corps est comprimé, oblong, un peu plus gros par dessous que par dessus.

La tête mediocre, comprimée de deux côtés, moins large que le corps et terminée par un long bec incliné, obtus, deprimé par dessus comme par dessous, et alepidote.

L'ouverture de la bouche profonde, transversale, droite.

Les machoires denticulées; la superieure plus longue, que l'inferieure et plus obtuse; l'inferieure arrondie par devant. Ces machoires ne sont pas entièrement couvertes, par la peau de la tête, comme on le voit en *a*, *b*.

Les dents forment un seul rang dans chaque machoire ; les deux de devant sont aigues et un peu recourbées en arrière en forme des crochets ; les autres sont petites, granuleuses, immobiles, égales et serrées. Je n'ai pas pu remarquer le moindre indice de langue.

Le palais lisse.

Les yeux proportionnés, ronds, lateraux, voisins et élévés, c'est à dire placés vers la partie superieure de la tête ; leurs globe n'excede pas la surface de la tête.

Les Narines solitaires, rondes, petites, éloignées l'une de l'autre, situées au dessus de chaque oeil, du côté du bec ; et chacune ayant devant elle une petite papille, à une très petite distance.

Les Opercules branchiales sont sans pointes et alepidotes, mais elles sont recouvertes d'une peau, qui excede un peu leurs bords. L'Opercule anterieure est courte, et les posterieures se touchent presque de leurs bords sur la gorge. Les lames des opercules posterieures se prolongent vers les nageoires pectorales, et sont arrondies à leurs bouts, ayant des decoupures par dessus et par dessous. Ces opercules sont mobiles et assez proportionnées à la grandeur du poisson. Elles sont unies ; il y a quelques stries à peine visibles sous les yeux sur les opercules anterieures.

La membrane des Ouies est très etroite, cachée, laterale et à trois rayons ou Osselets.

L'ouverture des Ouies est de même laterale, arquée, proportionnée, et operculée, c'est-à-dire recouverte en entier par les opercules, comme chez le plus grand nombre des poissons.

Les bronchies des Ouies, sont voisines, c'est-à-dire placées près de leurs opercules, pectinées, semblables; leurs osselets sont tuberculés.

La gorge et la poitrine sont arrondies, le ventre un peut applati ou deprimé à son commencement, et carené vers la queue, comme le dos.

La ligne laterale solitaire, haute; en approchant de la queue, elle fait une courbure, et coule ensemble avec la ligne qui divise les muscles de l'abdomen, d'avec ceux du dos. Elle est marquée de petites stries en forme de tiges, situées par intervalle dans toute sa longueur.

L'anus est au milieu du corps.

Les ecailles sont assez grandes, flexibles, tenaces, serrées, ovales, striées à leur bords.

Le dos est monopterygien, par ce qu'il n'a qu'une seule nageoire longitudinale; cette nageoire devient plus haute en descendant vers la queue.

Ce poisson a en tout sept nageoires, dont une dorsale, deux pectorales, deux abdominales, une anale et une à la queue. Il appartient à la classe des malacopterygiens, par ce que toutes ses nageoires sont rayonnées, mais non pas aiguillonées, excepté les six premiers osselets de la nageoire dorsale.

Les nageoires pectorales solitaires, situées à peu près vers le milieu de la largeur du corps; elles sont presque triangulaires.

Les nageoires du ventre placées sous les nageoires de la poitrine; elles sont voisines, mais separées, petites, pointues.

La nageoire de l'anus est longitudinale, c'est-à-dire occupante tout l'espace entre l'anus et la queue, cependant elle en est separée. Elle n'est ni arrondie, ni pointue, mais presque par tout d'une égale largeur. Les trois avant derniers rayons ressortent de la membrane qui les unit.

La nageoire de la queue est émarginée et ramentacée à ses deux extrémités.

Tout le corps de ce poisson, conservé dans de l'esprit de vin, est d'une couleur brune, comme les nageoires pectorales et abdominales. Les dorsales, la nageoire de l'anus et celle de la queue, excepté ses deux extrémités ramentacées, sont blanches ou plutôt jaunâtres. Cependant on ne peut rien avancer avec assurance sur les couleurs, que ce poisson avoit, etant encore en vie. On sait, que tous les poissons perdent leurs couleurs, aussi-tôt qu'on les retire de l'element que la nature leur à déstiné pour demeure, ou du moins ils ne les conservent àprés cela, que très peu de tems.

Je vais à présent exposer les raisons qui m'ont déterminé à faire de mon poisson un genre particulier. 1) Il appartient à l'ordre des thorachiques, dans lequel il n'y a que deux genres dont la membrane des ouies est munie de trois rayons, comme dans nôtre poisson; Ce sont: le genre de Chaetodon et celui d'Epinoche (Gasterosteus); mais notre poisson differe du premier, c'est-à-dire du genre de Chaetodon, par la tête, qui est très petite chez tous les poissons de ce genre, au lieu que dans l'*Acarauna* elle est assez proportionnée au corps. Les dents des premiers sont setacées, mobiles, flexibles, tandis que celles du poisson que nous decrivons sont ossiculées, immobiles, granuleuses. Le corps du Chaetodon est large, au lieu que celui de l'Acarauna est alongé. La nageoire dorsale et celle de l'anus chez les Chaetodons, sont rigides, charnues et ecailleuses, mais dans notre poisson ces nageoires ne sont, ni charnues,

ni couvertes d'écailles. Pour ce qui est des Epinoches, ils ont 1) le corps couvert des plaques et non d'écailles *), comme notre poisson. 2) Les nageoires ventrales chez les Epinoches sont placées un peu derrière les pectorales, quoique au dessus de l'os sternum; tandis que l'*Acarauna longirostris* les a placées en ligne droite sous les pectorales; elle a aussi les lames posterieures des opercules des ouies prolongées et retrécies, tandis que les Epinoches les ont arrondies; les derniers ont par dessus tout, des aiguillons, qui ne sont joints par aucune membrane, et placés devant la nageoire dorsale; tandis que notre poisson, quoique muni de ces aiguillons les à joints par une membrane. *Gouant* ajoute encore comme un signe distinctif du genre des Epinoches, une plaque ou cuirasse pour les nageoires pectorales, et une pour les ventrales, qui manquent absolument à l'*Acarauna*.

Voilà les raisons qui m'ont determiné à faire de ce dernier poisson, non seulement une espèce, mais un genre particulier. Mais comme il approche plus des Chaetodons par son extérieur et par ce qu'il a le corps couvert d'écailles, comme la plupart de ces derniers, j'ai choisi pour designer ce nouveau genre de poisson un nom synonyme du genre Chaetodon. Ce nom est celui d'Acarauna, sous lequel quelques Naturalistes, et notamment **) 1) Marcgr. 2) Willoughbey, 3) Ray, 4) Jonston, et 5) Ruysch ont designé ce genre.

J'etablis donc les signes distinctifs suivants, pour le genre d'Acarauna:

---

*) Bloch.

**) 1.) Brasilia, p. 144. 2.) Ichtiol. p. 21. 3.) Pisc. p. 102. 4.) Pisc. p. 177 et 178. 5.) Theatr. anim. I. p. 123.

1) La membrane des ouïes à trois rayons et cachée sous l'opercule des ouïes.

2) Le corps garni d'écailles et non des plaques.

3) Point d'aiguillons séparés devant la nageoire dorsale, mais unis entre eux et la nageoire du dos par une membrane.

4) Les nageoires alepidotes et dépourvues de la peau charnue, qui couvre la dorsale et l'anale chez les Chaetodons.

Pour ce qui est de l'espèce, dont il n'y a qu'une seule dans ce genre, je l'ai determiné par l'adjectif *longirostris*, qui designe la figure du bec de ce poisson, decrit ci-dessus et representé sur la planche, jointe a cette description.

Dans le Catalogue de la Collection à laquelle *l'Acarauna longirostris* appartient elle est une des trois poissons marqués par les Numeros V. VI. et VII. et dont il est dit seulement qu'ils suivent les navires. Mais comme ces trois poissons n'y sont pas nommés, j'ai trouvé, après avoir consideré attentivement les deux autres, que l'un étoit *l'Epinephelus merra*, nouveau genre établi par Bloch, et extrémement ressemblant au poisson nommé Jacque Euertsen, qui est le *Bodianus guttatus* de Linné; et l'autre *le Scomber ductor* de ce dernier naturaliste. A juger d'après le bec de l'Acarauna, qui n'est pas armé des dents formidables, excepté les deux anterieures dans chaque machoire, qui peuvent lui servir à mieux saisir sa proie, ce poisson aussi bien que les deux autres ne peut être, qu'un de ces pauvres parisites comme le *Larus parasiticus* entre les oiseaux et comme *le Scomber Ductor* *) ci-dessus mentionné, qui suivent les gros

*) Voyez Bloch.

poissons, tels que les Requins, pendant qu'ils poursuivent eux mêmes les Navires, et se nourrissent de leurs restes.

Nombre des rayons dans les nageoires et dimensions.	Pouces	Lignes
La membrane des ouies à 3 rayons.		
Les nageoires pectorales, chacune 15 rayons.		
— — ventrales, — 5 —		
L'anale . . . . . — 13 —		
Celle de la queue . . — 10 —		
La nageoire dorsale . . — 21 —		
Longueur du corps depuis le bout de la machoire inferieure jusqu'à la queue	8	5
Longueur de la machoire inferieure	1	1 ½
Longueur de la superieure	1	4
Depuis le bout de la machoire superieure jusqu'à l'oeil	1	9
Depuis le bout de l'inferieure jusqu'à l'oeil . .	1	7
Longueur du corps depuis le communement de la machoire superieure jusqu'à la queue par le dos	9	2 ½
Largeur de la nageoire pectorale du côté superieur	1	3 ½
Largeur de la nageoire pectorale de l'inferieur . .	——	4
Longueur de la pectorale à la racine	——	4 ¼
Longueur de la pectorale à la fin	1	1
Longueur de la nageoire dorsale	3	3
La plus grande hauteur	——	3
Longueur de la nageoire adipeuse	——	8
Longueur de la queue	——	8 ½
Longueur du ramentum superieur de la queue . .	1	5
Longueur du ramentum inferieur	1	2
Longueur de la nageoire ventrale à sa base . .	——	2
Longueur de la nageoire ventrale à sa fin . . .	——	7 ½

	Pouces	Lignes
Largeur du bout exterieur	3	$\frac{3}{4}$
Largeur du bout interieur	1	—
Longueur de l'ouverture de la bouche, par la machoire superieure	——	8
Circonference du bec à sa base	1	$5\frac{1}{2}$
Circonference du bout du bec	——	7
Largeur du corps aux nageoires ventrales . . .	2	—
Circonference du corps dans cet endroit . . .	4	—
Largeur du corps à la queue	——	9
Circonference du corps dans cet endroit . . .	1	8
Circonference de la tête à la nucque	4	$1\frac{1}{2}$
Circonference de la tête auprès des yeux . . .	2	7

DE
OSSIBUS LIGNO INCLUSIS.

Auctore
N. OZERETSKOVSKY.

Conventui exhibita die 21 Maji 1801.

In splendissima corporum naturalium collectione, apud egregium virum Forsterum, qui hic Petropoli jam quintum commoratur annum, habetur frustum ligni, in quo continentur ossa cujusdam animalis, intra lignum disposita et a foris undique ligno obducta, ita ut nulla certa deprehendatur apertura, qua ossa in lignum penetrarunt. Lignum hoc, teste eximio Forstero, repertum fuit in Mexica, ubi in officina monetaria operarii eo utebantur, et postquam usui jam ineptum evasit, comburere illud voluerunt, idcirco diffiderunt; quo facto in conspectum prodiere ossa in visceribus ligni sepulta. Fuit ea tempestate in Luisiana prorex ex Hispania, Galves nomine, ad quem lignum pervenit et qui illud, cum multis rarissimis naturae productis, in Europam attulit. Post mortem hujus proregis, tota illa collectio ab uxore ejus, vendita fuit supra laudato Forstero, erga omnes curiosos humanissimo, qui libentissime communicavit mecum illud lignum, quod depictum hic exhibeo et ad quod describendum accedo.

Fig. XII. Fig. 1. exprimit integrum ligni frustum, quod longitudine 10 poll. 3 lin. latitudine 11 poll. et 4 lin. aequat; pondus habet 12 circiter librarum, estque tetragonum. In medio ejus apparet fissura transversalis, perpendiculariter intra lignum descendens, longitudine 5 pollicum, inaequalis latitudinis. Intra fissuram, ad parietes ejus, conspicitur cortex crassiusculus, vetusto cortici Pini sylvestris admodum similis; tota autem externa ligni superficies cortice est denudata.

Fig. 2. sistit superam frusti portionem, latitudine 5, crassitie 2 poll. 6 lin. Hac portione teguntur ossa, transverse in ligno jacentia, quorum apices seu capita in interna laminae hujus superficie effecerunt cavitates, quas fusco colore in hac figura pictor expressit.

In Fig. 3. conspiciuntur capita ossium, ex ligno prominentia, quorum corpora lignum transversaliter permeant. Ossa haec sunt numero quinque: primum eorum, caeteris crassius, ad sesqui pollicem distat a memorata illa fissura, quae in Fig. 1. est expressa; os secundum, priori brevius et tenuius, ad dimidium pollicem ab eo est remotum. Huic secundo ossi adjacet ossiculum, capitulo suo extrorsum prominens, longitudine 3 poll. 9 lin. quod ex ligno extrahi potest; a capitulo enim suo sensim attenuatur, adeo ut tandem styliforme evaserit. Quartum os capite suo distat a tertio ossiculo ad dimidium pollicem, et est simile ossi secundo. Quarto huic ossi quam proxime appositum est ossiculum quintum, tertio osse tenuius, quod pariter ex ligno eximitur; quoniam a capitulo suo in formam styli attenuatur.

Fig. 4. exhibet portionem ligni, quae a latere frusti, ossibus in Fig. 3. prominentibus contrario, per longitudinem ligni consulto est abscissa, ut patefieret, quousque ossa illa in ligno protenduntur. Portio haec ligni 2½ pollic. crassitie aequat. In ea deprehenduntur trium ossium capita, lima ab-

scissa, et duorum ossium vestigia, a capitibus eorum in substantia ligni efformata, adeo ut plura ossa in hac lamina apparuerint, quam quot in opposito latere deprehendebantur; ossicula enim styliformia ad hanc laminam non pertingunt. Trium autem ossium majorum longitudo haec est:

Os primum . .	$8\frac{1}{2}$ poll.
Os secundum .	6 —
Os quintum .	$5\frac{1}{2}$ —

Ossa haec esse ossa artuum cujusdam animalis, nullum est dubium. et primum eorum videtur esse os femoris; secundum et tertium sunt ossa tibiarum; ossicula autem styliformia non sunt ossa integra, sed portiones ossium fibulae, quas manu humana attenuatas et in modum spinarum acuminatas fuisse periti consensum dedere osteologi, qui ossicula illa mecum examinarunt. Imo omnia illa ossa non casu et fortuito intra lignum pervenisse, sed opera humana intrusa fuisse ex ordinata eorum dispositione autumo; fissuramque illam transversalem, quam Fig. 1. representat, eo tempore, quo ossa in arborem intrudebantur, multo ampliorem fuisse, quam nunc apparet, facile mihi persuadeo; quippe quod ossa longitudine $8\frac{1}{2}$, 6 et $5\frac{1}{2}$ pollicum per rimam 5 poll. intra lignum propelli non potuerunt; alius vero intra lignum introitus nullus deprehenditur. Rimam autem seu fissuram illam, perpendiculariter in ligno factam, crescente adhuc arbore fuisse coarctatam, exinde concludo, quod internos ejus parietes jam cortex obduxit. Hac omnino via arbor ossa animalia intra se recepit, et sine suo interitu per saecula forte ea ab interitu conservavit. Arborem illam vivacissimam fuisse patet exinde, quod juxta longitudinem ligni perforata crescere continuaverat, receptis jam ossibus, quae firmiter et medullitus ligno suo est amplexa. Cujus autem generis fuerit illa arbor americana, ex frusto ligni penitus decorticato rite determinare non possum; ex portiunculis vero corticis, in fissura ligni praesentibus, illam abietini generis fuisse suspicor. Ossa ligno in-

clusa videntur mihi esse ossa suilla, propter similitudinem eorum cum ossibus hujus animalis; caeterum nec id absolute affirmo, cum ea omnia ex ligno extrahere et cum ossibus suillis pro lubitu comparare non penes me erat. Sufficit rarissimo ostendisse exemplo, quod ossa ligno arboris intrusa a succis ejus non putrescant, et arbor in meditullio paene suo perforata, receptis ossibus, non pereat, imo crescat et quaquaversum dilatetur. Sed eadem arbor, quando vulneratur a corpore venenato, pari modo perit ac animal, cui venenatum vulnus infligitur. Cuneus ligneus, arbori viventi infixus, eam non necat; ast inungatur cortici ejusdem arboris tantillum olei cum aerugine cocti, brevi morietur arbor; id quod propria me docuit experientia. Eodem oleo, aerugine colorato, tincta charta et in foliola laurinis similia efformata, mortem intulisset infanti, qui illa foliola temere masticabat, nisi beneficio naturae per vomitum a veneno illo liberaretur. Ast ossa in arborem, licet violatam, intropulsa, ut veneni expertia, non nocuerunt arbori, neque ipsa periere, sed aeque illaesa sunt conservata, ac conservantur animalcula succino inclusa. Perspicitur hinc convenientia, quae datur inter vegetabilia et animalia, licet illa tantummodo vita fruantur, uti contendunt philosophi; haec vero et vivant et sentiant. Non ne inest suus sensus etiam vegetabilibus? Certe vitam sine sensu, saltem ego, vix concipere possum.

DE

SPECIEBUS,

SYSTEMATICUM GENUS TRICHECHI CONSTITUENTIBUS.

Auctore

N. OZERETSKOVSKY.

Conventui exhibita d. 11 Junii 1800.

In Linnaeano systemate Naturae, ad genus Trichechi referuntur ejusmodi animalia, quae dentibus primoribus penitus carent; quibus dentes laniarii utrinque solitarii, et loco molarium utrinque os rugosum; quae denique corpus habent oblongum, labia geminata, et pedes posteriores compedes in pinnam coadunatos.

Sub hoc genere tres solummodo comprehenduntur species, quae sunt Rosmarus, Dugong et Manatus, qui posterior in duas subdividitur varietates, australem nempe et borealem. Paucae quidem sunt species, genus hoc constituentes; attamen omnes a charactere generico, mox exposito, magis vel minus recedunt. Prima species, quae in omni genere ad definitionem ejus quam proxime accedere debet, in genere Trichechi est Rosmarus. Hic a congeneribus suis distinguitur dentibus laniariis su-

perioribus exsertis, remotis; sed eidem Rosmaro juniori tribuuntur etiam dentes primores in maxilla superiore bini, exigui; molares vero etiam adulto in utraque maxilla utrinque quatuor, exiles, acuti, pone apicem fovea plana excavati. Nos os igitur rugosum constituit dentes molares, uti prodit character genericus, sed veri dentes utrique maxillae utrinque infixi.

Secunda species in hoc genere est Dugong, qui dentibus laniariis superioribus exsertis, approximatis distinguitur; sed huic, loco dentium primorum, adest planum inclinatum ad laniorios allidens, molares vero latiores quam in Rosmaro, distantes, in superiore maxilla utrinque quatuor, in inferiore tres.

Tertia denique species Trichechi est Manatus, cui dentes laniarii nulli; eorumque defectu distinguitur a recensitis supra speciebus. Ad hanc praeterea speciem referuntur varietates binae, australis nimirum et borealis; priori dentes molares in utraque maxilla utrinque novem, quadrati, cortice vitreo vestiti, et corpus longitudine 8 — 17, latitudine 6 — 7 pedes, pondere 500 — 800 libras aequans; posterior varietas loco dentium molarium in utraque maxilla utrinque habet os rugosum, et longitudine 23 pedes, pondere 8000 libr. aequat. Praeter has in charactere generico differentias, Manatus australis differt a boreali eo, quod est pilosus, et pedes habet tetradactylos, unguiculatos; borealis vero est nudus et pedes ipsi nec digitis nec unguibus sunt instructi. Apparet hinc magna diversitas Manati australis a Manato boreali; quos tamen Zoologi systematici ad unam eandemque retulerunt speciem. Ast multo major adhuc intercedit differentia inter Manatos et Trichechum Rosmarum atque Trichechum Dugong, quae consistit in structura pedum posteriorum. Rosmarus et Dugong duos habent pedes posteriores abbreviatos, caudamque adhuc breviorem, et hi artus horisontaliter sunt protensi, ita ut simul tripartitam quasi repraesentent caudam; nihilominus pedes eorum componuntur ex ossibus, qui-

bus gaudent mammalia terrestria. Manati vero pedibus posterioribus penitus destituuntur, et corpus eorum terminatur cauda plana, ex veris vertebris constante; qua structura hujus extremitatis quam proxime ad cetacea accedunt. Rosmarus et Dugong, licet maris sint incolae, egrediuntur tamen inde in siccum; Manati vero constanter degunt in aquis. Quod vero tam Trichechi quam Manati fucis, corallinis, testaceis, non carne, victitant, uti in Systemate naturae annotavit jam beatus Linnaeus; ob hanc solam proprietatem animalia ista non possunt neque debent ad unum idemque referri genus, dum saepe diversissimae bestiae eodem vescuntur papulo. Non raro etiam animalia valde inter se affinia, quae easdem res pro nutrimento sibi habent, in diversa dirimuntur genera, uti Myrmecophaga et Manis, quae formicis potissimum vescuntur; nihilominus Zoologi duo ex illis fecerunt genera, quorum differentia in eo tantum consistit, quod Myrmecophaga habet corpus pilis, Manis vero squamis osseis tectum; caeterum utrumque animal et dentibus prorsus est destitutum, et linguam habet teretem, extensilem, et os angustatum in rostrum. Majore omnino jure genus Trichechi dispesci potest in duo genera, quorum unum Rosmarum et Dugong sub se comprehendat, alterum Manatos contineat. Manatus enim australis pro varietate Manati borealis nullomodo haberi potest, cum ille et multo minor sit corpore quam borealis, et corpus habeat pilis tectum, pedesque tetradactylos unguiculatos, item dentibus instruatur molaribus in utraque maxilla utrinque novem; Manatus autem borealis evidentissime ab eo distinguitur corpore nudo, pedibus nec digitis nec unguibus instructis, corpore 8000 librarum pondus aequante, et osse rugoso in utraque maxilla loco dentium molarium. In boreali iterum spina dorsi constat vertebris 60, in australi autem 50.

Genus Trichechi ita forte determinari posset: Dentes laniarii superiores solitarii exserti; labia geminata; pedes posteriores compedes coadunati in caudam. Ex hac definitione ex-

cluduntur dentes primores, qui adulto Trichecho nulli utrinque; cum autem Trichechus pertineat ad Bruta, quibus omnibus dentes primores nulli utrinque; superfluum foret repetere, non adesse illi hos dentes, uti faciunt Zoologi systematici. Ex eadem definitione excluditur etiam corpus oblongum, tanquam character, nullam certam ideam suppeditans. Ad genus hoc rite nunc referri possunt Rosmarus et Dugong, quippe qui gaudent dentibus laniariis solitariis exsertis; ast duae hae species distinguentur a se invicem iisdem dentibus aut remotis aut approximatis; dentes remoti Rosmarum, approximati autem Dugong indigitabunt.

Genus Manati diversissimum esse a Trichechis evidenter declarat habitus eorum externus, quo vel maxime Balaenarum ordini approximantur; nam pedes anteriores habent pinnis similes, et loco pedum posteriorum pinna seu cauda gaudent horisontali, ex prolongatis dorsi vertebris composita. Pro determinando itaque eorum genere sequens character assumi posset: Pedes anteriores pinniformes; cauda in pinnam expansa, loco pedum posteriorum. Per hasce notas characteristicas facilius agnosci et distingui possent animalia, ad hoc genus spectantia, quam per defectum dentium primorum et laniariorum, quemadmodum distincta hucusque fuere in systemate Linnaeano, in quo omnibus hujus generis speciebus tribuuntur dentes laniarii solitarii; sed Manatus sub eodem genere distinguitur dentibus laniariis nullis. Separatis igitur a genere Trichechi Manatis, facillima erit divisio specierum Manati; Manatus enim borealis distinguetur corpore nudo et osse rugoso in utraque maxilla loco dentium molarium; Manatus vero australis

pro charactere specifico habebit corpus pilosum, pedes tetradactylos unguiculatos, et dentes molares in utraque maxilla utrinque novem.

Nomen itaque Trichechi Manato omnino debet adimi; quoniam designat animal habens pilos, qui Manato boreali desunt. Manatus iste, accuratissime descriptus a nostro Stellero, nova descriptione non eget; ast figura ejus, ex foetu et embryone, qui sunt in Musaeo Academiae, nitidissime expressa, maeretur omnino, ut a perito sculptore excidatur.

DISTRIBUTION MÉTHODIQUE DES PIERRES DE ROCHE AGRÉGÉES

PAR

BASILE SEWERGUINE.

Présenté et lû le 1 Juillet 1801.

Tandis que le géologue fait tous ses éfforts pour dévoiler les mystères de la nature dans l'interieur des montagnes, et que le chimiste met en mouvement tous les ressorts de l'art pour découvrir la vraie nature des minéraux exploités, qu'il me soit permis de continuer mes recherches oryctognostiques sur les pierres de roche agrégées *).

Il y a dejà longtems **) que j'ai promis leur distribution méthodique, et j'ai en partie exposé les raisons qui m'ont engagé a tracer une route un peu différente de celle qui a été

*) J'éspere que je n'aurai pas besoin d'indiquer les raisons, pour lesquelles j'ai changé l'adjectif *composées* en *agregées*. Chacun les sentira au premier coup d'oeil.

**) V. Nova Acta Academ. Scientiarum Imperialis Petropolitanae Tomus VII MDCCXCIII.

adoptée jusqu'alors. Je me suis occupé depuis tant de leur examen ultérieur, qu'à les contempler sous tous les différens points de vue qui ont pû se présenter à cet égard *). J'ai étudié et examiné avec toute l'attention possible les travaux de ceux qui s'occupoient du même objet, et j'avoue que je serois obligé d'abandonner entièrement tout le projet d'une nouvelle distribution des roches agrégées, si je n'étois aidé des lumières d'un Laméthérie dans sa savante Théorie de la terre **), d'un Prince Démetrius de Gallitzin qui enrichit les sciences par ses observations et ses ouvrages utiles qui démontrent tout-à-la fois et son vaste génie et son zèle ardent pour les sciences, d'un Werner ***), d'un Karsten ****) etc. Enfin j'ai taché d'accorder les différences que j'ai trouvé chez plusieurs savans distingués, par la manière de distribuer les roches agrégées, que j'ai l'honneur de proposer.

Toutes les classifications méthodiques des roches agrégées peuvent se réduire à trois principales, savoir: 1) Selon leur formation probable; 2) selon leur âge relatif; 3) selon leurs parties constituantes. Les deux premieres sont les résultats des observations du Géologue, et quant à la troisième, elle est l'objet de l'Oryctognoste.

---

*) Les dissertations insérées dans les Nova Acta Tom. VIII. pag. 301 et Tom. XII. pag. 372 sont en partie les résultats de ces recherches ultérieures.

**) Seconde édition augmentée d'une Minéralogie. Paris 1797. J'ai suivi la route qu'il a tracée, mais avec des changemens que j'ai vû être indispensables.

***) Kurze Klaſſification der Gebirgsarten. On verra que malgré les changemens que j'ai y faits, ma classification pourra s'accorder avec celle du célébre Werner.

****) Beſchreibung des Leſkiſchen Mineralienkabinets etc.

Personne ne doute de l'utilité particulière de cette dernière; et je repete que c'est elle qui doit servir de guide dans les recherches du Géologue; car comment juger et de la formation probable et de l'âge relatif des roches, sans connoître auparavant leur nature. C'est cette même utilité évidente qui m'engage à m'en occuper ici plus particulièrement. Mais avant d'exposer celle que j'ai adoptée, il faut convenir sur les points suivants.

1) Que tous les minéraux se divisent, sous ce point de vue, en deux grandes classes: en *simples* et en *agrégés*. Car il y a non seulement des pierres agrégées, mais aussi des fels agrégés, des substances métalliques agrégées et des bitumes agrégés. Nous en citerons les exemples plus bas.

2) Qu'il faut bien distinguer les dénominations: Minéraux *agrégés*, ainsi que *pierres agrégées* du nom de roches agrégées qui se distinguent des premiers en ce qu'ils servent proprement à constituer des montagnes entières. Le nombre des premiers peut à peine être déterminé, et il y en aura autant de variétés qu'il y aura d'agrégations différentes, tandis que les dernières, selon toutes les observations, sont en moindre nombre et se reduisent presque à celles qui sont citées plus bas. Les premiers sont accidentels, tels que Quartz et Spath calcaire, Quartz et Asbeste, Quartz et pyrite, Quartz et or etc. mais quant aux dernières, elles sont constantes, tels que le Granit, le Porphire etc. Et on ne peut, ce me semble, assez faire attention à cela pour distinguer les uns des autres.

3) Qu'il est des roches agrégées comme des minéraux simples dans le sens minéralogique. Elles sont aussi bien l'objet de l'oryctognoste que du géologue. Le premier contemple leurs différentes agrégations et nous enseigne à distinguer l'une de l'autre, tandis que le géologue s'oc-

cupe des recherches sur leurs différens gîtes, sur leur formation probable et sur tous les changemens qu'elles subissent par le laps du tems. Il y en aura donc toujours du moins deux sortes de classifications: l'une qui regarde l'oryctognosie et l'autre qui appartient à la géognosie. La première est celle dont je m'occupe ici plus particulièrement.

4) Que vû les raisons solides qui doivent avoir engagé chacun des grands minéralogistes à faire telle ou telle autre distribution méthodique des roches agrégées, il est de notre devoir de tacher de trouver un moyen pour accorder autant qu'il est possible les différences qui s'y peuvent rencontrer, non seulement par estime pour les travaux des savans célébres qui par leurs écrits ont tant contribué à la connoissance ultérieure de ces espèces de pierres, mais aussi pour éviter toute confusion et tout embarras qui pourroient résulter de la différente manière de les classifier, et de la différence des dénominations adoptées.

5) Que toutes nos classifications ont alors leur vraye utilité, quand elles sont fondées sur des bases solides; quand les divisions et toutes les subdivisions sont distinctement marquées; quand tout ce qu'on a dit pour la définition des classes, des genres etc. se trouve parfaitement dans toutes les espèces, dans toutes les variétés, dans les individus mêmes qui y sont compris, et c'est en cela je me suis donné toutes les peines possibles.

6) Que la plus grande difficulté tant dans la distribution oryctognostique, que dans celle qui regarde la géognosie, sera occasionné par les transitions des roches agrégées de l'une dans l'autre, non seulement à l'égard de leurs par-

ties constituantes, mais aussi à l'égard de la manière dont elles sont réunies ensemble ; de sorte qu'un vrai granit peut passer dans une roche schisteuse etc. Ces cas ne feront que nous inviter à l'examen ultérieur de tout ce qui leur arrive à ces roches, tandis qu'elles passent de l'une à l'autre forme etc. Avouons à cet égard que nos classifications seront toujours imparfaites, parceque nos connoissances minéralogiques le sont. En attendant tachons d'atteindre ce degré de perfection dont nous sommes capables.

Maintenant passons à l'exposition de ma classification qui, quoique peu différente de quelques unes de celles qui ont été déjà adoptées, contribuera peut être à leur plus de clarté.

Tout le monde sait ce qu'on entend par roches agrégées. Ce sont des agrégations constantes de différentes espèces et variétés de minéraux qui servent à constituer des montagnes entières.

Elles se divisent par elles mêmes, comme les minéraux simples, en roches *pierreuses*, *salines*, *bitumineuses et métalliques*, suivant la matière principale qui les constitue, ce qui fera mes *classes*, auxquelles j'ajoute encore les *terres agrégées*, par des raisons qu'on verra plus bas.

Les roches agrégées pierreuses se subdivisent en roches *silicieuses*, *argilleuses*, *talcqueuses et calcaires ;* ce qui fera mes *genres*. Je n'ai pas voulu ajouter les barytiques, les strontianitiques etc. Car pourquoi nommer des substances qui n'existent pas, ou du moins dont nous ne connaissons pas l'existence ?

Chacun de ces genres se subdivise en six sections, savoir: 1) en *Cristallines*, qui consistent en particules cristallines

ou spathiques réunies ensemble sans aucune forme déterminée et sans aucun ciment, tel est le *Granit.* — 2) *Schisteuses*, qui consistent en particules cristallines ou spathiques réunies ensemble sous une forme schisteuse; tel est le *Gneussum.* — 3) *Empâtées*, qui dans une masse solide contiennent des particules cristallines ou spathiques dispersées par toute la masse; tel est le *Porphire.* — 4) *Amygdaliques*, qui dans une masse solide contiennent des pierres arrondies, semblables, quant à la forme, à de l'amande, tel est *l'Amygdalite.* — 5) *Brèches*, qui consistent en pierres roulées et arrondies, réunies ensemble par quelque ciment, tels sont les *Breccias* — 6) *Sablonneuses* qui consistent en grains de sable réunis ensemble par quelque ciment. Telles sont les pierres sablonneuses.

Telle est ce me semble la marche qui nous mène peu à peu et sans la moindre difficulté à la connoissance de nos minéraux agrégés. Ayant par exemple un echantillon de granit devant nous, nous verrons bientôt *premièrement*, que c'est une roche agrégée *pierreuse;* parcequ'elle est *silicieuse;* et ensuite qu'elle est *cristalline.* Il ne s'agira maintenant que de définir l'espèce à laquelle elle appartient. Et je prends pour base des *espèces, les bases* ou *les parties constituantes principales*, parcequ'elles sont plus constantes, et quant aux particules hétérogènes qui s'y mêlent, j'en dérive *les variétés*, parcequ'elles sont accidentelles. Enfin voici la classification entière des Minéraux agrégés.

Classe I. Roches pierreuses.

Genre I. R. p. silicieuses.

Section 1. R. p. s. cristallines.

Ce genre et cette section comprend, si l'on s'en tient toujours à la partie constituante principale, cinq espèces. C'est-

à-dire: elle est ou *spathique*, et la partie principale constituante est le *Feldspath*, qui peut-être combiné avec une, deux, trois ou quatre différentes espèces de pierre; qui font ses variétés. 2) Ou elle est quartzeuse, c'est à-dire que la partie constituante principale est le *Quartz*, et ses variétés seront déterminées suivant les principes allégués tout-à-l'heure. 3) La troisième, que je mettrai à la tête de toutes les autres, est le vrai Granite, ou le Granite proprement dit, qui consiste en Feldspath, Quartz et Mica. J'espère que je n'ai pas besoin d'alléguer les raisons, pour lesquelles j'en fais une espèce particuliere; c'est pour éviter toute confusion, qui pourroit résulter si je l'aurois compris dans l'une des précédentes, auxquelles il appartiendra cependant, aussitôt que l'agrégation mentionnée change, ou qu'il s'y mêlera encore quelque autre espèce de pierres. 4) La quatrième est le *Sienite*, qui consiste en Feldspath, Hornblende et Quartz, agrégation constante, qui pour cela même doit être considérée à part. 5) *Roche de Topaze*, qui est remarquable par le vrai Topaze qu'elle contient. Ainsi nous aurons.

1) R. s. c. *Granite.*

2) R. s. c. *spathique*, à laquelle semblent apartenir:

Les Granites simplex *), scorlaceus, granatinus, micaceus, squamosus, calcarius, scorlinus, granatinus, viridis, talcifer, nitens, tricolor, elegans, micans, serpentinus de *Lin. Gm.* et beaucoup d'autres roches agrégées que j'ai citées dans une de mes dissertations précédentes sur cette matière.

---

*) Voyez la signification de ces dénominations et autres dans le système de Linné en langue latine de l'édition du célèbre Gmelin. Au reste elles sont expliquées plus au long dans mes élémens de Minéralogie imprimés en langue Russe en deux volumes.

3) R. s. c. *Quartzeuse*, à laquelle semblent appartenir le Granites garpenbergensis, melaleucos, Bavaricus, talcifer, inconspicuus, bicolor, corneus, triplex, glacialis, Helveticus, Hoepfneri, efflorens de *Lin. Gm.* et autres.

4) R. s. c. *Siénite*.

5) R. s. c. *de Topaze*, dont je connois trois variétés: Topaze avec du Quartz, Topaze avec des Aiguemarines, et Topaze avec du Quartz, du Schoerl et de Steinmark.

Section 2. R. p. s. schisteuses.

Je n'en connois que deux espèces:

1) R. s. sc. *des fours*, dons les parties constituantes principales sont le Quartz et le Mica, et à laquelle semblent appartenir les variétés: Gnoussum scorlinum, altenbergense, radians, Bornii, jemticum et alpinum de *Lin. Gm.*

2) R. s. sc. *Gneussum*, dont les parties constituantes principales sont le Feldspath, le Quartz et le Mica.

Section 3. Roches pierreuses silicieuses empâtées.

Il y en a deux espèces: l'une à base jaspitique ou le vrai porphire, et l'autre à base cornéenne.

1) *R. s. emp. Porphyre* qui, selon la nature des particules qu'il contient, constitue les variétés: Porphyrius cristallinus, scorlinus, granatifer, nitens de *Lin. Gm.*

2) *R. s. emp. cornèenne* avec des particules dispersées de Feldspath etc. à laquelle appartiennent le Porphyrius durissimus, inaequalis, scorlaceus, baryticus, tricolor, Rochlizensis et corneus de *Lin. Gm.*

Section 4. Roches pierreuses silicieuses amygdaliques.

Deux espèces, l'une à base cornèenne et l'autre à base jaspitique.

1) *R. s. am. cornèenne*, à laquelle appartient l'Am. margodes, similaris, jemticus et Quartzifer de *Lin. Gm.*

2) *R. s. am. jaspitique*, à laquelle appartiennent l'Am. Alboguttans, albofuscus, cinereus, helveticus, sibiricus, jasponyx et Cronstedii *Lin. Gm.*

Section 5. Roches silicieuses Brecches.

Il y en a 7 espèces, savoir:

1) R. s. B. *quartzeuse.*
2) R. s. B. *silicieuse.*
3) R. s. B. *jaspitique.*
4) R. s. B. *sablonneuse.*
5) R. s. B. *porphyrique.*
6) R. s. B. *granitique.*
7) R. s. B. *cuivreuse.*

Selon la nature des cailloux ou pierres arrondies qui les constituent.

Section 6. Roches silicieuses sablonneuses.

Il y en a quatre espèces selon la nature du ciment qui lie les particules sablonneuses.

1) P. sabl. *silicieuse*, à laquelle appartiennent l'Ar. flexilis, Avanturino, Cos, coagmentatus, foraminatus, filtrum et fundamentalis de *Lin. Gm.*

2) P. s. sabl. *calcaire*, à laquelle appartiennent l'Ar. cristallinus et stillatitius de Lin. et le Cos Quadrum. de Wall.

3) P. s. sabl. *argilleuse*, à laquelle appartiennent le Cos molaris, glareosa et turcica de *Wall.* Cos tigrina de *Lin.* et Graue Wake des mineurs Allemands.

4) P. s. sabl. *cuivreuse*, avec un ciment cuivreux, dont il y a assez d'exemples en Sibérie.

Genre II. Roches argilleuses.

Section 1. Roches argilleuses cristallines.

Il n'y en a qu'une espèce:

1) R. a. c. *micacée*, dont la partie principale est le Mica, et dont les variétés sont; Granites nitidulus, Zillensis, granatifer, radiatus, olivinus, montanus et homogeneus de *Lin. Gm.*

Section 2. Roches argilleuses schisteuses.

Trois espèces:

1) R. a. s. *micacée* ou *schiste micacé*, qui consiste principalement en Mica et en Quartz, et dont les variétés

sont: Gn. micaceum, Basaltinum, glandulosum, durum, olivinum et triplex de *Lin. Gm.*

2) R. a. s. *verd*, ou le *Grünstein* des Allemands, ou saxum ferreum de Wall. qui consiste principalement en Hornblende et en mica et auquel appartiennent les agrégations: Gn. squamosum, granatinum, lamellosum, syeniticum, splendidum et quadruplex de *Gm.*

3) R. a. s. *schiste de Hornblende*, ou *Hornblendschiefer* des Allemands, qui consiste en Hornblende et en Quartz.

Section 3. Roches argilleuses empâtées.

Il y en a cinq espèces, et c'est ici qu'appartiennent plusieurs roches faussement appellées Porphyres.

1) R. a. emp. *à base argilleuse*, qui contient quelque fois du Mica (Porph. transilvanicus *Gm.*), ou du Feldspath, (Porph. granitoides *Gm.*), ou de la Hornblende comme l'a trouvé le célébre Pallas, ou des Grenats etc.

2) R. a. emp. *à base de schiste argilleux*, qui contient ou du Mica (Gn. cotarium *Gm.*) ou du spath calcaire, comme l'a trouvé Mr. l'Acad. Hermann.

3) R. a. emp. *à base de Trapp*, à laquelle appartiennent le Porph. lamellosus, acerosus, spatosus, nigerrimus, antiquus, Angliae, tinnitans de Gm. et le Baltinite de Mr. l'Acad. Hermann.

4) R. a. emp. *à base de Basalte*, à laquelle appartiennent les aggrégations: Porph. aegyptiacus, Basaltinus, pedicularis, fuldensis et olivinus de *Gm.*

5) R. a. emp. *à base de lave*, à laquelle appartiennent le Porph. vulcanorum, bacillaris, nitidulus et decipiens

Gm. Le Sax. vulcanorum de Wall. le Tiburtino et le Piperino.

Section 4. Roches argilleuses amygdaliques.

Quatre espèces:

1) R. a. emp. *à base d'argille* avec du Quarz (Amygdalites primigenius *Gm.*) ou avec de la calcédoine, comme l'a trouvé Laxmann.

2) —— *à base de Trapp*, à laquelle appartiennent l'Amygd. sordidus, tuberosus, serpentinus, steatiticus, gypseus, variolosus, aeruginosus, Zeolithicus, et calcedonius *Gm.*

3) —— *à base de Basalte:* l'Amygd. chloroschistos, marmoreus, argillosus, radians, piceus, durus, et granitoides de *Gm.*

4) —— *à base de Lave*: l'Amygd. Brecciatus, argillaceus, schistosus, albomaculatus, pyromachus, inconspicuus, et achatoides de *Gm.*

Section 5. Roches argilleuses en Breches.

Tels sont les Basaltes et les Trapps arrondis et réunis par un ciment argilleux: Br. basaltina et argillosa de *Gm.* Ainsi deux espèces.

Section 6. Roches argilleuses sablonneuses.

Il n'y en a point, si non celles dont il est fait mention au genre I. Sect. 6. espèce 3.

Genre III. Roches talcqueuses.

Section 1. Roches talcqueuses cristallines.

Deux espèces:

1) —— *à base de Talc*, à laquelle appartiennent le Granite granatifer, et le Porphyrius talcosus et ponderosus de *Gm.* avec des Grenats, du Schörl, du Quartz et du Spath pesant.

2) —— *à base d'Asbest* avec des grenats, l'Amygdalites granatinus? de *Gm.*

Section 2. Roches talcqueuses schisteuses.

Il n'y a qu'une espèce: le Gneussum steatiticum de *Gm.* ou le *Schneidestein* des Allemands, qui consiste en stéatite et en Mica.

Section 3. Roches talcqueuses empâtées.

Deux espèces:

1) —— *à base de Serpentine*, dont les variétés sont les agrégations avec du Quartz, des grenats, du talc, du Mica, de Hornblende etc. auxquelles appartiennent aussi le Porph. arenarius, acicularis, granatinus, granitone, micaceus, asbestinus, ferrifer de *Gm.* Et la *Serpentinwake* de Mr. l'Acad. Hermann.

2) —— *à base de Nephrite* avec de la hornblende, ou du feldspath, du mica, des grenats ou du schoerl.

Section 4. Roches talcqueuses amygdaliques.

Il n'y a qu'une espèce:

1) —— *à base de Serpentine,* à laquelle semblent appartenir l'Amygd. glandulosus, homogeneus et leucochloros de *Gm.* avec du Marbre, de la pierre ollaire et du Quartz.

Section 5. Roches talcqueuses en breches.

Une espèce:

1) —— *à base de Serpentine:* Breccia serpentinea de *Gm.* Ce sont des morceaux de serpentine roulés et liés ensemble par un ciment marneux.

Genre IV. Roches calcaires.

Section 1. Roches calcaires cristallines.

Il n'y a qu'une espèce:

1) —— *à base de spath calcaire*, avec de l'Asbeste, en Olonetz, et avec de la Baïkalite et du Mica cristallisé, près du lac Baïkal.

Section 2. Roches calcaires empâtées.

1) —— *à base de Marbre*, avec du Spath calcaire, du Quartz, du Mica, du Talc, du Schörl, de l'Asbeste, de Serpentine, de Feldspath, dont voyez les exemples dans les dissertations citées; et auxquelles appartiennent le Porph. calcarius, micans, asbestinus et ophites de *Gm.*

Et ce sont les seules espèces qui appartiennent à ce genre, du moins je ne connois point d'autres que je puisse, à tout droit, citer ici.

Classe II. Sels agrégés.

Quoiqu'il puisse y avoir beaucoup d'espèces de sels neutres agrégés accidentellement, ce n'est que le sel gemme qui peut-être mis au rang des Roches, vû qu'il constitue de grandes masses entre les couches argilleuses imprégnées de sel et de Bitume etc. Voyez *Werner* à l'endroit cité.

Ainsi il n'y a *qu'une espèce.*

Classe III. Métaux agrégés.

Les agrégations des substances métalliques sont très nombreuses et méritent, à beaucoup d'égards, une attention particulière. Mais comme la plûpart en sont accidentelles, nous ne pouvons ajouter ici que les couches ferrugineuses de Tarnowitz, de la haute Silèsie etc. Et les couches de Galmey qui se trouvent près d'Olkutsch dans les montagnes des Cracovie etc.. Voyez Werner à l'endroit cité.

Ainsi il n'y en a que *deux espèces.*

Classe IV. Bitumes agrégés.

Tels sont 1) les charbons de terre qui se trouvent entre les couches de Marne, d'Argille sablonneux, d'Argille schisteux, et melés quelque fois de spath calcaire, de pyrites etc. 2) *La tourbe.*

Ainsi il y en a *deux espèces.*

Classe V. Terres agrégées.

Qu'il me soit permis d'en faire une classe particulière, vû qu'elles servent du moins à constituer des collines, et rem-

plissent souvent de vastes plaines. Provenues des debris de différentes espèces de pierres, elles sont en forte liaison avec elles dans la Théorie de la terre.

Elles peuvent être aussi bien agrégées que les pierres et on en peut citer quatre espèces :

1) Le *sable*, melé d'Argille etc.

2) l'*Argille* melé de Sable etc.

3) la *marne* ?

4) la *terre noire* ou l'Humus, cette terre fertile qui sert presque partout d'envelope à nôtre Globe, et qui est pour la plûpart le produit de la décomposition des corps organisés qui, après avoir terminé le cours plus ou moins long de la vie, payent ainsi le dernier tribut à la nature.

NOTICE I.

SUR UNE NOUVELLE VARIÉTÉ DE SPATH DE PLOMB BLANC.

Présenté et lû le 1 Juillet 1801.

Mr. l'Académicien Hermann, dans la dissertation nouvellement produite, nous a donné une belle déscription d'une seconde variété du Spath de Plomb blanc, qui effectivement, quant à l'extérieur, est très différente de celle qui étoit dejà connue. — Un heureux hazard ayant fait tomber entre mes mains plusieurs minéraux de *Salahir*, je me hâtai de les examiner de plus près, et le résultat en a été que j'y ai trouvé, selon toute apparence, encore une *troisième variété* du spath de plomb blanc différente des deux premières. Et comme il est de nôtre devoir de communiquer à l'Académie toutes les observations qui peuvent contribuer, tant soit peu, à l'avantage des sciences, je m'empresse à en donner ici la déscription de ses caractères extérieurs.

Déscription de la troisième variété de spath de plomb blanc.

Couleur: blanc jaunâtre ou couleur d'os d'Elephant à la surface; mais parfaitement blanc en dedans.

Apparence extérieure: cristallisé en octaèdres très applatis et allongés, desorte que ces cristaux s'approchent quelque fois de la forme des lentilles, et que, quand ils sont grouppés ensemble, il présentent aussi la forme d'un épis. La grandeur, ou plutôt la longueur des cristaux, varie depuis un demi pouce jusqu'à quelques lignes, mais ordinairement elles s'approche d'un demi pouce. La surface en est lisse et un peu luisante, approchant de la lueur grasse de l'os de l'éléphant.

Apparence intérieure. Ces cristaux n'ont point de lueur à l'intérieur; la cassure en est fibreuse dans une direction, et inégale et presque terreuse dans l'autre. Ils se cassent en morceaux de figure indéterminée à coins un peu obtus.

Transparence: ils sont demi-transparens tout-à-fait, ou quelques fois sur les coins.

Attouchement: gras à la surface, mais un peu sec en dedans. La matrice ou la gangue, où ces cristaux se renferment, est plus froide à l'attouchement que les cristaux mêmes.

Dnreté: ils s'égratignent facilement avec le canif.

Pesanteur: ils sont pesants dans le sens de Mr. Werner.

Qualités chimiques: ces cristaux ne font point d'effervescence avec les acides, même quand ils ont été reduits en poudre; mais ils se dissolvent lentement dans l'acide nitrique. L'acide sulfurique en précipite un sédiment blanc.

Ils ne produisent pas la moindre odeur, ni de souffre, ni d'arsénic devant le chalumeau; mais ils pétillent. Et lorsqu'après les avoir reduit en poudre, j'en eus mis une partie dans la cavité d'un morceau de charbon, que j'ai recouvert d'un autre, j'ai obtenu par le feu du chalumeau, en moins de deux minutes, plusieurs boutons de plomb métallique. Le reste du spath a pris une couleur jaunâtre.

Gangue ou matrice de ces cristaux: ils sont dispersés ou grouppés dans une gangue qui consiste de pyrite de fer grenu et qui se décompose en une terre noire bleuâtre, c'est pourquoi toute la masse se rompt facilement et presque au premier attouchement. En outre elle est melée de spath pesant, et d'un peu d'oxide de cuivre verd.

Lieu natal et autres qualités de ces cristaux: ils se trouvent, suivant les nouvelles que m'en a communiquées notre respectable correspondant Mr. de *Schanguine*, dans la minière Salahirskoy, à la profondeur perpendiculaire de 53 Sajènes. Et il m'assure, qu'on n'en a rien trouvé auparavant (c'est à dire avant l'année 1798) dans les minières de Kolyvan. Quelques uns de ces cristaux sont creux en dedans ou remplis d'oxide de fer jaune.

C'est donc la couleur, la cristallisation, la lueur, la cassure et la manière de se porter envers les acides, qui nous engage à en faire une variété particulière, jusqu'à ce qu'ils soyent analysés chimiquement. Desorte que nous aurons les variétés suivantes du spath de plomb blanc, savoir: 1) *la commune* qui est connue depuis long tems; 2) *la vitreuse*, décrite dans ma Minéralogie, et plus amplement par Mr. l'Acad. Hermann, et 3) *l'osseuse*, nommée ainsi à cause de l'apparence extérieure, et qui est le sujet de cette notice.

B. Sewerguine.

NOTICE II.

SUR

L'OXIDE DE FER

EN FORME D'AIGUILLES

QUI SE TROUVE

SUR LES AMETHYSTES DE L'ISLE DE KIJA EN ONEGA.

Présenté et lû le 1 Juillet 1801.

On connoit les Améthystes d'Onéga et par la déscription et par les échantillons qu'en a fourni à l'Académie nôtre respectable Académicien Hermann. On sait que plusieurs de ces Améthystes sont recouverts d'aiguilles ferrugineuses, et qu'on les a pris pour du chromiste de fer. Ayant appris depuis par Mr. l'Académicien Lowitz que ce n'est que de l'oxide de fer, je me suis pris la peine de déterminer, par la voye fêche, la quantité du fer métallique qu'on en pourroit produire, ce qui m'étoit d'autant plus facile a exécuter, que j'en avois obtenu une portion assez considérable d'un de mes correspondants à Petrosawodsk. Mais avant d'exposer les épreuves docimastiques que j'en ai faites, il faut que je fasse la déscription de ses caractères extérieurs, qui sont les suivans:

Couleur: brune.

Apparence extérieure : cristallisé en forme d'aiguilles qui sont souvent réunies ensemble en forme de faisceaux. La surface en est lisse et très peu luisante et la lueur est vitreuse, quelque fois un peu chatoyante et rarement métallique.

Apparence intérieure : Ces aiguilles sont luisantes en dedans et la lueur est métallique. La cassure est feuilletée dans une direction et inégale dans l'autre. Les morceaux détachés ont une forme indéterminée.

Transparence : Elles ont quelque foible transparence sur les coins.

Pésanteur moyenne : Vingt livres docimastiques de cet oxide de fer ont été melées avec 10 livres de Borax calciné et le tout mis dans un creuset enduit auparavant d'un mélange de trois parties de poudre de charbon sur une partie d'argille et mouillé en outre avec de l'huile de chanvre. On l'a tenu dans la chaleur la plus forte du soufflet de la forge pendant presque 30 minutes. Le produit en a été 5 livres et 12 solotniks docimastiques de fer de fonte, dont la couleur étoit grise noirâtre à l'extérieur et grise blanchâtre à l'intérieur, au reste la surface en étoit lisse et la cassure inégale. La scorie étoit de couleur noire verdâtre, compacte, la cassure conchoïdale, et elle se détacha facilement du bouton de fer. Le peu de produit de fer obtenu de ces aiguilles provient en partie des grains d'améthyste et de Quartz qui y étoient melés.

B. Sewerguine.

ASTRONOMICA.

OBSERVATIONS DE VENUS FAITES À L'OBSERVATOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE SAINT PÉTERSBOURG,

VERS LE TEMS DE LA PLUS GRANDE DIGRESSION OCCIDENTALE DE CETTE PLANÈTE, QUI A EU LIEU EN MAY 1798.

PAR

Mr. *L'ABBÉ HENRY.*

Présenté et lû le 21 *Juin* 1798.

Le beau tems qu'il a fait dans le courant du mois de May et une grande partie de Juin m'ayant permis de suivre la planète de Venus, j'ai tiré de mes Registres les Observations suivantes de cette planète, qui ont été faites vers le tems de sa plus grande digression occidentale, pour les comparer aux Tables.

On sait que ces sortes de comparaisons sont toujours utiles au progrés de l'Astronomie. Ce sont elles en effet qui fournissent les moyens de rectifier les élémens des orbites planétaires et d'approcher de plus en plus de leur véritable valeur.

Les passages au méridien de la planète et des étoiles auxquelles elle a été comparée, ont été observés en même tems à la lunette méridienne et au quart-de-cercle mural: comme ils ne différent pas sensiblement, j'aurois pu me servir indifféremment des uns ou des autres, pour en conclure l'ascension droite de la planète: cependant j'ai préféré de la déduire des passages observés à la lunette méridienne, par la raison que je la crois plus exactement dans le plan du méridien que le quart-de-cercle. En effet par toutes les observations que j'ai faites depuis l'instant où j'ai commencé à m'en servir, pour m'assurer de sa situation, je me suis convaincu que sa déviation du plan du méridien ne va pas à une seconde de tems. Voici d'abord les observations telles que les instrumens les ont données.

Observations faites à la Lunette des Passages.

Noms des Astres	premier fil	second fil ou milieu	troisième fil
Le 22 May 1798.			
β du Lion	37′ 46″	11 38′ 37″	39′ 28″
α de la Vierge	13 36″	13 14 26″	15 17″
Le 23 May.			
Second bord de Venus . .	2′ 22″	1 3′ 12″	4′ 3″
β du Lion	37′ 45″	11 38″ 36″	39′ 28″
α de la Vierge	13′ 36″	13 14 26″	15 17″
Le 24 May.			
Second bord de Venus . .	6′ 0″	1 6′ 50″	7′ 41″
α de la Vierge	13 36″	13 14 26″	15′ 17″
Arcturus	5 27″	14 6 20″	7′ 14″
Le 25 May.			
Second bord de Venus . .	9′ 39″	1 10′ 29″	11′ 19″
α de la Vierge	13 36″	13 14 26″	15′ 17″
Arcturus	5 27″	14 6 20″	7′ 14″

Noms des Astres	premier fil	second fil ou milieu	troisième fil
Le 26 May.			
Second bord de Venus	13′ 19″	1^h 14′ 9″	15′ 0″
α de la Vierge	13 36″	13 14 26″	15′ 17″
Arcturus	5 26″	14 6 20″	7′ 14″
Le 27 May.			
Second bord de Venus	17′ 0″	1 17′ 50″	18′ 41″
α de la Vierge	13′ 36″	13 14′ 26″	15′ 17″
Arcturus	5 26″	14 6′ 20″	7′ 14″
Le 28 May.			
Second bord de Venus	20′ 44	1 21 34″	22′ 24″
β du Lion	37′ 45″	11 38 37″	29′ 38″
α de la Vierge	13 36″	13 14 26″	15′ 17″
Arcturus	5′ 26″	14 6′ 20″	7′ 13″

Observations faites au Quart-de-Cercle Mural.

Noms des Astres.	I fil.	II fil.	III fil.	IV fil.	V fil.	Distances au Zénith. Divis. inter.	Divis. exter.
Le 22 May 1798.							
β du Lion	37′ 35″	38′ 6″	11^h 38′ 37″	39′ 8″	39′ 39″	44°13′23″,5	47. 2.11. 11″5
α de la Vierge	— —	13′ 57″, 2	13 14 27 4	14 58″,5	— —	70 0 5″,2	74.10.10, 9″7
Le 23 May.							
Second bord et sup. Venus	— —	2′ 42″ 2	1 3′ 12″ 3	3 42″ 2	4 12″3	55° 6′20″ 7	58.12. 7. 6″3
α de la Chevre	0′ 13′ 0	0 55″ 2	5 1′ 38″ 0	2 20″ 8	— —	14° 9′32″ 0	15. 1.10. 4″0
Rigel	— —	4′ 11″ 5	5 4 41″ 5	5 11″ 5	5 41″5	68 20 52″ 8	72.14. 7. 5″2
β du Lion	37 34′ 0	38 5″ 5	11 38 37″ 0	39′ 8″ 5	39 40″0	44 13 23″ 8	47. 2.11. 11″1
α de la Vierge	— —	— —	13. 14 26″ 8	— —	15 27″7	77 0′ 3″ 2	74.10.10. 11″7
Le 24 May.							
Second bord et sup. Venus	5 50′ 8	6 20″ 8	1 6′ 50″ 8	7 20″ 8	7 50″8	54.48′ 9″ 0	58. 7. 4. 6″6
α de la Chevre	— —	1 53, 2	5 1 36″ 0	1 18, 7	— —	14 9 30″ 8	15. 1.10. 0″4
α de la Vierge	— —	13 57, 3	13. 14. 27″ 5	— —	15 27″8	70 0′ 9″ 1	14.10.11. 0″2
Arcturus	5 17″ 0	5 49″ 0	14. 6 21″ 0	6 53, 0	7 25″0	39. 41.19″ 5	42. 5. 5. 7″6

Noms des Astres.	I fil.	II fil.	III fil.	IV fil.	V fil.	Distances au Zénith. Divis. inter.	Divis. exter.
Le 25 May.							
Second bord et sup. Venus	— —	9′ 58″ 5	1h 10′ 28″ 5	10′ 58″ 5	11′ 28″6	54° 28′ 46″ 5	58. 2. 6 11″7
α de la Vierge	— —	13 57″	13. 14 27″ 0	14 58″ 0	— —	70′ 0′ 5″ 4	74 10.11 4″5
Arcturus . .	5 17″ 0	5 49″ 0	14 6 21″ 0	6 53″ 0	7′ 25″0	39 41.12″ 5	42. 5. 5. 4″1
Le 26 May.							
Second bord et sup. Venus	13 9′ 3	13 39″ 3	1 14 9″ 3	14 59, 3	15 9″3	54 11. 6″ 5	57.12.12. 4″3
α de la Chevre	— —	1 55″ 6	5 1 38″ 1	2 20″ 5	3 11″1	14 9 33″ 1	15. 2.10 4″0
α de la Vierge	— —	13 57″ 2	13 14 27″ 7	14 57″ 4	— —	70 0 4″ 5	74 10 11 0″0
Arcturus . .	5 17″ 0	5 49″ 0	14 6. 20″ 9	6′ 53″ 0	7 24″5	39 41′17″ 4	42. 5. 5. 7″3
Le 27 May.							
Second bord et sup. Venus	16 49″ 5	17 19″ 5	1 17 49″ 5	18 19″ 5	18 50″0	53 52′20″ 5	57. 7. 6. 6″6
α de la Vierge	— —	13 26 0	13 14 27″ 0	14 58″ 0	— —	70 0. 5″ 4	74.10.11 1″5
Arcturus . .	5. 17″ 0	5 49″ 0	14 6 21″ 0	6 53″ 0	7 25″0	39 41.14″ 4	42. 5. 5. 5″6
Le 28 May.							
Second bord et sup. Venus	20 33′ 9	21 3″ 9	1 21 33″ 9	22 3″ 9	22 33″9	53. 33 20″ 2	57. 2.16. 3″9
α de la Vierge	13 26, 5	13 57″ 0	13 14 27″ 0	14 57″ 0	15 27″5	70 0 1″ 0	74.10.10. 12″1
Arcturus . .	— —	5 49‴ 0	14 6′ 20″ 0	6 52′ 8	7 24″6	39 41′16″ 4	41. 5. 5. 5″5.

La pendule d'observation étoit réglée sur le tems sydéral, et ne retardoit guères à cette époque que d'une seconde en onze à douxe jours. J'ai d'ailleurs eu égard à cette petite différence.

J'ai tiré du catalogue de Maskelyne l'ascension droite moyenne et la déclinaison moyenne de chaque étoile observée, et après les avoir converties en apparentes, en y appliquant l'aberration et la nutation convenables, j'ai changé l'ascension droite apparente de chacune en tems.

J'ai ensuite corrigé de la réfraction la distance au zénith observée de chaque étoile et en ai conclu sa déclinaison apparente, en employant pour hauteur du Pole 59° 56′ 23″. Et comparant les passages et les déclinaisons observées avec les ascensions droites apparentes en tems et les déclinaisons, tirées des catalogues j'ai formé le tableau suivant :

Etoiles	Ascensions droites appar.		différ.	Déclinaisons apparentes		différ.
	observées	calculées		observées	calculées	
β Lion. . . .	11^b 35′ 37″ 5	11^b 38′ 44″ 9	— 7″ 4	15° 42′ 4″ 2	15° 42′ 4″ 4	— 0″ 2
α Vierge . .	13^b 14′ 27″ 5	13^b 14′ 34″ 8	— 7″ 3	10° 6′ 20″ 1	10° 6′ 19″ 6	+ 0″ 5
Arcturus . .	14^b 6′ 21″ 0	14^b 6′ 28″ 1	— 7″ 1	20° 14′ 20″ 0	20° 14′ 19″ 6	+ 0″ 4
α Chevre . .	5^b 1′ 38″ 0	5^b 1′ 45″ 5	— 7″ 5	45° 46′ 41″ 0	45° 46′ 39″ 4	+ 0″ 6
Rigel	5^b 4′ 41″ 5	5^b 4′ 48″ 6	— 7″ 1	8° 26′ 48″ 6	8° 26 48″ 4	+ 0″ 2

Qui fait voir que la pendule retardoit de 7″ 3 sur le tems sidéral, et que le quart-de-cercle représente les déclinaisons fort exactement.

Après avoir corrigé les passages observés de Venus de cette quantité, je les ai converties en tems moyens et en dégrés.

Ayant ensuite retranché de la hauteur du Pole les distances au zénith de Venus, dépouillées de la refraction j'ai formé ce tableau :

May. Le	Tems du pass. du second bord		Ascension droite	Déclin. apparente	
	sideral	moyen	du second bord	du bord supérieur	
22	1^b 3′ 19″ 8	20^b 58′ 50″ 8	15° 49′ 57″ 0	5° 48′ 41″ 3	B
23	1^b 6′ 57″ 8	20^b 58′ 32″ 9	16 44′ 37″ 0	4° 6′ 55″ 4	B
24	1^b 10′ 36″ 8	20^b 58′ 14″ 8	17 39′ 12″ 0	5 26 18″ 6	B
25	1 14 16″ 8	20^b 57′ 58″ 3	18 34′ 12″ 0	5 43 56″ 5	B
26	1 17 56″ 8	20^b 57′ 41″ 7	19 29′ 27′ 0	6 2 46″ 3	B
27	1 21 41 3	20^b 57′ 28″ 2	20 25″ 19″ 5	6 21 44″ 8	B

Les Tables de Venus qui sont dans la troisième édition de l'Astronomie de Mr. de la Lande, donnent pour l'instant de la culmination du second bord de cette planète les résultats suivans:

May. Le	Longitude géocentrique	Latitude géocentrique	Parallaxe horisontale	Demi-diamètre horisontal
22	0^s 16° 26′ 16″ 7	1° 47′ 52″ 6 A	12″ 5	12″ 1
23	0^s 17° 23′ 19″ 5	1° 51′ 46″ 5 A	12″ 4	12″ 0
24	0^s 18° 20′ 41″ 2	1° 55′ 23″ 6 A	12″ 3	11″ 8
25	0^s 19° 18′ 31″ 8	1° 58′ 53″ 8 A	12″ 2	11″ 7
26	0^s 20° 16′ 44″ 6	2° 2′ 13″ 7 A	12″ 0	11″ 6
27	0^s 21° 15′ 12″ 4	2° 5′ 24″ 4 A	11″ 9	11″ 5

Avec la parallaxe horisontale et le demi-diamètre horisontal de Venus on trouve sa parallaxe de hauteur et son demi-diamètre ou ascension droite. On retranche ce demi-diamètre de l'ascension droite du second bord de Venus, pour avoir celle du centre de la planète; et après avoir ajouté la parallaxe de hauteur à la déclinaison du bord supérieur et retranché le demi-diamètre horisontal, pour avoir la déclinaison du centre de la planète, on a, à l'instant de la culmination du second bord de Venus, les quantités suivantes:

May. Le	Ascension droite du Centre de Venus	Déclinaison
22	15° 49′ 46″ 9	4° 48 39″ 8 B
23	16° 44′ 25″ 0	5 6 53″ 2 B
24	17 39 0″ 1	5 25 17″ 9 B
25	18 34 0″ 3	5 43 56″ 3 B
26	19 29 15″ 5	6 2 45″ 0 B
27	20 25 7″ 5	6 21 42″ 5 B

avec lesquelles et avec l'obliquité de l'Ecliptique 23° 27′ 58″ 9 on trouve les longitudes et latitudes géocentriques de la planète, qui comparées aux précédentes, tirées de tables, donnent les résultats suivans :

May. Le	Longitude géocentrique	Erreur des tables	Latitude géocentrique	Erreur des tables
22	0ˢ 16° 25′ 58″ 0	— 18″ 7	1° 47′ 40″ 5 A	— 12″ 1
23	0ˢ 17° 22′ 58″ 6	— 20″ 9	1° 51′ 37″ 5 A	— 9″ 0
24	0ˢ 18° 20′ 30″ 8	— 10″ 4	1° 55′ 17″ 0 A	— 6″ 6
25	0ˢ 19° 18′ 16″ 0	— 14″ 8	1° 58′ 44″ 6 A	— 9″ 2
26	0ˢ 20° 16′ 26″ 8	— 15″ 8	2° 2′ 3″ 7 A	— 10″ 0
27	0ˢ 21° 14′ 53′ 5	— 18″ 9	2° 5′ 11″ 5 A	— 12″ 9

L'erreur moyenne des tables en Longitude est donc de — 16″ 6, et en Latitude — 9″ 9.

Si l'on retranche le Longitude de la planète de celle du soleil, on aura pour chaque jour son élongation telle qu'elle résulte des observations précédentes, savoir :

May. Le	Elongation de Venus			
22	1ˢ	15°	52′	17″ 0
23	1	15	52	52″ 0
24	1	15	52	52″ 2
25	1	15	52	38″ 5
26	1	15	51	57″ 5
27	1	15	51	0″ 0

On pourroit donc, au moyen des quantités précédentes, calculer l'instant de la plus grande digression de Venus, ainsi que la longitude et la latitude géocentriques de la planète, à l'instant de cette plus grande digression, si cela étoit nécessaire.

MEDITATIO
DE
FIGURA TELLURIS
EXACTIUS COGNOSCENDA.

Auctore
STEPHANO RUMOVSKY.

Conventui exhibita d. 11 Mart. 1799.

1) Conferenti disquisitiones auctorum de magnitudine et figura Telluris mox patebit ex iisdem datis diversos auctores diversam aliquantum rationem diametri aequatoris ad axem Telluris elicuisse. Originem hujus discrepantiae licet exiguae, non prorsus tamen negligendae, exinde ut plurimum promanasse observavi, quod rationem illam deduxerint e formulis proxime tantum veris: Sic posito primo gradu meridiani 56750 et sub Latitudine 46° . 23′ 57050 perticarum gallicarum, *Condaminus* juxta formulam Maupertuisianam differentiam inter diametrum aequatoris et axem Telluris eruit $\frac{1}{302}$, cum ex formula geometrice vera eadem $\frac{1}{308}$ resultet. Hac discrepantia inductus e re esse existimavi omnes gradus meridiani, quot quot hucusque mensurati sunt, conferre cum primo gradu Latitudinis, nec non cum gradu Laponiae, atque ope formulae omnimode verae valorem pro differentia inter diametrum aequatoris et axem Telluris eruere. Hunc in

finem necesse est, ut brevibus repetam solutionem Eulerianam sequentis problematis.

Problema.

2) Considerata Tellure ut Ellipsoide, datis magnitudine et latitudine binorum meridiani graduum determinare rationem diametri aequatoris ad axem Telluris.

Solutio.

Tab. XIV. Fig. 8. Sit C centrum Telluris, dimidius axis $AC = b$, et radius aequatoris $EC = a$, atque AEB meridianus ellipticus, cujus revolutione circa AB nascitur Tellus. Denotet praeterea punctum M locum Terrae in superficie, ubi gradus meridiani est mensuratus, et ponatur pro hoc puncto abscissa $CP = x$, et semiordinata $PM = y$, erit ex natura ellipsis $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$. Ducta ad meridianum normali MN fiet subnormalis $PN = \frac{bbx}{aa}$. Vocetur jam angulus $MNE = \Phi$, quo definitur Latitudo loci M, habebitur $\text{tag}\,\Phi = \frac{PM}{PN} = \frac{a\sqrt{(aa - xx)}}{bx}$. Unde obtinebitur

$$x = \frac{aa\cos\Phi}{\sqrt{(aa\cos\Phi^2 + bb\sin\Phi^2)}}$$

$$y = \frac{aa\sin\Phi}{\sqrt{(aa\cos\Phi^2 + bb\sin\Phi^2)}}$$

atque elementum

$$Mm = \partial s = \frac{aa\,bb\,\partial\Phi}{(aa\cos\Phi^2 + bb\sin\Phi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hinc radius osculi pro puncto M

$$\frac{\partial s}{\partial\Phi} = \frac{aa\,bb}{(aa\cos\Phi^2 + bb\sin\Phi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pro alio autem puncto R, cujus Latitudo sit $= \psi$, erit radius osculi

$$\frac{\partial s}{\partial\psi} = \frac{aa\,bb}{(aa\cos\psi^2 + bb\sin\psi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cum igitur arcus meridiani exigui teneant rationem radiorum osculi si M et N exprimant magnitudinem graduum meridiani punctis M et R respondentium, habebitur

$$M : N = \frac{aa\,bb}{(aa\cos\Phi^2 + bb\sin\Phi^2)^{\frac{3}{2}}} : \frac{aa\,bb}{(aa\cos\Psi^2 + bb\sin\Psi^2)^{\frac{3}{2}}};$$

Vel posito $b = 1$ et $a = 1 + \delta$, existente δ fractione ad modum exigua, fiet

$$M : N = \frac{1}{(\sin\Phi^2 + (1+\delta)^2\cos\Phi^2)^{\frac{3}{2}}} : \frac{1}{(\sin\Psi^2 + (1+\delta)^2\cos\Psi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

unde reperitur

$$(1+\delta)^2 = \frac{N_3^2\sin\Psi^2 - M_3^2\sin\Phi^2}{M_3^2\cos\Phi^2 - N_3^2\cos\Psi^2}.$$

Corollarium.

3) Valor ipsius δ adhibita approximatione variis modis erui poterit: si in formula ultimo inventa negligatur secunda potestas ipsius δ, prodit

$$\delta = \frac{\frac{1}{2}(N_3^2 - M_3^2)}{M_3^2\cos\Phi^2 - N_3^2\cos\Psi^2}$$

sive cum sit $(\sin\Phi^2 + (1+\delta)^2\cos\Phi^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 - 3\delta\cos\Phi^2$ et $(\sin\Psi^2 + (1+\delta)^2\cos\Psi^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 - 3\delta\cos\Psi^2$ habebitur

$$M : N = 1 - 3\delta\cos\Phi^2 : 1 - 3\delta\cos\Psi^2$$

unde

$$\delta = \frac{N - M}{3(N\cos\Phi^2 - M\cos\Psi^2)}.$$

4) Omnes igitur gradus meridiani, quorum magnitudo novissimis temporibus est definita, combinando cum gradu Peruviano et Laponiae ope formulae supra exhibitae quaesivi semi-

diametrum aequatoris, et quanta inde resultavit differentia inter diametrum aequatoris et axem Telluris sequenti tabula complexus sum.

Latitudo.	Magnitudo gradus.	δ resultat. ex compar. gradus Peruv.	δ resultat. ex compar. gradus Lap.	
1°	56750			*Bourguer* et *Condam.* Peruv.
66°. 20′ B	57422	$\frac{1}{219}$		*Maupertuis* Lapon.
33 . 18 A	57037	$\frac{1}{178}$	$\frac{1}{239}$	*la Caille* C. B. S.
39 . 12 B	56903	$\frac{1}{480}$	$\frac{1}{145}$	*Mason* et *Dixon* Pensilv.
50 . 0	57084	$\frac{1}{299}$	$\frac{1}{128}$	
49 . 3	57069	$\frac{1}{317}$	$\frac{1}{128}$	*Cassini* Galliae.
49 . 23	57074	$\frac{1}{308}$	$\frac{1}{134}$	
47 . 58	57071	$\frac{1}{292}$	$\frac{1}{140}$	
45 . 43	57040	$\frac{1}{302}$	$\frac{1}{146}$	
43 . 32	57048	$\frac{1}{270}$	$\frac{1}{140}$	
48 . 43	57086	$\frac{1}{287}$	$\frac{1}{140}$	*Liesganing* Austriae.
47 . 47	57074	$\frac{1}{279}$	$\frac{1}{143}$	
47 . 15	57064	$\frac{1}{291}$	$\frac{1}{144}$	
43 . 0	56979	$\frac{1}{337}$	$\frac{1}{144}$	*Boscovichius* Italiae.
44 . 44	56069	$\frac{1}{263}$	$\frac{1}{168}$	*Beccaria* Pedemont.
45 . 57	56881	$\frac{1}{666}$	$\frac{1}{102}$	*Liesganing* Hungar.

5) Discrepantia, quae cernitur in valore ipsius δ, nonnulli auctores permoti in eam abiere sententiam, ut statuant figuram Telluris non solum non esse sphaeroidicam, verum etiam conformationem hemisphaerii Australis diversam esse a conformatione Borealis, supponentes scilicet mensuras graduum diversis in regionibus captas omnimode esse justas. Non nulli vero experientia edocti, quam difficile sit altitudinem alicujus astri metiri cum praecisione 2 aut 3 minutorum secundorum, ad conciliandam Telluri figuram sphaeroidicam censent in observationibus coelestibus non nullos errores esse admittendos, tales nempe, quales adhibita omni diligentia vix possunt evitari. Luculens hujus rei exemplum sistit nobis Latitudo observatorii Parisini, quae post tot repetitas observationes ad 2 minuta secunda hucusque est incerta. Utraque sententia pari nititur auctoritate; probabilior tamen censenda videtur ea, quae cum legibus gravitatis facilius conciliatur.

6) Cum determinatio amplitudinis arcus coelestis inter binas stationes intercepti requirat binas observationes alicujus stellae, et quaelibet observatio distantiae a Zenith errorem 2 imo etiam 3 minutorum secundorum involvere queat, facile patet amplitudinem arcus metiri 4 imo etiam 6 minutis secundis in excessu vel in defectu a vera posse aberrare; et cum uni minuto secundo respondeant 16 circiter perticae gallicae, mensurae gradus meridiani correctionem $\pm$ 100 perticarum sine praejudicio observatorum recipere poterunt, ut ex mutua eorum comparatione prodeat figura Telluris sphaeroidica. Maximam tamen supra dictam correctionem iis tantum mensuris applicare consultum est, ubi unus tantum semelque gradus meridiani mensuratus est, quales sunt Lapponiae, ad Caput Bonae Spei, et Pensilvaniae; quoties vero plures in eadem regione fuerint mensurati, correctio pro ratione graduum erit minuenda.

7) His praesuppositis observavi applicata correctione gradui Peruviano — 40, Capitis Bonae Spei — 105, Pensilvaniae + 99, Italiae + 75, gradui Galliae Boreali + 60, medio a Condamino assumto + 48, meridionali + 20, Pedemontii 0, Austriae medio + 42, Laponiae — 90 perticarum, excepto gradu Hungariae omnes collatos cum gradu Peruviano, aeque ac Laponiae, eandem quam proxime rationem diametri aequatoris ad axem Telluris praebituros, prout patet ex sequenti luterculo.

Latitudo.	magnitudo gradus.	correctio.	δ resultans ex comparatione		
			gradus Peruv.	gradus Lapon.	
1°	56750	— 40			Peruv.
66 . 20′ B	57422	— 90	1 . 00434		Laponiae.
33 . 18 A	57037	—105	1 . 00434	1 . 00429	C. B. S.
39 . 12 B	56903	+ 99	1 . 00431	1 . 00438	Pensilvan.
43 . 0	56979	+ 75	1 . 00434	1 . 00434	Italiae.
43 . 32	57048	+ 20	1 . 00437	1 . 00431	Gall. merid.
44 . 44	57069	0	1 . 00437	1 . 00429	Pedemont.
46 . 43	57050	+ 48	1 . 00429	1 . 00439	Galliae med.
47 . 55	57076	+ 42	1 . 00435	1 . 00432	Viennens.
50 . 0	57084	+ 60	1 . 00435	1 . 00434	Gall. Bor.
		Medium	1 . 00434	1 . 00433,2	

Hinc $\delta = \frac{1}{230,2}$ $\frac{1}{231}$

8) Et si ratio diametri aequatoris ad axem Telluris hic elicita sat bene consentiat cum ratione ex legibus gravitatis deducta, pro vera tamen illam asserere nimia foret audacia ob insignes correctiones, quas nonnullis mensuris graduum tribuere fuit necessum. Neque minus verum est, in quacunque ratione crescere ponantur gradus meridiani ab aequatore versus polos, semper admitti debere correctiones non minores iis, quas supra applicuimus, si omnes mensurae graduum cum assumta hypothesi ad consensum sint reducendae. Unde concludere est, multum adhuc nos distare ab exacta cognitione figurae Telluris, et recte sentire videtur Boscovichius dum ait, *quaestionem de magnitudine et figura Telluris ex mensura graduum non solum absolutam adhuc non esse, sed vix esse inchoatam.*

9) Astronomi Galli anno 1735 in Americam ad aequatorem ablegati in mandatis primum habuere, ut non gradum tantum meridiani, verum etiam aequatoris dimetirentur; post modum perpensis procul dubio difficultatibus, quae tunc temporis mensurae gradus aequatoris officere vel eam incertam reddere potuerunt, injunctum iis fuit, ut definiendae magnitudini solius gradus meridiani operam navarent. Quot perpessi laborum et quanto studio opus hoc ad finem illi perduxerint, legimus in operibus, quae reduces in patriam publici juris fecere. Inter illos *Bouguerus* in opere suo, cui titulus *la figure de la Terre* ea qua par est sagacitate enumerat omnes errores, qui in dimetiendo gradu aequatoris vel illi paralleli possunt committi, et tandem concludit conjunctis omnibus erroribus, si intervallum inter binas stationes interceptum comprehendat duos gradus Longitudinis, cui in tempore respondent $8'$ vel $480''$, atque in qualibet statione aberratum fit uno minuto secundo temporis, integrum errorem in mensura gradus $\frac{1}{240}$ sui partem constituturum, et sexies aut septies majorem errorem commissum iri, quam in mensura arcus meridiani tres gradus comprehendentis.

10) Ratiocinia *Bougueri* judicis in hoc negotio optimi procul dubio recte se habent, si in determinanda differentia meridianorum binarum stationum adhibeatur methodus ab illo proposita et post modum in Gallia a *Cassino* in usum tracta sc. ope signorum terrestrium. Quodsi in definienda Longitudine stationum relativa uti liceat chronometro, quod per sat longum temporis intervallum motu procedat aequabili, cujusmodi sunt illa, quae possident Illustrissimus Comes *de Bruhl* et Celeberr. *Zach*, tunc maxima pars errorum, qui methodum memoratam concomitantur, evanescit, unusque remanet error evitandus, qui committi potest in assignanda meridie ad chronometrum per altitudines Solis correspondentes. Jam vero per experientiam constat momentum meridiei cum certitudine dimidii minuti secundi assignari, adeoque differentiam meridianorum cum certitudine unius minuti secundi, imo etiam, si faveant circumstantiae exactius posse definiri; methodus porro a Bouguero ad exquirendam differentiam meridianorum proposita non permittit, ut stationes inter se majore distent intervallo quam duorum graduum, cum adhibendo chronometrum intervallum earum non modo ad 3 imo etiam 6 aut 8 gradus in regionibus borealibus extendi queat, patet in mensura gradus paralleli errorem inevitabilem ad $\frac{1}{1920}$ partem deprimi posse. Quodsi igitur sub diversis parallelis sat magno intervallo a se remotis mensurentur gradus binorum circulorum aequatori parallelorum ex mutua eorum comparatione ratio diametri aequatoris ad axem Telluris sequenti modo determinabitur.

11) Posita ut ante figura Telluris sphaeroidica sit latitudo paralleli puncto M descripti $= \Phi$ et alterius puncto R descripti $= \psi$, retentis iisdem denominationibus per problema supra propositum habebitur pro latitudine Φ radius paralleli.

$$MQ = \frac{aa \cos \Phi}{\sqrt{(aa \cos \Phi^2 + bb \sin \Phi^2)}}$$

et pro Latitudine ψ radicis paralleli

$$RT = \frac{aa \cos \psi}{\sqrt{(aa \cos \psi^2 + bb \sin \psi^2)}}.$$

Cum arcus eidem numero graduum respondentes teneant rationem radiorum, si gradus paralleli sub Latitudine Φ ponatur $= P$ et sub Latitudine ψ ponatur $= Q$, fiet

$$P : Q = \frac{aa \cos \Phi}{\sqrt{(aa \cos \Phi^2 + bb \sin \Phi^2)}} : \frac{aa \cos \psi}{\sqrt{(aa \cos \psi^2 + bb \sin \psi^2)}}.$$

Unde posito ut ante $b = 1$ et $a = 1 + \delta$ eruitur

$$(1 + \delta)^2 = \frac{QQ \, tag \, \psi^2 - PP \, tag \, \Phi^2}{PP - QQ}.$$

Hinc si daretur magnitudo gradus aequatoris prodiret

$$1 + \delta = \frac{Q \, tag \, \psi}{\sqrt{(PP - QQ)}}.$$

12) Cum in Gallia sub Latitudine 43° . 32′ gradus paralleli ex mensura Cassiniana sit 41618 perticarum Gallicarum, ut hac methodo magnitudo et figura Telluris definiri queat, non aliud superest, quam ut in Latitudine aliqua magis australi aut magis boreali mensuretur itidem gradus paralleli. Regio huic scopo in Imperio Russiae idonea est, quae jacet inter 64 et 65 gradum Latitudinis, ubi super mari albo ad littus meridionale glacie constrictum intervallum 6 circiter gradus paralleli comprehendens commode poterit mensurari, et si tandem aliquando fortuna Astronomis arriserit, atque adhibito chronometro definita fuerit magnitudo gradus aequatoris vel paralleli aequatori propioris, spes est, ut mensuris graduum meridiani adiuti de magnitudine et figura Telluris certius judicium pronunciare queamus. Nam data magnitudine gradus paralleli, ea cum quovis gradu meridiani comparari, atque valor ipsius δ erui poterit.

13) Sit sub Latitudine Φ gradus meridiani $=$ M et in Latitudine ψ gradus paralleli $=$ P, habebitur ex praecedentibus radius in M

$$M\,O = \frac{(1+\delta)^2}{(\sin\Phi^2 + (1+\delta)^2\cos\Phi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et radius paralleli in puncto R

$$R\,T = \frac{(1+\delta)^2\cos\psi}{\sqrt{(\sin\psi^2 + (1+\delta)^2\cos\psi^2)}}.$$

Quam ob rem habebimus

$$M : P = \frac{1}{(\sin\Phi^2 + (1+\delta)^2\cos\Phi^2)^{\frac{3}{2}}} : \frac{\cos\psi}{\sqrt{(\sin\psi^2 + (1+\delta)^2\cos\psi^2)}}.$$

Hic quia tollendo signa radicalia ad aequationem cubicam foret perventum, necessario confugiendum erit ad approximationem, negligendo potestates ipsius δ. Cum igitur sit

$$(1 + 2\delta\cos\Phi^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 - 3\delta\cos\Phi^2$$

$$\text{et } (1 + 2\delta\cos\psi^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \delta\cos\psi^2$$

prodibit

$$M : P = 1 - 3\delta\cos\Phi^2 : \cos\psi - \delta\cos\psi^3.$$

Unde obtinebitur

$$\delta = \frac{P - M\cos\psi}{3P\cos\Phi^2 - M\cos\psi^3}.$$

Quodsi in Latitudine Φ detur gradus paralleli et simul meridiani, tunc nulla adhibita approximatione reperitur

$$(1+\delta)^2 = \frac{P - M\cos\Phi\sin\Phi^2}{M\cos\Phi^3} = 1 + \frac{P - M\cos\Phi}{M\cos\Phi^3}$$

adhibita vero approximatione

$$\delta = \frac{P - M\cos\Phi}{2M\cos\Phi^3}.$$

14) In Gallia sub parallelo 43° . 32′ gradus meridiani inventus est 57048 et paralleli 41618 perticarum gallicarum, unde reperetur $\delta = \frac{1}{163}$, idem vero gradus paralleli collatus cum Peruviano dat $\delta = \frac{1}{116}$, cum gradu Capitis Bonae Spei praebet $\delta = \frac{1}{249}$, et ex combinatione ejusdem cum gradu meridiani Laponiae prodit $\delta = \frac{1}{189}$. Determinationes has tentaminis loco hic subjungo, comparationi aliorum graduum meridiani cum gradu Longitudinis, ut pote non prorsus certo, supersedeo.

SUPPLEMENTUM
AD
THEORIAM LUNAE
EULERIANAM.

Auctore
F. T. SCHUBERT.

Conventui exhibita d. 23 Maji 1799.

§. 1.

Nova theoria motuum lunae nostri quondam illustris *Euleri*, omnes vel minores orbitae lunaris aequationes tam plenarie tamque exacte evolutas exhibet, ut opus hoc, respectu indefessi studii atque laboris autorum non minus quam respectu methodi ingeniosissimae, qua in computandis aequationibus usi sunt, summa laude dignum, tanquam pandectae theoriae lunaris considerari possit. Nemo quidem erit, qui libro illo perlecto non optaverit, ut nulla gravioris saltem momenti aequatio ibidem fuerit omissa, aut ut quaecunque omissa fuerit, formulis Eulerianis adhuc intexi possit. Quare si quis unam alteramve novam loci lunae correctionem formulis Eulerianis addiderit vel ex iisdem deduxerit, is laborem haud inutilem suscepisse merito censendus erit. Saepe quidem, librum hunc pervolventi, formulasque Eulerianas cum recentius inventis comparanti, in mentem mihi incidit,

operae pretium fore investigationem, annon *aequatio longitudinis lunae saecularis*, quam e principiis gravitatis Neutonianis explicare ipse Eulerus frustra conatus fuerat, in formulis, quibus motus lunae a magno illo Geometra definitus erat, jam contineatur ex iisque deduci jam possit, postquam *la Place* vir celeberrimus physicam aequationis hujus causam tam feliciter detexisset. Quum jam satis constet, hanc aequationem e variatione excentricitatis orbitae telluris oriundam, quadrato hujus excentricitatis esse proportionalem, facile cognovi, illam investigationem absolvi non posse, nisi cunctas lunae correctiones in quadratum excentricitatis telluris ductas supputassem, quandoquidem eas autor noster prorsus neglexerat. At calculo nondum peracto animadverti, terminos, qui inde in expressiones ternarum coordinatarum, quas methodus Euleriana suppeditat, ingressuri essent, nonnisi periodicos fore, eoque modo aequationem saecularem erui non posse Verumtamen ipsi termini periodici non videbantur negligendi, idque eo minus, quod correctiones a cubo excentricitatis lunae dependentes aliasque minores diligentissime computaverat celeb. Eulerus, quamvis quadratum excentricitatis solaris duplo fere majus sit cubo excentricitatis lunaris. Libenter itaque calculum satis longum atque taediosum ad finem perduxi, pluresque novas correctiones periodicas loci lunae inveni, formulis Eulerianis addendas, quarum summa ad viginti minuta secunda pervenire potest. Ad aequationem saecularem quod attinet, ejus analysis altius est repetenda, siquidem coordinatae formularum Euleri talis formae ac indolis sunt, ut nonnisi aequationes periodicas exponere possint. Quare non inutile fore theoriae lunae Eulerianae supplementum existimavi, si breviter ostenderim, quomodo aequationes Eulerianae transformandae sint, ut ope methodi a celeb. la Place usitatae aequatio saecularis inde eruatur, idque eo magis, quod facile praevidere licebat, eandem analysin simul ad correctiones loci lunae periodicas haud spernendas esse perducturam. Duplex itaque dissertationis hujus est objectum: aequationes scilicet *periodicae a quadrato excentricitatis telluris* pendentes, nec non aequatio longitudinis lunae *saecu-*

laris ab eodem quadrato ejusque variationibus pendens. Caeterum brevitati consulens, analysin libri Euleriani lectoribus cognitam, ipsumque librum in eorum manibus esse supposui: quamobrem iisdem usus sum characteribus atque literis, ac si argumentum, de quo agitur, ibidem jam fuerit pertractatum, ipsas libri paginas allegabo; dissertationis vero nostrae paragraphi citabuntur.

§. 2. Characteres e libro Euleriano depromti, et in hac dissertatione ubique adhibiti, sunt sequentes.

Distantia media solis a tellure . . $= 1$.

—— vera . . . . . $= u$ (pag. 13.)

—— media lunae a tellure . . $= a$ (pag. 56.)

Excentricitas telluris $= \varkappa$ (pag. 20.).

Anomalia solis media $= t$ (ibid.).

Longitudo lunae media — longit. solis vera — 180° $= \psi$ (pag. 24. conf. pag. 13 et 29.).

Longitudo lunae media — longit. solis media $= p$ (pag. 31.); $\frac{\partial p}{\partial t} = m$ (ibid.).

Binae coordinatae locum lunae in Ecliptica definientes sunt X, Y, quarum prior e centro telluris ad locum lunae medium directa abscinditur ab altera, quae a loco lunae in Ecliptica ad eam normalis est (pag. 23.). Tertiam videlicet ordinatam Z Eclipticae normalem hic negligimus, ubi de longitudine duntaxat quaeritur, siquidem correctio latitudinis lunae a quadrato excentricitatis telluris pendens prorsus est insensibilis. Binae vero novae coordinatae, quas infra introducemus, sunt $x = \frac{X}{a} - 1$, $y = \frac{Y}{a}$ (pag. 56.).

Est denique

$$(m+1)^2 + \tfrac{1}{2} = \lambda \text{ (pag. 71.)},$$

et in numeris absolutis,

$$m = 12,\ 36892 \text{ (pag. 132)};\ \lambda = 179,\ 228928 \text{ (pag. 133)}.$$

§. 3. Nunc ante omnia quantitates evolvendae sunt, quibus in duabus aequationibus fundamentalibus opus habebimus. Quum per naturam ellipsis perque legem Kepleri sit

$$u = 1 + \tfrac{1}{2}\varkappa^2 + \varkappa \cos t - \tfrac{1}{2}\varkappa^2 \cos 2t,$$

neglectis nempe altioribus excentricitatis potestatibus, reperitur

$$\frac{1}{u^3} = 1 - 3\varkappa \cos t + \tfrac{3}{2}\varkappa^2 (1 + 3\cos 2t);$$
$$\frac{1}{u^4} = 1 - 4\varkappa \cos t + \varkappa^2 (3 + 7\cos 2t).$$

Quum praeterea per legem Kepleri sit vera longitudo solis = long. solis media $- 2\varkappa \sin t + \frac{5}{4}\varkappa^2 \sin 2t$, ideoque (§. 2.)

$$\psi = -180° + p + 2\varkappa \sin t - \tfrac{5}{4}\varkappa^2 \sin 2t,$$

reperitur

$$\sin\psi = -\sin(p + 2\varkappa \sin t - \tfrac{5}{4}\varkappa^2 \sin 2t) \quad \text{et}$$
$$\cos\psi = -\cos(p + 2\varkappa \sin t - \tfrac{5}{4}\varkappa^2 \sin 2t);$$

unde quum in genere sit

$$\sin\Phi = \Phi - \frac{\Phi^3}{6} + \text{cet.}, \text{ et } \cos\Phi = 1 - \frac{\Phi^2}{2} + \text{cet.}$$

et productis sinuum per sinus angulorum multiplorum expressis,

$$\sin^2\Phi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\Phi,$$
$$\cos^2\Phi = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\Phi,$$

$$\sin\Phi\cos\omega = \tfrac{1}{2}\sin(\Phi+\omega) + \tfrac{1}{2}\sin(\Phi-\omega),$$
$$\sin\Phi\sin\omega = \tfrac{1}{2}\cos(\Phi-\omega) - \tfrac{1}{2}\cos(\Phi+\omega),$$
$$\cos\Phi\cos\omega = \tfrac{1}{2}\cos(\Phi-\omega) + \tfrac{1}{2}\cos(\Phi+\omega),$$

resultat

$$\sin\psi = -\sin p + \varkappa\sin(p-t) - \varkappa\sin(p+t) + \varkappa^2\sin p - \tfrac{9}{8}\varkappa^2\sin(p-2t) + \tfrac{1}{8}\varkappa^2\sin(p+2t),$$

$$\cos\psi = -\cos p + \varkappa\cos(p-t) - \varkappa\cos(p+t) + \varkappa^2\cos p - \tfrac{9}{8}\varkappa^2\cos(p-2t) + \tfrac{1}{8}\varkappa^2\cos(p+2t),$$

$$\sin\psi\cos\psi = +\tfrac{1}{2}\sin 2p - \varkappa\sin(2p-t) + \varkappa\sin(2p+t) - 2\varkappa^2\sin 2p + \tfrac{13}{8}\varkappa^2\sin(2p-2t) + \tfrac{3}{8}\varkappa^2\sin(2p+2t),$$

$$\sin^2\psi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2p + \varkappa\cos(2p-t) - \varkappa\cos(2p+t) + 2\varkappa^2\cos 2p - \tfrac{13}{8}\varkappa^2\cos(2p-2t) - \tfrac{3}{8}\varkappa^2\cos(2p+2t),$$

$$\cos^2\psi = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2p - \varkappa\cos(2p-t) + \varkappa\cos(2p+t) - 2\varkappa^2\cos 2p + \tfrac{13}{8}\varkappa^2\cos(2p-2t) + \tfrac{3}{8}\varkappa^2\cos(2p+2t),$$

$$\sin^3\psi = -\tfrac{3}{4}\sin p + \tfrac{1}{4}\sin 3p + \tfrac{3}{4}\varkappa\sin(p-t) - \tfrac{3}{4}\varkappa\sin(p+t) - \tfrac{3}{4}\varkappa\sin(3p-t) + \tfrac{3}{4}\varkappa\sin(3p+t) + \tfrac{3}{4}\varkappa^2\sin p - \tfrac{9}{4}\varkappa^2\sin 3p - \tfrac{27}{32}\varkappa^2\sin(p-2t) + \tfrac{3}{32}\varkappa^2\sin(p+2t) + \tfrac{51}{32}\varkappa^2\sin(3p-2t) + \tfrac{21}{32}\varkappa^2\sin(3p+2t),$$

$$\cos^3\psi = -\tfrac{3}{4}\cos p - \tfrac{1}{4}\cos 3p + \tfrac{3}{4}\varkappa\cos(p-t) - \tfrac{3}{4}\varkappa\cos(p+t) + \tfrac{3}{4}\varkappa\cos(3p-t) - \tfrac{3}{4}\varkappa\cos(3p+t) + \tfrac{3}{4}\varkappa^2\cos p + \tfrac{9}{4}\varkappa^2\cos 3p - \tfrac{27}{32}\varkappa^2\cos(p-2t) + \tfrac{3}{32}\varkappa^2\cos(p+2t) - \tfrac{51}{32}\varkappa^2\cos(3p-2t) - \tfrac{21}{32}\varkappa^2\cos(3p+2t),$$

$$\sin^2\psi\cos\psi = -\tfrac{1}{4}\cos p + \tfrac{1}{4}\cos 3p + \tfrac{1}{4}\varkappa\cos(p-t)$$

$$-\tfrac{1}{4}\varkappa\cos(p+t)-\tfrac{3}{4}\varkappa\cos(3p-t)+\tfrac{3}{4}\varkappa\cos(3p+t)$$
$$+\tfrac{1}{4}\varkappa^2\cos p-\tfrac{9}{4}\varkappa^2\cos 3p-\tfrac{9}{32}\varkappa^2\cos(p-2t)$$
$$+\tfrac{1}{32}\varkappa^2\cos(p+2t)+\tfrac{51}{32}\varkappa^2\cos(3p-2t)$$
$$+\tfrac{21}{32}\varkappa^2\cos(3p+2t),$$

$$\sin\psi\cos^2\psi = -\tfrac{1}{4}\sin p-\tfrac{1}{4}\sin 3p+\tfrac{1}{4}\varkappa\sin(p-t)$$
$$-\tfrac{1}{4}\varkappa\sin(p+t)+\tfrac{3}{4}\varkappa\sin(3p-t)-\tfrac{3}{4}\varkappa\sin(3p+t)$$
$$+\tfrac{1}{4}\varkappa^2\sin p+\tfrac{9}{4}\varkappa^2\sin 3p-\tfrac{9}{32}\varkappa^2\sin(p-2t)$$
$$+\tfrac{1}{32}\varkappa^2\sin(p+2t)-\tfrac{51}{32}\varkappa^2\sin(3p-2t)$$
$$-\tfrac{21}{32}\varkappa^2\sin(3p+2t).$$

§. 4. Hisce valoribus substitutis, iisque tantummodo terminis adhibitis, qui quadratum excentricitatis $\varkappa$ continent, quia caeteri in libro Euleriano evoluti jam reperiuntur, nanciscimur

$$\frac{3\cos^2\psi-1}{\varkappa^2 u^3} = -6\cos 2p+\tfrac{39}{8}\cos(2p-2t)+\tfrac{9}{8}\cos(2p+2t)$$
$$+9\cos t\,[\cos(2p-t)-\cos(2p+t)]$$
$$+\tfrac{3}{4}(1+3\cos 2t)(1+3\cos 2p),$$

sive per angulos multiplos producta evolvendo,

$$\frac{3\cos^2\psi-1}{\varkappa^2 u^3} = +\tfrac{3}{4}-\tfrac{15}{4}\cos 2p+\tfrac{9}{4}\cos 2t+\tfrac{51}{4}\cos(2p-2t),$$
$$\frac{3\sin\psi\cos\psi}{\varkappa^2 u^3} = -\tfrac{15}{4}\sin 2p+\tfrac{51}{4}\sin(2p-2t),$$
$$\frac{3\cos\psi(5\cos^2\psi-3)}{2\varkappa^2 u^4} = -\tfrac{9}{4}\cos p+\tfrac{45}{4}\cos 3p-\tfrac{477}{64}\cos(p-2t)$$
$$-\tfrac{99}{64}\cos(p+2t)-\tfrac{1905}{64}\cos(3p-2t)-\tfrac{15}{64}\cos(3p+2t),$$
$$\frac{3\sin\psi(5\cos^2\psi-1)}{\varkappa^2 u^4} = -\tfrac{3}{2}\sin p+\tfrac{45}{2}\sin 3p-\tfrac{159}{32}\sin(p-2t)$$
$$-\tfrac{33}{32}\sin(p+2t)-\tfrac{1905}{32}\sin(3p-2t)-\tfrac{15}{32}\sin(3p+2t),$$

$$\frac{3\cos\psi\,(5\sin^2\psi-1)}{2\varkappa^2 u^4} = -\tfrac{3}{4}\cos p - \tfrac{45}{4}\cos 3p - \tfrac{459}{64}\cos(p-2t)$$
$$-\tfrac{33}{64}\cos(p+2t)+\tfrac{1905}{64}\cos(3p-2t)+\tfrac{15}{64}\cos(3p+2t),$$
$$\frac{3\sin^2\psi-1)}{\varkappa^2 u^3} = +\tfrac{3}{4}+\tfrac{15}{4}\cos 2p+\tfrac{9}{4}\cos 2t-\tfrac{51}{4}\cos(2p-2t),$$
$$\frac{3\sin\psi\,(5\sin^2\psi-3)}{2\varkappa^2 u^4} = -\tfrac{9}{4}\sin p-\tfrac{45}{4}\sin 3p-\tfrac{477}{64}\sin(p-2t)$$
$$-\tfrac{99}{64}\sin(p+2t)+\tfrac{1905}{64}\sin(3p-2t)+\tfrac{15}{64}\sin(3p+2t).$$

§. 5. Quum itaque aequationes Eulerianae fundamentales sint sequentes (pag. 41. 44. 56. 57):

$$\text{I. } 0 = \frac{\partial\partial X}{\partial t^2} - \frac{2(m+1)\partial Y}{\partial t} - (m+1)^2 X + \frac{\lambda a^3 X}{(X^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}} + \mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D},$$
$$\text{II. } 0 = \frac{\partial\partial Y}{\partial t^2} + \frac{2(m+1)\partial X}{\partial t} - (m+1)^2 Y + \frac{\lambda a^3 Y}{(X^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}} + A+B+C+D,$$

si que

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D} = -\frac{X(3\cos^2\psi-1)}{u^3}+\frac{3Y\sin\psi\cos\psi}{u^3}+\frac{3X^2\cos\psi(5\cos^2\psi-3)}{2u^4}$$
$$-\frac{3XY\sin\psi(5\cos^2\psi-1)}{u^4}+\frac{3Y^2\cos\psi(5\sin^2\psi-1)}{2u^4} \text{ (pag. 36),}$$
$$A+B+C+D = \frac{3X\sin\psi\cos\psi}{u^3}-\frac{Y(3\sin^2\psi-1)}{u^3}-\frac{3X^2\sin\psi(5\cos^2\psi-1)}{2u^4}$$
$$+\frac{3XY\cos\psi(5\sin^2\psi-1)}{u^4}-\frac{3Y^2\sin\psi(5\sin^2\psi-3)}{2u^4} \text{ (pag. 37);}$$

et termini $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, A, B, C, D, nonnisi ad primam excentricitatis $\varkappa$ dimensionem sint evolutae: iis adhuc termini $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, et E, F, sunt addendi, quorum $\mathfrak{E}$, E, unicam dimensionem coordinatarum X, Y, continent, $\mathfrak{F}$, F, autem duo dimensiones, utrique vero quadratum excentricitatis $\varkappa$; ac per §. 4. reperitur

$$\mathfrak{E} = -\tfrac{3}{4}\varkappa^2 X\,[1-5\cos 2p+3\cos 2t+17\cos(2p-2t)]$$
$$-\tfrac{3}{4}\varkappa^2 Y\,[5\sin 2p-17\sin(2p-2t)],$$
$$\mathfrak{F} = -\tfrac{3}{4}\varkappa^2 X^2\,[3\cos p-15\cos 3p+\tfrac{159}{16}\cos(p-2t)$$
$$+\tfrac{33}{16}\cos(p+2t)+\tfrac{635}{16}\cos(3p-2t)+\tfrac{5}{16}\cos(3p+2t)]$$
$$+\tfrac{3}{2}\varkappa^2 XY\,[\sin p-15\sin 3p+\tfrac{53}{16}\sin(p-2t)$$

$$+ \tfrac{11}{16}\sin(p+2t) + \tfrac{635}{16}\sin(3p-2t) + \tfrac{5}{16}\sin(3p+2t)]$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa^2 Y^2\ [\cos p + 15\cos 3p + \tfrac{53}{16}\cos(p-2t)$$
$$+ \tfrac{11}{16}\cos(p+2t) - \tfrac{635}{16}\cos(3p-2t) - \tfrac{5}{16}\cos(3p+2t)],$$
$$E = -\tfrac{3}{4}\varkappa^2 X\,[5\sin 2p - 17\sin(2p-2t)]$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa^2 Y\,[1+5\cos 2p+3\cos 2t-17\cos(2p-2t)],$$
$$F = +\tfrac{3}{4}\varkappa^2 X^2\ [\sin p - 15\sin 3p + \tfrac{53}{16}\sin(p-2t)$$
$$+ \tfrac{11}{16}\sin(p+2t) + \tfrac{635}{16}\sin(3p-2t) + \tfrac{5}{16}\sin(3p+2t)]$$
$$- \tfrac{3}{2}\varkappa^2 XY\ [\cos p + 15\cos 3p + \tfrac{53}{16}\cos(p-2t)$$
$$+ \tfrac{11}{16}\cos(p+2t) - \tfrac{635}{16}\cos(3p-2t) - \tfrac{5}{16}\cos(3p+2t)]$$
$$+ \tfrac{3}{4}\varkappa^2 Y^2\ [3\sin p + 15\sin 3p + \tfrac{159}{16}\sin(p-2t)$$
$$+ \tfrac{33}{16}\sin(p+2t) - \tfrac{635}{16}\sin(3p-2t) - \tfrac{5}{16}\sin(3p+2t)].$$

§. 6. Introductis jam novis coordinatis x, y (§. 2.), pars primae aequationi per a divisae addenda, neglecto producto $\varkappa^2 a$, quod quidem ad alius formae aequationem valde exiguam perduceret, fit

$$\frac{\mathfrak{E}+\mathfrak{F}}{a} = \frac{\mathfrak{E}}{a} = \mathfrak{G} = -\tfrac{3}{4}\varkappa^2[1-5\cos 2p+3\cos 2t+17\cos(2p-2t)]$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa^2 x\,[1-5\cos 2p+3\cos 2t+17\cos(2p-2t)]$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa^2 y\,[5\sin 2p - 17\sin(2p-2t)],$$
$$\frac{\mathfrak{E}+\mathfrak{F}}{a} = \frac{\mathfrak{E}}{a} = G = -\tfrac{3}{4}\varkappa^2\,[5\sin 2p - 17\sin(2p-2t)]$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa^2 x\,[5\sin 2p - 17\sin(2p-2t)]$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa^2 y\,[1+5\cos 2p+3\cos 2t-17\cos(2p-2t)].$$

Sicque habemus binas aequationes fundamentales:

I. $0 = \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} + \frac{2(n+1)\partial y}{\partial t} - (m+1)^2(1+x) + \frac{\lambda(1+x)}{[(1+x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}$
$$+ \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}}{a} + \mathfrak{G}\ (\text{pag. } 57),$$

II. $0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + \frac{2(m+1)\partial x}{\partial t} - (m+1)^2 y + \frac{\lambda y}{[(1+x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}$
$+ \frac{A+B+C+D}{a} + G$ (pag. 58).

§. 7. Ex his aequationibus eliciendi sunt termini incogniti a quadrato excentricitatis $\varkappa$ pendentes, qui in expressiones coordinatarum x, y, ingrediuntur, quosque appellemus $\varkappa^2 \mathfrak{V}$ et $\varkappa^2 V$. Ex analysi calculi perturbationum satis constat, istos terminos cum terminis absolutis, iisque qui a simplice excentricitate $\varkappa$ pendent, ab Eulero $\mathfrak{O}$, O, et $\varkappa \mathfrak{U}$, $\varkappa U$, dictis, esse combinandos; caeteros autem terminos, ab excentricitate vel inclinatione lunae pendentes cum terminis $\varkappa^2 \mathfrak{V}$, $\varkappa^2 V$, nullo modo cohaerere, neque in eorum determinationem influere, quoniam ex eorum combinatione novi termini a producto utriusque excentricitatis pendentes orirentur, quas hic non consideramus. Habemus itaque sequentes expressiones

$$x = \mathfrak{O} + \varkappa \mathfrak{U} + \varkappa^2 \mathfrak{V} \text{ et } y = O + \varkappa U + \varkappa^2 V \text{ (pag. 108).}$$

Quare quoque in aequationibus (pag. 74. 75), ubi quantitates $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, etc. A, B, etc. jam evolutae sunt, nonnisi terminorum absolutorum, eorumque qui ab excentricitate $\varkappa$ pendent, rationem habere oportet; in prioribus autem ultra quartam coordinatarum x, y, dimensionem progredi non opus est, quia valores literarum $\mathfrak{O}$, O, ad centesimam unitatis partem vix perveniunt, ideoque tertiam earum potestatem omnino negligere licet. Adipiscimur itaque binas aequationes fundamentales (pag. 74. 75):

I. $0 = \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} - \frac{2(m+1)\partial y}{\partial t} - 3\lambda x - \frac{3}{2} x \cos 2p + \frac{3}{2} y \sin 2p$
$+ 3\lambda x^2 - \frac{3}{2}\lambda y^2 - 4\lambda x^3 + 6\lambda x y^2 + 5\lambda x^4 - 15\lambda x^2 y^2 + \frac{15}{8}\lambda y^4$
$+ \frac{3}{4}\varkappa(1+x)(2\cos t + 7\cos(2p-t) - \cos(2p+t))$
$- \frac{3}{4}\varkappa y(7\sin(2p-t) - \sin(2p+t)) + \mathfrak{G},$

II. $0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + \frac{2(m+1)\partial x}{\partial t} + \frac{3}{2} x \sin 2p + \frac{3}{2} y \cos 2p$
$- 3\lambda x y + 6\lambda x^2 y - \frac{3}{2}\lambda y^3 - 10\lambda x^3 y + \frac{15}{2}\lambda x y^3$

$$-\tfrac{3}{4}\varkappa(1+x)(7\sin(2p-t)-\sin(2p+t))$$
$$+\tfrac{3}{4}\varkappa y(2\cos t-7\cos(2p-t)+\cos(2p+t))+G,$$

(conf. §. 6).

§. 8. Methodus Euleri, aequationes istas solvendi, in eo consistit, quod termini utriusque aequationis *principales*, h. e. qui neque angulum neque altiores coordinatarum potestates continent, a caeteris annexis separari vel prorsus omitti possunt, modo sequens regula integrandi observetur. Nuncupatis nempe terminis annexis $\mathfrak{Z}$ et Z, ut binae aequationes sint

$$0 = \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} - \frac{2(m+1)\partial y}{\partial t} - 3\lambda x + \mathfrak{Z} \quad \text{et}$$
$$0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + \frac{2(m+1)\partial x}{\partial t} + Z,$$

supponamus, quantitates $\mathfrak{Z}$ et Z evolutas praebuisse terminos $\mathfrak{M}\cos\omega$ et $M\sin\omega$, sitque $\partial\omega = \mu\partial t$: necessario inde nascentur in expressione coordinatarum termini ejusdem formae, puta $x = \mathfrak{N}\cos\omega$ et $y = N\sin\omega$, quibus substitutis, binae aequationes hanc induunt formam

$$0 = -\mathfrak{N}\mu^2 - 2(m+1)N\mu - 3\lambda\mathfrak{N} + \mathfrak{M} \text{ et}$$
$$0 = -N\mu^2 - 2(m+1)\mathfrak{N}\mu + M,$$

unde ob $\lambda = (m+1)^2 + \frac{1}{2}$ (§. 2.), coëfficientes $\mathfrak{N}$, N, ita determinantur:

$$\mathfrak{N} = \frac{\frac{2(m+1)}{\mu}M - \mathfrak{M}}{\lambda - 2 - \mu^2} \text{ et } N = \frac{M}{\mu^2} - \frac{2(m+1)}{\mu}\mathfrak{N}.$$

Quodsi evolutio termini $\mathfrak{Z}$ perducit ad terminum constantem $\mathfrak{M}$, cui similis in Z non reperitur, habemus $\mathfrak{M}\cos\omega = \mathfrak{M}$, $M\sin\omega = 0$, unde sequitur $\omega = 0$, $\mu = 0$, $M = 0$, ideoque $0 = -3\lambda\mathfrak{N} + \mathfrak{M}$, h. e. $\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{M}}{3\lambda}$ et $N = 0$ (Cap. XII.).

§. 9. Suppositis itaque hisce formulis pro eruendis coëfficientibus $\mathfrak{N}$, N, e terminis $\mathfrak{M}$, M, similibus, terminis principalibus non amplius opus est, unde loco $\mathfrak{G}$, G, earum valoribus substitutis (§. 6.), aequationes nostrae fiunt (§. 7.)

$$\begin{aligned}
\text{I. } 0 = &- \tfrac{3}{2} x \cos 2p + \tfrac{3}{2} y \sin 2p + 3\lambda x^2 - \tfrac{3}{2}\lambda y^2 - 4\lambda x^3 \\
&+ 6\lambda x y^2 + 5\lambda x^4 - 15\lambda x^2 y^2 + \tfrac{15}{8}\lambda y^4 \\
&+ \tfrac{3}{4}\varkappa (1+x)(2\cos t + 7\cos(2p-t) - \cos(2p+t)) \\
&- \tfrac{3}{4}\varkappa y (7\sin(2p-t) - \sin(2p+t)) \\
&- \tfrac{3}{4}\varkappa^2 (1+x)(1 - 5\cos 2p + 3\cos 2t + 17\cos(2p-2t)) \\
&- \tfrac{3}{4}\varkappa^2 y (5\sin 2p - 17\sin(2p-2t));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II. } 0 = &+ \tfrac{3}{2} x \sin 2p + \tfrac{3}{2} y \cos 2p - 3\lambda x y \\
&+ 6\lambda x^2 y - \tfrac{3}{2}\lambda y^3 - 10\lambda x^3 y + \tfrac{15}{2}\lambda x y^3 \\
&- \tfrac{3}{4}\varkappa (1+x)(7\sin(2p-t) - \sin(2p+t)) \\
&+ \tfrac{3}{4}\varkappa y (2\cos t - 7\cos(2p-t) + \cos(2p+t)) \\
&- \tfrac{3}{4}\varkappa^2 (1+x)(5\sin 2p - 17\sin(2p-2t)) \\
&- \tfrac{3}{4}\varkappa^2 y (1 + 5\cos 2p + 3\cos 2t - 17\cos(2p-2t)).
\end{aligned}$$

§. 10. Ponamus jam compendii causa

$$\begin{aligned}
&- \tfrac{3}{2}\cos 2p + 6\lambda\mathfrak{O} - 12\lambda\mathfrak{O}^2 + 6\lambda O^2 = \mathfrak{A}, \\
&+ \tfrac{3}{2}\sin 2p - 3\lambda O + 12\lambda\mathfrak{O}O = \mathfrak{B}, \\
&+ 3\lambda - 12\lambda\mathfrak{O} + 30\lambda\mathfrak{O}^2 - 15\lambda O^2 = \mathfrak{C}, \\
&+ 12\lambda O - 60\lambda\mathfrak{O}O = \mathfrak{D}, \\
&- \tfrac{3}{2}\lambda + 6\lambda\mathfrak{O} - 15\lambda\mathfrak{O}^2 + \tfrac{45}{2}\lambda O^2 = \mathfrak{E}, \\
&+ \tfrac{3}{2}\cos t + \tfrac{21}{4}\cos(2p-t) - \tfrac{3}{4}\cos(2p+t) = \mathfrak{F},
\end{aligned}$$

$$+\tfrac{3}{4}\sin(2p+t)-\tfrac{21}{4}\sin(2p+t)=\mathfrak{G},$$
$$+\tfrac{3}{4}-\tfrac{15}{4}\cos 2p+\tfrac{9}{4}\cos 2t+\tfrac{51}{4}\cos(2p-2t)=\mathfrak{H},$$
$$+\tfrac{15}{4}\sin 2p-\tfrac{51}{4}\sin(2p-2t)=\mathfrak{K},$$
$$+\tfrac{3}{2}\cos 2p-3\lambda\mathfrak{D}+6\lambda\mathfrak{D}^2-\tfrac{9}{2}\lambda C^2=B,$$
$$+\tfrac{3}{2}\cos t-\tfrac{21}{4}\cos(2p-t)+\tfrac{3}{4}\cos(2p+t)=G,$$
$$+\tfrac{3}{4}+\tfrac{15}{4}\cos 2p+\tfrac{9}{4}\cos 2t-\tfrac{51}{4}\cos(2p-2t)=H.$$

Deinde in aequationibus I, II, (§. 9.) substitutis valoribus (§. 7.) $x=\mathfrak{O}+\varkappa\mathfrak{U}+\varkappa^2\mathfrak{V}$, $y=O+\varkappa U+\varkappa^2 V$, iisque tantummodo terminis asservatis, qui $\varkappa^2$ continent, sequentes aequationes, divisione per $\varkappa^2$ instituta nanciscemur:

I. $o=\mathfrak{A}\mathfrak{V}+\mathfrak{B}V+\mathfrak{C}\mathfrak{U}^2+\mathfrak{D}\mathfrak{U}U+\mathfrak{E}U^2+\mathfrak{F}\mathfrak{U}+\mathfrak{G}U-\mathfrak{H}(1+\mathfrak{O})-\mathfrak{K}O$,

II. $o=\mathfrak{B}\mathfrak{V}+BV+\frac{1}{2}\mathfrak{D}\mathfrak{U}^2+2\mathfrak{E}\mathfrak{U}U-\frac{3}{8}\mathfrak{D}U^2+\mathfrak{G}\mathfrak{U}+GU-\mathfrak{K}(1+\mathfrak{O})-HO$;

e quibus ope cognitarum λ, $\mathfrak{O}$, O, $\mathfrak{U}$, U, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, etc. B, etc. binae incognitae $\mathfrak{V}$, V, determinandae sunt: quem in finem quantitates datas numeris absolutis exprimere jam oportet.

§. 11. Ab Eulero jam computatae fuerunt quantitates sequentes:

$\lambda = 179,228928$ (pag. 73),

$\mathfrak{O} = +0,000024-0,00718\cos 2p+0,000006\cos 4p$ (pag. 139),

$O = +0,0102117\sin 2p+0,0000057\sin 4p$ (ibid.),

$\mathfrak{A} = +0,0264388-9,2212908\cos 2p-0,1050568\cos 4p$ (pag. 140 conf. pag. 124),

$\mathfrak{B} = -3,9906964\sin 2p-0,0819104\sin 4p$ (ibid.),

$\mathfrak{C} = +537,6335924+15,4425816\cos 2p+0,2658681\cos 4p$ (ibid.),

$\mathfrak{D} = +21,9627856\sin 2p+0,4064872\sin 4p$ (ibid.),

$\mathfrak{E} = -268,7817528 - 7,72129 \cos 2p - 0,1679774 \cos 4p$ (ib.),
$\mathfrak{B} = -0,0272367 + 5,3606454 \cos 2p + 0,0665457 \cos 4p$ (ib.).

Praeterea sequentes supputavimus quantitates

$$\mathfrak{H}(1+\mathfrak{D}) = +0,76348 - 3,755486 \cos 2p + 0,013467 \cos 4p - 0,00001 \cos 6p + 2,2042815 \cos 2t + 12,7422285 \cos(2p - 2t) - 0,008042 \cos(2p + 2t) - 0,045766 \cos(4p - 2t) + 0,000006 \cos(4p + 2t) + 0,000036 \cos(6p - 2t),$$

$$\mathfrak{K}\mathfrak{O} = +0,0191775 + 0,0000112 \cos 2p - 0,0191775 \cos 4p - 0,0000112 \cos 6p - 0,0652035 \cos 2t - 0,0000382 \cos(2p + 2t) + 0,0652035 \cos(4p - 2t) + 0,0000382 \cos(6p - 2t),$$

$$\mathfrak{K}(1+\mathfrak{D}) = +3,75008 \sin 2p - 0,0134625 \sin 4p + 0,00001 \sin 6p - 0,0457725 \sin 2t - 12,750306 \sin(2p - 2t) + 0,000036 \sin(2p + 2t) + 0,0457725 \sin(4p - 2t) - 0,000036 \sin(6p - 2t),$$

$$\mathfrak{HO} = +0,0076822 \sin 2p + 0,019182 \sin 4p + 0,0000112 \sin 6p - 0,0652035 \sin 2t + 0,0115065 \sin(2p - 2t) + 0,0114683 \sin(2p + 2t) - 0,0651968 \sin(4p - 2t) + 0,0000067 \sin(4p + 2t) - 0,0000382 \sin(6p - 2t).$$

§. 12. Assumsimus praeterea e libro Euleriano (pag. 323)

$$\mathfrak{u} = -0,006829 \cos t + 0,029397 \cos(2p - t) - 0,003452 \cos(2p + t) + 0,000046 \cos(4p - t) - 0,000004 \cos(4p + t),$$

$$\mathfrak{U} = +0,190587 \sin t - 0,043312 \sin(2p - t) + 0,005525 \sin(2p + t) - 0,000143 \sin(4p - t) + 0,000005 \sin(4p + t);$$

unde sequentes quantitates computavimus

$$\mathfrak{u}' = +0,0004613 - 0,0000855 \cos 2p - 0,0000507 \cos 4p - 0,0000274 \cos 2t - 0,0001004 \cos(2p - 2t) + 0,0000148 \cos(2p + 2t) + 0,0004321 \cos(p - 2t) + 0,0000059 \cos(4p + 2t),$$

$$\mathfrak{U}U = +0,0032572 \sin 2p + 0,0001603 \sin 4p - 0,0006443 \sin 2t - 0,0026534 \sin (2p - 2t) - 0,0003478 \sin (2p + 2t) - 0,0006410 \sin (4p - 2t) - 0,0000095 \sin (4p + 2t),$$

$$U^2 = +0,0191149 + 0,0046569 \cos 2p + 0,0001333 \cos 4p - 0,0182813 \cos 2t - 0,0041273 \cos (2p - 2t) - 0,0005265 \cos (2p + 2t) - 0,0009516 \cos (4p - 2t) - 0,0000152 \cos (4p + 2t),$$

$$\mathfrak{U}^2 = +0,2473435 - 0,0392358 \cos 2p - 0,0278166 \cos 4p - 0,0153340 \cos 2t - 0,0508408 \cos (2p - 2t) + 0,0077989 \cos (2p + 2t) + 0,2315321 \cos (4p - 2t) + 0,0033179 \cos (4p + 2t),$$

$$\mathfrak{D}UU = +0,0358012 + 0,0024223 \cos 2p - 0,0357686 \cos 4p - 0,0017603 \cos 6p - 0,0330895 \cos 2t - 0,0141850 \cos (2p - 2t) + 0,0064313 \cos (2p + 2t) + 0,0290070 \cos (4p - 2t) + 0,0039506 \cos (4p + 2t),$$

$$\mathfrak{E}U^2 = -5,1557245 - 1,4001866 \cos 2p - 0,0570181 \cos 4p - 0,0009057 \cos 6p + 4,9317261 \cos 2t + 1,1836522 \cos (2p - 2t) + 0,2124958 \cos (2p + 2t) + 0,2732422 \cos (4p - 2t) + 0,0076704 \cos (4p + 2t),$$

$$\mathfrak{F}\mathfrak{U} = +0,0073340 + 0,0004216 \cos 2p - 0,0020054 \cos 4p - 0,0025207 \cos 2t + 0,0004104 \cos (2p - 2t) - 0,0000039 \cos (2p + 2t) + 0,0077202 \cos (4p - 2t) + 0,0001292 \cos (4p + 2t),$$

$$\mathfrak{G}U = +0,0015487 \sin 2p + 0,0020085 \sin 4p + 0,0001962 \sin 2t + 0,0017908 \sin (2p - 2t) - 0,0002571 \sin (2p + 2t) - 0,0077167 \sin (4p - 2t) + 0,0001294 \sin (4p + 2t),$$

$$\mathfrak{G}U = +0,115766 + 0,572138\cos 2p + 0,030745\cos 4p + 0,000054\cos 6p - 0,030758\cos 2t - 0,500344\cos(2p-2t) - 0,071470\cos(2p+2t) - 0,113694\cos(4p-2t) - 0,002072\cos(4p+2t),$$

$$\mathfrak{G}U = -0,599724\sin 2p - 0,030849\sin 4p + 0,144679\sin 2t + 0,467753\sin(2p-2t) + 0,075601\sin(2p+2t) + 0,113587\sin(4p-2t) + 0,002076\sin(4p+2t),$$

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{D}U^2 = +0,0053343\sin 2p - 0,0003757\sin 4p - 0,0002873\sin 6p - 0,0005893\sin 2t - 0,0025216\sin(2p-2t) - 0,0022874\sin(2p+2t) - 0,0005539\sin(4p-2t) + 0,0000787\sin(4p+2t),$$

$$2\mathfrak{E}U = -1,7516434\sin 2p - 0,1113212\sin 4p - 0,0017836\sin 6p + 0,3284438\sin 2t + 1,4262868\sin(2p-2t) + 0,1915673\sin(2p+2t) + 0,3649576\sin(4p-2t) + 0,0079200\sin(4p+2t),$$

$$\tfrac{3}{8}\mathfrak{D}U^2 = +0,1572371\sin 2p + 0,0220909\sin 4p + 0,0009038\sin 6p - 0,0148997\sin 2t - 0,0714042\sin(2p-2t) - 0,0755346\sin(2p+2t) - 0,0183898\sin(4p-2t) - 0,0035614\sin(4p+2t).$$

§. 13. Hinc singulis terminis homogeneis in unum collectis, ac posito brevitatis causa

$5,4661313 = b$;	$2,8948287 = c$;	$0,1042018 = d$;
$0,0025908 = e$;	$2,6882596 = f$;	$12,1198421 = g$;
$0,1632972 = h$;	$0,4778518 = k$;	$0,0141529 = l$;
$6,2455454 = \mathfrak{b}$;	$0,1502713 = \mathfrak{c}$;	$0,0029959 = \mathfrak{d}$;
$0,6003712 = \mathfrak{e}$;	$14,7196300 = \mathfrak{f}$;	$0,3263402 = \mathfrak{g}$;
$0,4386378 = \mathfrak{h}$;	$0,0123354 = \mathfrak{k}$;	

aequationes superiores (§. 10.) in sequentes transformabuntur:

$$\text{I. } 0 = \mathfrak{A}\mathfrak{V} + \mathfrak{B}V - b + c\cos 2p - d\cos 4p - e\cos 6p + f\cos 2t - g\cos(2p-2t) + h\cos(2p+2t) + k\cos(4p-2t) + l\cos(4p+2t);$$

$$\text{II. } 0 = \mathfrak{B}\mathfrak{V} + BV - \mathfrak{b}\sin 2p - \mathfrak{c}\sin 4p - \mathfrak{d}\sin 6p + \mathfrak{e}\sin 2t + \mathfrak{f}\sin(2p-2t) + \mathfrak{g}\sin(2p+2t) + \mathfrak{h}\sin(4p-2t) + \mathfrak{k}\sin(4p+2t).$$

§. 14. Quo termini incogniti $\mathfrak{A}\mathfrak{V} + \mathfrak{B}V$ et $\mathfrak{B}\mathfrak{V} + BV$ cum caeteris juncti evanescere possint, necessario similem formam, h. e. eosdem angulos pro argumentis habere debent: quapropter sequentes formas assumere oportet:

$$\mathfrak{V} = \alpha + \beta\cos 2p + \gamma\cos 4p + \delta\cos 2t + \varepsilon\cos(2p-2t) + \zeta\cos(2p+2t) + \eta\cos(4p-2t) + \vartheta\cos(4p+2t),$$

$$V = \nu\sin 2p + \varpi\sin 4p + \varrho\sin 2t + \sigma\sin(2p-2t) + \tau\sin(2p+2t) + \xi\sin(4p-2t) + \psi\sin(4p+2t).$$

Unde, valoribus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, B (§. 11.) substitutis, et compendii causa positis numeris

0 , 0264388 = (1); 4 , 6106454 = (2); 0 , 0525284 = (3);
1 , 9953482 = (4); 0 , 0409552 = (5); 9 , 2212908 = (6);
0 , 1050568 = (7); 3 , 9906964 = (8); 0 , 0272367 = (9);
2 , 6803227 = (10); 0 , 0332728 = (11); 0 , 0819104 = (12);

reperitur

$$\mathfrak{A}\mathfrak{V} + \mathfrak{B}V = +\alpha(1) - \beta(2) - \gamma(3) - \nu(4) - \varpi(5) + [-\alpha(6) + \beta(1) - \beta(3) - \gamma(2) - \nu(5) - \varpi(4)]\cos 2p + [-\alpha(7) - \beta(2) + \gamma(1) + \nu(4)]\cos 4p$$

$$+ [-\beta(3) - \gamma(2) + \nu(5) + \pi(4)] \cos 6p$$
$$+ [\delta(1) - \varepsilon(2) - \zeta(2) - \eta(3) - \vartheta(3) - \sigma(4) - \tau(4)$$
$$- \xi(5) - \psi(5)] \cos 2t$$
$$+ [-\delta(2) + \varepsilon(1) - \zeta(3) - \eta(2) - \varrho(4) - \tau(5) - \xi(4)] \cos(2p - 2t)$$
$$+ [-\delta(2) - \varepsilon(3) + \zeta(1) - \vartheta(2) + \varrho(4) - \sigma(5) - \psi(4)] \cos(2p + 2t)$$
$$+ [-\delta(3) - \varepsilon(2) + \eta(1) - \varrho(5) + \sigma(4)] \cos(4p - 2t)$$
$$+ [-\delta(3) - \zeta(2) + \vartheta(1) + \varrho(5) + \tau(4)] \cos(4p + 2t);$$

$$\mathfrak{BV} + BV = + [-\alpha(8) - \beta(5) + \gamma(4) - \nu(9) - \nu(11) + \pi(10)] \sin 2p$$
$$+ [-\alpha(12) - \beta(4) + \nu(10) - \pi(9)] \sin 4p$$
$$+ [-\beta(5) - \gamma(4) + \nu(11) + \pi(10)] \sin 6p$$
$$+ [-\varepsilon(4) + \zeta(4) - \eta(5) + \vartheta(5) - \varrho(9) - \sigma(10) + \tau(10)$$
$$- \xi(11) + \psi(11)] \sin 2t$$
$$+ [-\delta(4) - \zeta(5) - \varrho(10) - \sigma(9) - \tau(11) + \xi(10)] \sin(2p - 2t)$$
$$+ [-\delta(4) - \varepsilon(5) + \varrho(10) + \sigma(11) - \tau(9) + \psi(10)] \sin(2p + 2t)$$
$$+ [-\delta(5) - \varepsilon(4) + \eta(4) - \varrho(11) + \sigma(10) - \xi(9)] \sin(4p - 2t)$$
$$+ [-\delta(5) - \zeta(4) + \vartheta(4) + \varrho(11) + \tau(10) - \psi(9)] \sin(4p + 2t).$$

Hisce valoribus in aequationibus (§. 13.) substitutis, omnes earum coëfficientes determinati sunt, quamobrem nihil jam restat, nisi ut quantitatum incognitarum α, β, etc. valores numerici computentur.

SUPPLEMENTI
AD
THEORIAM LUNAE
EULERIANAM.
CONTINUATIO.

Auctore
F. T. SCHUBERT.

Conventui exhibita d. 30 Jan. 1800.

§. 15.

In prima dissertatione de hoc objecto, Academiae a me praelecta, aequationes, quarum ope coëfficientes incogniti novae aequationis lunae determinandi sunt, plenarie jam fuerant evolutae. Forma harum aequationum docet, terminos qui nonnisi angulum p continent, h. e. α, β, γ, ν, π, seorsim tractari posse, non minus quam caeteros, δ, ε, ϱ, σ, etc. quorum argumenta angulus etiam t ingreditur. Si jam valores $\mathfrak{A}\mathfrak{V} + \mathfrak{B}\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{B}\mathfrak{V} + \mathrm{BV}$ (§. 14.) in aequationibus I, II (§. 13.), substituuntur, terminus primae aequationis constans, quem supra (§. 8.) $\mathfrak{M}$ appellavimus, est

$$\mathfrak{M} = +\alpha(1) - \beta(2) - \gamma(3) - \nu(4) - \pi(5) - b;$$

unde sequitur, terminum constantem abscissae x, quem supra (§. 8.) $\mathfrak{N}$ appellavimus, quemque hic (§. 14.) posuimus $= \alpha$, esse $= \frac{\mathfrak{N}}{3\lambda}$ (§. 8.), h. e. $\alpha = \frac{\mathfrak{N}}{3\lambda}$, unde nascitur aequatio:

1) $0 = +b + 3\lambda\alpha - \alpha(1) + \beta(2) + \gamma(3) + \nu(4) + \pi(5)$.

§. 16. Eodem modo reperitur coëfficiens cos $2p$ in aequatione I (§. 13.) sive

$$\mathfrak{M} = -\alpha(6) + \beta(1) - \beta(3) - \gamma(2) - \nu(5) - \pi(4) + c,$$

et coëfficiens sin $2p$ in aequatione II, sive

$$M = -\alpha(8) - \beta(5) + \gamma(4) - \nu(9) - \nu(11) + \pi(10) - b.$$

Quare quum hic sit (§. 8.) $\omega = 2p$, ideoque $\frac{\partial\omega}{\partial t} = \mu = 2m$ (§. 2.), sequitur, coëfficientes cos $2p$ et sin $2p$ in coordinatis x et y, quos supra $\mathfrak{N}$, N, hic autem β, ν, nuncupavimus (§. 8. 14.), esse

$$\mathfrak{N} = \beta = \frac{\frac{m+1}{m}M - \mathfrak{M}}{\lambda - 2 - 4m^2} \text{ et } N = \nu = \frac{M}{4m^2} - \frac{m+1}{m}\beta.$$

Nanciscimur itaque has binas aequationes:

$$\beta m(\lambda - 2 - 4m^2) = M + m(M - \mathfrak{M}) \text{ et}$$
$$4m^2\nu = M - 4\beta m(m+1), \text{ h. e.}$$

2) $0 = b + \alpha(8) + \beta(5) - \gamma(4) + \nu(9) + \nu(11) - \pi(10)$
$+ m[c + b + \alpha((8) - (6)) + \beta((1) - (3) + (5)) - \gamma((2) + (4))$
$+ \nu((9) + (11) - (5)) - \pi((4) + (10))] + \beta m(\lambda - 2 - 4m^2)$,

3) $0 = + b + \alpha(8) + \beta[(5) + 4m(m+1)] - \gamma(4)$
$+ \nu[(9) + (11) + 4m^2] - \pi(10)$.

§. 17. Est denique coëfficiens cos $4p$ in aequatione I, seu

$$\mathfrak{M} = -\alpha(7) - \beta(2) + \gamma(1) + \nu(4) - d,$$

et coëfficiens sin $4p$ in aequatione II, vel

$$M = -\alpha(12) - \beta(4) + \nu(10) - \pi(9) - c.$$

Quapropter quum hocce casu sit angulus $\omega = 4p$, ideoque $\mu = 4m$, coëfficientes cos $4p$ et sin $4p$ in coordinatis x et y, quos supra $\mathfrak{N}$, N, hic autem, γ, π, vocavimus, ita determinantur (§. 8),

$$\gamma = \mathfrak{N} = \frac{\frac{m+1}{2m}\mathrm{M} - \mathfrak{M}}{\lambda - 2 - 16m^2} \text{ et } \pi = \mathrm{N} = \frac{\mathrm{M}}{16m^2} - \frac{m+1}{2m}\gamma:$$

unde resultant aequationes

$$0 = 2\gamma m(\lambda - 2 - 16m^2) - \mathrm{M} + m(2\mathfrak{M} - \mathrm{M}), \text{ et}$$
$$0 = 16\pi m^2 - \mathrm{M} + 8\gamma m(m+1), \text{ h. e.}$$

4) $0 = +\mathfrak{c} + \alpha(12) + \beta(4) - \nu(10) + \pi(9)$
$+ m[\mathfrak{c} - 2d + \alpha((12) - 2(7)) + \beta((4) - 2(2))$
$+ 2\gamma((1) + \lambda - 2 - 16m^2) + \nu(2(4) - (10)) + \pi(9)]$,

5) $0 = +\mathfrak{c} + \alpha(12) + \beta(4) + 8\gamma m(m+1) - \nu(10) + \pi[(9) + 16m^2]$.

§. 18. Harum quinque aequationum ope quo determinentur quinque incognitae α, β, γ, ν, π, in iis loco λ, m (§. 2.), b, c, d, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ (§. 13.), caeterorumque coëfficientium (§. 14.), valores eorum absolutos substituere oportet, unde sequentes oriuntur aequationes:

1) $0 = +5,4661313 + \alpha \cdot 537,660345 + \beta \cdot 4,6106454$
$+ \nu \cdot 1,9953482 + \gamma \cdot 0,0525284 + \pi \cdot 0,0409552$;

2) $0 = +119,302118 - \alpha \cdot 60,706118 - \beta \cdot 5376,9389$
$+ \nu \cdot 0,3023751 - \gamma \cdot 83,704848 - \pi \cdot 60,513323$;

3) $0 = +6,2455454 + \alpha \cdot 3,9906964 + \beta \cdot 661,47726$
$+ \nu \cdot 612,02135 - \gamma \cdot 1,9953482 - \pi \cdot 2,6803227$;

4) $0 = +0,5687625 + \alpha \cdot 1,5038251 + \beta \cdot 87,381752 - \nu \cdot 13,527584 + \gamma \cdot 56169,436 - \pi \cdot 0,3641252;$

5) $0 = +0,1502713 + \alpha \cdot 0,0819104 + \beta \cdot 1,9953482 - \nu \cdot 2,6805227 + \gamma \cdot 1322,8727 + \pi \cdot 2447,8706.$

§. 19. Postrema aequatio dat

$$\pi = -0,0000614 - \alpha \cdot 0,0000335 - \beta \cdot 0,0008151 + \nu \cdot 0,0010950 - \gamma \cdot 0,5404177;$$

quo valore substituto quarta aequatio praebet

$$\gamma = -0,0000101 - \alpha \cdot 0,0000268 - \beta \cdot 0,0015557 + \nu \cdot 0,0002408.$$

Hinc e tertia aequatione fit

$$\nu = -0,0102051 - \alpha \cdot 0,0065207 - \beta \cdot 1,0808180;$$

unde e secunda aequatione reperitur

$$\beta = +0,0221876 - \alpha \cdot 0,0112895;$$

et prima praebet

$$\alpha = -0,0102307.$$

Regrediendo jam a prima inde ad quintam aequationem, valoresque modo repertos in aequatione consequente substituendo, sequentes nanciscimur valores absolutos:

$$\alpha = -0,0102307; \quad \beta = +0,0223031;$$

$$\nu = -0,0342440; \quad \gamma = -0,0000527; \quad \pi = -0,0000883.$$

§. 20. Modo prorsus simili coëfficientes δ, ε, ε, σ, etc. computantur. Est nempe (§. 13. 14.) coëfficiens $\cos 2t$ in aequatione I, sive

$$\mathfrak{M} = +\delta\,(1) - \varepsilon\,(2) - \zeta\,(2) - \eta\,(3) - \vartheta\,(3) - \sigma(4) - \tau(4) - \xi\,(5) - \psi\,(5) + f,$$

et coëfficiens sin $2t$ in aequatione II, sive

$$\mathrm{M} = -\varepsilon\,(4) + \zeta(4) - \eta(5) + \vartheta(5) - \varrho(9) - \sigma\,(10) + \tau\,(10) - \xi\,(11) + \psi\,(11) + \mathfrak{e},$$

est porro $\omega = 2t$, $\frac{\partial\omega}{\partial t} = \mu = 2$; unde fit (§. 8.) coëfficiens cos $2t$ in abscissa x, seu

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{d} = \frac{(m+1)\,\mathrm{M} - \mathfrak{M}}{\lambda - 6},$$

et coëfficiens sin $2t$ in ordinata y, h. e.

$$\mathrm{N} = \varrho = \frac{\mathrm{M}}{4} - (m+1)\,\delta.$$

Unde sequentes nascuntur aequationes

1) $$0 = +f - (m+1)\,\mathfrak{e} + \delta\,[\lambda - 6 + (1)] + \varepsilon\,[(m+1)(4) - (2)] - \zeta\,[(m+1)\,(4) + (2)] + \eta\,[(m+1)\,(5) - (3)] - \vartheta\,[(m+1)\,(5) + (3)] + \varrho\,(m+1)(9) + \sigma\,[(m+1)(10) - (4)] - \tau\,[(m+1)\,(10) + (4)] + \xi\,[(m+1)\,(11) - (5)] - \psi\,[(m+1)\,(11) + (5)];$$

2) $$0 = -\mathfrak{e} + 4\delta\,(m+1) + \varepsilon\,(4) - \zeta\,(4) + \eta\,(5) - \vartheta\,(5) + \varrho\,[4 + (9)] + \sigma\,(10) - \tau\,(10) + \xi\,(11) - \psi\,(11).$$

§. 21. Coëfficiens cos $(2p - 2t)$ est

$$\mathfrak{M} = -\delta(2) + \varepsilon(1) - \zeta(3) - \eta(2) - \varrho(4) - \tau(5) - \xi(4) - g,$$

et coëfficiens sin $(2p - 2t)$ vel

$$\mathrm{M} = -\delta(4) - \zeta(5) - \varrho(10) - \sigma(9) - \tau(11) + \xi(10) + \mathfrak{f}.$$

Praeterea est $\omega = 2p - 2t$, ideoque $\mu = \frac{2\partial p}{\partial t} - 2 = 2(m-1)$, unde coëfficientes ejusdem argumenti in coordinatis x, y, (§. 8.) sequentes nanciscuntur valores:

$$\mathfrak{N} = \varepsilon = \frac{\frac{m+1}{m-1}\mathrm{M} - \mathfrak{M}}{\lambda - 2 - 4(m-1)^2} \text{ et } \mathrm{N} = \sigma = \frac{\mathrm{M}}{4(m-1)^2} - \frac{m+1}{m-1}\varepsilon.$$

Binae hinc oriuntur aequationes

3) $0 = +g(m-1) + f(m+1) + \delta[(m-1)(2) - (m+1)(4)]$
$+\varepsilon(m-1)[4(m-1)^2+2-\lambda-(1)] + \zeta[(m-1)(3)-(m+1)(5)]$
$+\eta(m-1)(2) + \varrho[(m-1)(4) - (m+1)(10)] - \sigma(m+1)(9)$
$+\tau[(m-1)(5)-(m+1)(11)] + \xi[(m-1)(4)+(m+1)(10)];$

4) $0 = +f - \delta(4) - 4(m+1)(m-1)\varepsilon - \zeta(5) - \varrho(10)$
$-\sigma[(9) + 4(m-1)^2] - \tau(11) + \xi(10).$

§. 22. Coëfficiens cos $(2p+2t)$ est

$$\mathfrak{M} = -\delta(2) - \varepsilon(3) + \zeta(1) - \vartheta(2) + \varrho(4) - \sigma(5) - \psi(4) + h,$$

et coëfficiens sin $(2p+2t)$ sive

$$\mathrm{M} = -\delta(4) - \varepsilon(5) + \varrho(10) - \sigma(11) - \tau(9) + \psi(10) + g,$$

atque $\mu = 2(m+1)$; proinde coëfficientes cos $(2p+2t)$ et sin $(2p+2t)$ in coordinatis x, y, h. e.

$$\mathfrak{N} = \zeta = \frac{\mathrm{M} - \mathfrak{M}}{\lambda - 2 - 4(m+1)^2} \text{ et } \mathrm{N} = \tau = \frac{\mathrm{M}}{4(m+1)^2} - \zeta.$$

Unde sequentes resultant aequationes:

5) $0 = +g - h + \delta[(2) - (4)] + \varepsilon[(3) - (5)]$
$+\zeta[4(m+1)^2+2-\lambda-(1)] + \vartheta(2) + \varrho[(10)-(4)]$
$+\sigma[(5) - (11)] - \tau(9) + \psi[(10) + (4)];$

6) $0 = +g - \delta(4) - \varepsilon(5) - 4\zeta(m+1)^2 + \varrho(10) - \sigma(11)$
$-\tau[(9) + 4(m+1)^2] + \psi(10).$

§. 23. Coëfficiens cos $(4p-2t)$ est

$$\mathfrak{M} = -\delta(3) - \varepsilon(2) + \eta(1) - \varrho(5) + \sigma(4) + k,$$

et coëfficiens sin $(4p-2t)$ seu

$$\mathrm{M} = -\delta(5) - \varepsilon(4) + \eta(4) - \varrho(11) + \sigma(10) - \xi(9) + \mathfrak{h}.$$

Quum praeterea sit $\mu = 2(2m-1)$, coëfficientes hujus anguli in coordinatis x, y, sequentibus definiuntur formulis

$$\mathfrak{N} = \eta = \frac{\frac{m+1}{2m-1}\mathrm{M} - \mathfrak{M}}{\lambda - 2 - 4(2m-1)^2} \text{ et } \mathrm{N} = \xi = \frac{\mathrm{M}}{4(2m-1)^2} - \frac{m+1}{2m-1}\eta:$$

unde binae eliciuntur aequationes

7) $$0 = (m+1)\mathfrak{h} - (2m-1)k + \delta[(2m-1)(3) - (m+1)(5)]$$
$$+ \varepsilon[(2m-1)(2) - (m+1)(4)]$$
$$+ \eta[4(2m-1)^3 - (2m-1)(\lambda - 2 + (1)) + (m+1)(4)]$$
$$+ \varrho[(2m-1)(5) - (m+1)(11)] + \sigma[(m+1)(10) - (2m-1)(4)]$$
$$- \xi(m+1)(9);$$

8) $$0 = +\mathfrak{h} - \delta(5) - \varepsilon(4) - \eta[4(m+1)(2m-1) - (4)]$$
$$- \varrho(11) + \sigma(10) - \xi[(9) + 4(2m-1)^2].$$

§. 24. Est denique coëfficiens $\cos(4p+2t)$ sive

$$\mathfrak{M} = -\delta(3) - \zeta(2) + \vartheta(1) + \varrho(5) + \tau(4) + l,$$

et coëfficiens $\sin(4p+2t)$ vel

$$\mathrm{M} = -\delta(5) - \zeta(4) + \vartheta(4) + \varrho(11) + \tau(10) - \psi(9) + \mathfrak{k},$$

ac $\mu = 2(2m+1)$. Unde coëfficientes ejusdem argumenti in coordinatis x, y, reperiuntur, videlicet

$$\mathfrak{N} = \vartheta = \frac{\frac{m+1}{2m+1}\mathrm{M} - \mathfrak{M}}{\lambda - 2 - 4(2m+1)^2} \text{ et } \mathrm{N} = \psi = \frac{\mathrm{M}}{4(2m+1)^2} - \frac{m+1}{2m+1}\vartheta,$$

quod sequentes praebet aequationes:

9) $$0 = +(m+1)\mathfrak{k} - (2m+1)l + \delta[(2m+1)(3) - (m+1)(5)]$$
$$+ \zeta[(2m+1)(2) - (m+1)(4)]$$

$$+\vartheta\,[4\,(2m+1)^3-(2m+1)\,(\lambda-2+(1))+(m+1)\,(4)]$$
$$+\varrho\,[(m+1)(11)-(2m+1)(5)]+\tau[(m+1)(10)-(2m+1)(4)]$$
$$-\psi\,(m+1)\,(9);$$

10) $$0 = +\mathfrak{k}-\delta\,(5)-\zeta\,(4)-\vartheta\,[4\,(m+1)\,(2m+1)-(4)]$$
$$+\varrho\,(11)+\tau\,(10)-\psi\,[(9)+4\,(2m+1)^2].$$

§. 25. Si in decem istis aequationibus loco quantitatum m, λ, (1), (2), etc. valores eorum substituuntur numerici (§. 2. 13. 14.), decem incognitae, δ, ϱ, ε, σ, ζ, τ, η, ξ, ϑ, ψ, inde sequentibus aequationibus definiuntur (§. 20 — 24.):

1) $0 = -5,3380541 + \delta\,.\,173,255367 + \varrho\,.\,0,3641252$
$+\varepsilon\,.\,22,065004 + \sigma\,.\,33,83766 - \zeta\,.\,31,286294$
$-\tau\,.\,37,828356 + \eta\,.\,0,4949984 + \xi\,.\,0,4038662$
$-\vartheta\,.\,0,6000552;$

2) $0 = -0,6003712 + \delta\,.\,53,47568 + \varrho\,.\,4,0272367$
$+\varepsilon\,.\,1,9953482 + \sigma\,.\,2,6803227 - \zeta\,.\,1,9953482$
$-\tau\,.\,2,6803227 + \eta\,.\,0,0409552 + \xi\,.\,0,0332728$
$-\vartheta\,.\,0,0409552 - \psi\,.\,0,0332728;$

3) $0 = +334,57506 + \delta\,.\,25,742423 - \varrho\,.\,13,148051$
$+\varepsilon\,.\,3862,640 - \sigma\,.\,0,3641252 + \zeta\,.\,0,0496646$
$+\tau\,.\,0,020795 + \eta\,.\,52,418072 + \xi\,.\,58,517965;$

4) $0 = -14,71963 + \delta\,.\,1,9953482 + \varrho\,.\,2,6803227$
$+\varepsilon\,.\,607,96084 + \sigma\,.\,517,03684 + \zeta\,.\,0,0409552$
$+\tau\,.\,0,0332728 - \xi\,.\,2,6803227;$

5) $0 = -0,1630430 - \delta\,.\,2,6152972 - \varrho\,.\,0,6849745$
$-\varepsilon\,.\,0,0115732 - \sigma\,.\,0,0076824 - \zeta\,.\,537,65663$
$+\tau\,.\,0,0272367 - \vartheta\,.\,4,6106454 - \psi\,.\,4,6756709;$

6) $o = -o,3263402 + \delta.1,9953482 - \varrho.2,6803227 + \varepsilon.o,0409552 + \sigma.o,0332728 + \zeta.714,912 + \tau.714,93924 - \psi.2,6803227;$

7) $o = +5,479055 - \delta.o,6993838 - \varrho.o,5273663 - \varepsilon.82,77108 + \sigma.11,532246 - \eta.49322,656 + \xi.o,3641252;$

8) $o = -o,4386378 + \delta.o,0409552 + \varrho.o,0332728 + \varepsilon.1,9953482 - \sigma.2,6803227 + \eta.1267,4014 + \xi.2253,9665;$

9) $o = +o,1993540 - \delta.o,8044407 + \varrho.o,6092768 - \zeta.91,9924 + \tau.15,52294 - \vartheta.63663,24 + \psi.o,3641252;$

10) $o = -o,0123354 + \delta.o,0409552 - \varrho.o,0332728 + \zeta.1,9953482 - \tau.2,6803227 + \vartheta.1374,3532 + \psi.2649,7727.$

§. 26. Ordiamur ab aequatione postrema, valoremque coëfficientis ψ inde deductum substituamus in aequatione nona, unde eliciatur valor coëfficientis ϑ, quo cum valore ipsius ψ in aequatione octava substituto, quaeratur valor coëfficientis ξ; sicque progrediendo ad primam usque aequationem, decem nostrae aequationes sequentem induent formam:

10) $\psi = +o,0000047 - \delta.o,0000155 + \varrho.o,0000126 - \zeta.o,0007530 + \tau.o,0010115 - \vartheta.o,5186684;$

9) $\vartheta = +o,0000031 - \delta.o,0000126 + \varrho.o,0000096 - \zeta.o,0014483 + \tau.o,0002438;$

8) $\xi = +o,0001946 - \delta.o,0000182 - \varrho.o,0000148 - \varepsilon.o,0008853 + \sigma.o,0011892 - \eta.o,5622980;$

7) $\eta = +o,0001111 - \delta.o,0000142 - \varrho.o,0000107 - \varepsilon.o,0016782 + \sigma.o,0002338;$

6) $\tau = +\,0,\,0004565 - \delta\,.\,0,\,0027910 + \varrho\,.\,0,\,0037491 - \varepsilon\,.\,0,\,0000573 - \sigma\,.\,0,\,0000465 - \zeta\,.\,0,\,9999652;$

5) $\zeta = -\,0,\,0003033 - \delta\,.\,0,\,0048640 - \varrho\,.\,0,\,0012740 - \varepsilon\,.\,0,\,0000215 - \sigma\,.\,0,\,0000143;$

4) $\sigma = +\,0,\,0284700 - \delta\,.\,0,\,0038590 - \varrho\,.\,0,\,0051843 - \varepsilon\,.\,1,\,1758622;$

3) $\varepsilon = -\,0,\,0866139 - \delta\,.\,0,\,0066639 + \varrho\,.\,0,\,0034036;$

2) $\varrho = +\,0,\,1062189 - \delta\,.\,13,\,370206;$

1) $\delta = +\,0,\,0164786$

§. 27. Hoc valore ipsius δ jam introducto in aequationem secundam, tumque valore coëfficientium δ et ϱ in aequationem tertiam, et sic porro regrediendo usque ad aequationem decimam, tandem obtinemus sequentes decem coëfficientium valores numericos:

$\delta = +\,0,\,0164786;\quad \varrho = -\,0,\,1141040;\quad \varepsilon = -\,0,\,0871121;$
$\sigma = +\,0,\,1314299;\quad \zeta = -\,0,\,0002381;\quad \tau = +\,0,\,0002197;$
$\eta = +\,0,\,0002890;\quad \xi = +\,0,\,0002669;\quad \vartheta = +\,0,\,0000021;$
$\psi = +\,0,\,0000023.$

§. 28. Postquam hoc modo omnes terminos quantitatum $\mathfrak{V}$, V, (§. 14.) determinavimus, nihil jam superest, nisi ut singulos terminos in quadratum excentricitatis telluris $\varkappa$ multiplicemus, quo facto resultabit nova aequatio quaesita abscissae x et ordinatae y, puta $x = \varkappa^2\,\mathfrak{V}$ et $y = \varkappa^2\,\mathrm{V}$ (§. 7.). Quare quum per elementa orbitae telluris sit $\varkappa = 0,\,016802$, ideoque $\varkappa^2 = 0,\,0002823$: invenitur (§. 19. 27.)

$\varkappa^2 \alpha = -0,0000029$; $\varkappa^2 \beta = +0,0000063$;
$\varkappa^2 \nu = -0,0000097$; $\varkappa^2 \gamma = 0$; $\varkappa^2 \pi = 0$;
$\varkappa^2 \delta = +0,0000047$; $\varkappa^2 \varrho = -0,0000322$;
$\varkappa^2 \varepsilon = -0,0000246$; $\varkappa^2 \sigma = +0,0000371$;
$\varkappa^2 \zeta = -0,0000001$; $\varkappa^2 \tau = \varkappa^2 \eta = \varkappa^2 \xi = +0,0000001$;
$\varkappa^2 \vartheta = 0$; $\varkappa^2 \psi = 0$.

Unde tandem resultat $\varkappa^2 \mathfrak{V}$ vel nova aequatio abscissae

$$x = -0,0000029 + 0,0000063 \cos 2p + 0,0000047 \cos 2t - 0,0000246 \cos (2p - 2t);$$

$\varkappa^2 V$ seu nova aequatio ordinatae

$$y = -0,0000097 \sin 2p - 0,0000322 \sin 2t + 0,0000371 \sin (2p - 2t).$$

§. 29. Collatio aequationum ab Eulero computatarum (pag. 680 sqq.) cum novis istis a quadrato excentricitatis telluris pendentibus, quas vir celeberrimus neglexerat, docet, posteriores aequationes majores esse Eulerianis ordinis quarti, sexti, decimi ac decimi tertii, h. e. iis quae a cubo excentricitatis lunaris, a producto utriusque excentricitatis in distantiam a lunae a tellure, et a producto excentricitatis telluris in quadratum inclinationis orbitae lunaris dependent. Quodsi explorare volumus, ad quot minuta secunda aequatio longitudinis lunae hinc oriunda pervenire possit, non opus est, maximos minimosve aequationum nostrarum valores more solito quaerere. Pro nostro fine, ubi summa exactitudo non requiritur, sequens methodus sufficit. Posita aequatione abscissae x seu $\varkappa^2 \mathfrak{V} = \pm g$, et $\varkappa^2 V = \pm h$, maximi valores pervenire circiter possunt ad $g = \pm 0,0004$, $h = \pm 0,0008$. Quare quum posita correctione longitudinis lunae $= \Phi$ sit tang $\Phi = \frac{y}{1+x}$ (pag. 600), incrementum ejus ∂ . tang $\Phi = \frac{(1+x)\partial y - y\partial x}{(1+x)^2}$ maximum erit, quando ∂x et ∂y maximos at oppositos valores induunt: erit nempe

$\partial . \text{tang}\, \Phi = \pm \frac{h(1+x) + gy}{(1+x)^2}$, qui valor maximus erit, quando y maximum nanciscitur valorem, x autem evanescit, quoniam ordinata y ratione abscissae $1 + x$ admodum exigua est. Reperitur autem (pag. 686) valor ipsius y maximus fere $= \pm 0,15$: proinde

$$\partial . \text{tang}\, \Phi = +0,00008 + 0,15 \times 0,00004 = 0,000086.$$

Quae tangentis variatio, pro angulis non majoribus quam Φ vel aliquot gradus, respondet variationi anguli $15''$ vel $20''$, ideoque non erat negligenda.

§. 30. Simul atque constitueram, aequationem longitudinis lunae *saecularem* e formulis Eulerianis deducere, examen instituere coepi, annon ipsae series, quibus magnus ille Geometra coordinatas x, y, definivit, rite evolutae, pro aequatione anguli Φ unum alterumve terminum praeberent, qui neque sinum neque cosinum ullius anguli, sed alium factorem non periodicum, aut saltem periodo satis longae obnoxium, contineret; idque examen ultra terminos quadrato excentricitatis telluris proportionales non erat extendendum, a quo scilicet aequationem lunae saecularem dependere Cel. la Place demonstraverat *). Quem in finem calculus correctionum periodicarum supra evolutus praemittendus erat, qui quidem docuit, seriem, qua ordinata y exprimitur, nonnisi sinus angulorum continere, ideoque hoc modo nullum terminum tempori aut quadrato temporis proportionalem resultare posse, quemadmodum jam videbimus.

§. 31. Rejectis omnibus terminis in excentricitatem vel inclinationem lunae etc. ductis, quoniam inde aequationes pro-

*) V. *Mémoires de Paris. Année* 1786. *Sur l'équation séculaire de la Lune.*

ducto utriusque excentricitatis proportionales orirentur, habemus (§. 7.)

$$x = \mathfrak{O} + \varkappa \mathfrak{U} + \varkappa^2 \mathfrak{V} \text{ et } y = O + \varkappa U + \varkappa^2 V.$$

proinde posito $\frac{1}{1+\mathfrak{O}} = P$, ob tang $\Phi = \frac{y}{1+x}$ (§. 29.),

$$\text{tang } \Phi = \frac{P(O + \varkappa U + \varkappa^2 V)}{1 - \varkappa P \mathfrak{U} + \varkappa^2 P \mathfrak{V}} =$$

$$P(O + \varkappa U + \varkappa^2 V)(1 - \varkappa P \mathfrak{U} - \varkappa^2 P \mathfrak{V} + \varkappa^2 P^2 \mathfrak{U}^2),$$

h. e. $\text{tang } \Phi = PO + \varkappa P(U - PO\mathfrak{U})$

$$+ \varkappa^2 P(V - PU\mathfrak{U} - PO\mathfrak{V} + P^2 O\mathfrak{U}^2).$$

Considerantes autem quantitatum harum valores (§. 11. 12. 14.) facile videbimus, $1 + \mathfrak{O}$, ideoque et P altioresque ejusdem potestates esse series valde convergentes e termino constante et cosinubus compositas; perspicimus porro, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}^2$ et $\mathfrak{V}$, similes esse series, sed U, O, V, nonnisi sinus continere. Unde sequitur, singulos terminos tangentis anguli Φ series esse juxta sinus angulorum progredientes, ideoque terminum hujus tangentis generalem sic exprimi posse: tang $\Phi = \pm X \sin \Phi$. Quamobrem quum in genere sit angulus

$$\Phi = \text{tang } \Phi - \tfrac{1}{3} \text{tg}^3 \Phi + \tfrac{1}{5} \text{tg}^5 \Phi - \text{cet.}$$

atque omnes potestates sinuum impares nec non producta sinuum dimensionis imparis evoluta iterum sint series quae nonnisi sinus continent, sequitur, aequationem longitudinis lunae Eulerianam, seu Φ esse seriem, quae nonnisi sinus h. e. terminos periodicos continet.

§. 32. Quaeri hic potest, unde fiat, ut methodus, qua Eulerus usus est, longitudinem lunae per binas coordinatas exprimendi, et quae omnes lunae aequationes periodicas tam exacte delineat, non tamen ad ullum terminum tempori proportio-

nalem perducat, ideoque ad aequationem saecularem inveniendam non sit idonea. Paradoxi hujus fons sequens esse videtur, ad quem detegendum plena atque perfecta informatione analysis Eulerianae opus est. Aequatio lunae saecularis, quemadmodum infra videbimus, hujus formae est. $\xi = \int \varkappa^2 \partial\tau$, denotante $\partial\tau$ tempusculum pro constante assumtum. Quare si excentricitas telluris $\varkappa$, ut in toto libro Euleriano factum est, constans supponitur, haec aequatio fit $\xi = \varkappa^2 \tau$, ideoque speciem motus medii mentietur: erit scilicet illa longitudinis lunae mediae seu motus medii pars, quae ex actione solis oritur, siquidem e theoria gravitatis Neutoniana constat, singulas lunae periodos, ob actionem solis tellurisque compositam, parte sua fere 180ma longiores, motumque ejus medium tardiorem esse, quam si tellus sola in lunam ageret. Unde sequitur, completam *problematis trium corporum* solutionem terminos quoque continere debere tempori proportionales, qui termini minime sunt negligendi neque simpliciter ut pars motus medii considerandi, si in factorem ducuntur, qui non sensu strictissimo constans, sed vel levissimae variationi plurium saeculorum spatio obnoxius est, quod ipsum casu, quem jam contemplamur, contingit, siquidem factor $\varkappa^2$ expressionis $\int \varkappa^2 \partial\tau$, vi actionis planetarum in tellurem, lentam quidem, at longo temporis intervallo satis sensibilem commutationem suffert.

§. 33. Quibus attente perpensis facile videbimus, cur ista methodo aequatio lunae saecularis patefieri non poterat, non solum quia Celeb. Eulerus excentricitatem telluris ceu constantem semper consideravit, sed praesertim, quoniam pro axe abscissarum non, uti fieri solet, lineam fixam sed lineam mobilem assumsit, quae perpetuo ad locum lunae *medium* dirigatur (pag. 29), ideoque non *motum* sed *locum* medium tanquam cognitum desideravit, quod, concessa aequatione longitudinis mediae saeculari, petitio principii est: unde factum est, ut omnes aequationes seu perturbationes motus medii prorsus e calculo egrederentur, quippe quae

duntaxat situm axis, qui pro cognito assumitur, non autem ordinatas super hoc axe captas, quas solas Eulerus examini subjecerat, afficiunt. Praeterea forma pro coordinatis x, y, seu portionibus earum $\varkappa^2\mathfrak{V}$ et $\varkappa^2 V$ (§. 14.) assumta sensu stricto non est completa, siquidem factor $\varkappa^2$ constans supponitur. Quodsi enim ob variationem excentricitatis telluris ponimus $\varkappa^2 = A + B\tau$ + cet. fiet

$$\varkappa^2\mathfrak{V} = x = (A + B\tau)\,(\alpha + \beta \cos 2p + \text{cet.}) \text{ et}$$

$$\varkappa^2 V = y = (A + B\tau)\,(\nu \sin 2p + \text{cet.});$$

unde necessario in expressiones coordinatarum x, y, termini ingredientur, qui sunt functiones temporis τ; atque hi termini ad aequationem saecularem perducerent, si pro axe abscissarum linea fuisset assumta, non ad locum lunae medium, sed ad punctum quodpiam fixum, e. gr punctum aequinoctiale directa. Hinc tandem perspicimus, terminos, quibus aequatio saecularis continetur, introductione novarum coordinatarum X, Y, (pag. 23 — 29) evanuisse, ideoque in aequationibus (pag. 28. 29) non amplius existere: unde pro eruenda aequatione saeculari aequationes superiores (pag. 22) sunt examinandae, in quibus axis abscissarum fixus est. Quo modo ex his aequationibus aequatio longitudinis lunae saecularis erui possit, breviter nunc ostendemus.

§. 34. In aequationibus (pag. 22)

$$\text{I.}\quad 0 = \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} + \frac{\mu x}{v^3} + \nu\,.\,\frac{x - u\cos\Phi}{w^3} + \nu\,.\,\frac{\cos\Phi}{u^2},$$

$$\text{II.}\quad 0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + \frac{\mu y}{v^3} + \nu\,.\,\frac{y - u\sin\Phi}{w^3} + \nu\,.\,\frac{\sin\Phi}{u^2},$$

quantitates x, y, u, etc. ad *Figuram* 1. referuntur. Supposito nempe loco lunae ad Eclipticam reducto in Y, centro solis in S, telluris in T, ductisque TP, YX, normalibus ad axem abscissarum SX, est (pag. 12. 13)

$$SX = x,\ XY = y,\ ST = u,\ SY = v,\ TY = w,\ PST = \Phi,$$

ideoque

$$SP = u \cos \Phi, \quad PT = u \sin \Phi,$$

estque ∂t motus solis medius tempusculo $\partial \tau$ (pag. 20),

$$\mu = \frac{S}{S+T} = 1, \quad \nu = \frac{T}{S+T} = \frac{T}{S},$$

designatis nempe massis solis et telluris literis S, T (pag. 13). At coordinatis non e centro solis sed e centro telluris captis, aequationes fundamentales fini nostro magis erunt idoneae; quod quidem obtinetur, tellure in S, sole in T transposito, massisque S, T, permutatis. Hinc fit

Tab. XIV. Fig. 1.

$$\mu = \frac{T}{S}, \quad \nu = \frac{S}{T+S} = 1, \quad ST = u \text{ distantia solis a tellure,}$$

$$SY = v \text{ distantia lunae a tellure,}$$

$$TY = w \text{ distantia lunae a sole,}$$

et $x = SX$, $y = XY$, sunt coordinatae e centro telluris captae, et locum lunae definientes, at

$$SP = u \cos \Phi = x', \quad PT = u \sin \Phi = y',$$

locum solis determinant. Sicque aequationes nostrae ductae in $\frac{S}{T} = m$, fient

$$\text{I.} \quad 0 = \frac{m \partial \partial x}{\partial t^2} + \frac{x}{v^3} + \frac{m(x-x')}{w^3} + \frac{mx'}{u^3};$$

$$\text{II.} \quad 0 = \frac{m \partial \partial y}{\partial t^2} + \frac{y}{v^3} + \frac{m(y-y')}{w^3} + \frac{my'}{u^3}.$$

§. 35. Jam opus erit loco anguli ∂t introducere elementum temporis $\partial \tau$. Posito nempe motu solis medio, illo temporis spatio quod pro unitate accipitur, $= n$, fiet $n : \partial t = 1 : \partial \tau$, seu $\partial t = n \partial \tau$. Quum praeterea per theoriam Neutonianam massae corporum centralium sint in ratione composita e cubo distantiae mediae planetae circa corpus centrale gyrantis nec non quadrato motus medii ejusdem planetae, posito motu medio lunae $= n$, radio orbis telluris $= A = 1$, lunae $= a$, habemus

$S : T = A^3 n'^2 : a^3 n^2$, proinde

$n'^2 = m a^3 n^2$, et $\partial t^2 = m a^3 n^2 \partial \tau^2$.

Unde aequationes nostrae (§. 34) hanc formam induunt:

I. $0 = \frac{\partial \partial x}{\partial \tau^2} + \frac{n^2 a^3 x}{v^3} + \frac{m n^2 a^3 (x - x')}{w^3} + \frac{m n^2 a^3 x'}{u^3}$;

II. $0 = \frac{\partial \partial y}{\partial \tau^2} + \frac{n^2 a^3 y}{v^3} + \frac{m n^2 a^3 (y - y')}{w^3} + \frac{m n^2 a^3 y'}{u^3}$.

§. 36. Quodsi jam prior aequatio in x ducta, posteriori in y ductae additur, nova oritur aequatio

III. $0 = \frac{x \partial \partial x + y \partial \partial y}{\partial \tau^2} + \frac{n^2 a^3 (x^2 + y^2)}{v^3} + \frac{m n^2 a^3 (x^2 + y^2 - xx' - yy')}{w^3} + \frac{m n^2 a^3 (xx' + yy')}{u^3}$.

Est autem $x^2 + y^2 = SV^2 = v^2$, et $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ elementum arcus orbitae lunaris, quare posita vera lunae longitudine $= \xi$, fit

$\partial x^2 + \partial y^2 = \partial v^2 + v^2 \delta \xi^2$, ideoque

$\partial . v^2 = 2v \partial v = 2x \partial x + 2y \partial y$, et

$\frac{1}{2} \partial \partial . v^2 = \partial v^2 + v \partial \partial v = x \partial \partial x + y \partial \partial y + \partial v^2 + v^2 \delta \xi^2$;

unde sequitur

$x \partial \partial x + y \partial \partial y = v \partial \partial v - v^2 \partial \xi^2$.

Quibus valoribus substitutis, et posito brevitatis ergo

$\frac{v^2 - xx' - yy'}{w^3} + \frac{xx' + yy'}{u^3} = R$,

aequatio postrema ita transformatur:

III. $0 = \frac{v \partial \partial v - v^2 \partial \xi^2}{\partial \tau^2} + \frac{n^2 a^3}{v} + m n^2 a^3 R$.

§ 37. Supponamus jam, actione solis radium vectorem lunae v et longitudinem ξ augeri portionibus vel variationibus δv et $\delta \xi$, quae tam exiguae erunt, ut potestates earum altiores,

earumque producta in R negligere liceat, quoniam quantitates $\frac{x}{w^3}$, $\frac{y}{w^3}$, $\frac{x}{u^3}$, $\frac{y}{u^3}$, e quibus R componitur, minimae sunt. Scripto itaque $v + \delta v$ loco v et $\xi + \delta\xi$ loco ξ, per calculum *variationum* scribendum est

$$\partial\partial v + \partial\partial\delta v \text{ loco } \partial\partial v,\ \partial\xi + \partial\delta\xi, \text{ loco } \partial\xi,$$

$$v^2 + 2v\delta v \text{ loco } v^2,\ \partial\xi^2 + 2\partial\xi\partial\delta\xi \text{ loco } \partial\xi^2, \text{ et } \frac{1}{v} - \frac{\delta v}{v^2} \text{ loco } \frac{1}{v},$$

unde aequatio nostra fit

$$\text{III. } 0 = \frac{v\partial\partial v - v^2\partial\xi^2 + \delta v\partial\partial v + v\partial\partial\delta v - 2v\delta v\partial\xi^2 - 2v^2\partial\xi\partial\delta\xi}{\partial\tau^2} + \frac{n^2a^3}{v} - \frac{n^2a^3\delta v}{v^2} + mn^2a^3R.$$

§. 38. Termini factores m, δv, vel $\delta\xi$ continentes, ex actione solis in lunam oriuntur, unde illi cum perturbationibus, quas exprimunt, evanescunt, caeteri vero termini motum lunae inturbatum exprimunt. Motus itaque lunae ellipticus definitur aequatione

$$1)\ 0 = \frac{\partial\partial v - v\partial\xi^2}{\partial\tau^2} + \frac{n^2a^3}{v^2},$$

motus autem a sole perturbatus aequatione

$$2)\ 0 = \frac{\delta v\partial\partial v + v\partial\partial\delta v - 2v\delta v\partial\xi^2 - 2v^2\partial\xi\partial\delta\xi}{\partial\tau^2} - \frac{n^2a^3\delta v}{v^2} + mn^2a^3R.$$

Est autem $\frac{v^2\partial\xi}{2}$ aequalis sectori orbis lunaris elliptico, qui est motui medio vel tempori proportionalis, unde posita excentricitate lunae $= k$, atque numero rationem perimetri circuli ad diametrum exprimente, puta $3,14\ldots = \pi$, sequens nascitur proportio: integra area elliptica orbitae lunae $(\pi a^2\sqrt{1-k^2})$ est ad sectorem $(\frac{v^2\partial\xi}{2})$, ut mensis ad tempus $\partial\tau$ quo sector describitur. Quum praeterea sit tempus pro unitate assumtum (1) ad mensem, ut motus lunae medius eo tempore peractus (n) ad

integram peripheriam (2π); sequitur esse mensem $= \frac{2\pi}{n}$; unde prior analogia sic exprimitur:

$$\pi a^2 \sqrt{(1-k^2)} : \tfrac{v^2 \partial\xi}{2} = \tfrac{2\pi}{n} : \partial\tau, \text{ h. e.}$$
$$v^2 \partial\xi = n a^2 \partial\tau \sqrt{(1-k^2)}.$$

Verum est quoque per aequationem 1)
$$\tfrac{v \partial \xi^2}{\partial\tau^2} = \tfrac{\partial\partial v}{\partial\tau^2} + \tfrac{n^2 a^3}{v^2};$$

quibus valoribus in aequatione 2) substitutis, nanciscimur

$$\text{IV. } 0 = \tfrac{v\partial\partial\delta v - \delta v \partial\partial v}{\partial\tau^2} - \tfrac{2n a^2 \partial\delta\xi}{\partial\tau}\sqrt{(1-k^2)} - \tfrac{3n^2 a^3 \delta v}{v^2} + m n^2 a^3 R.$$

§. 39. Simili modo obtinemus (§. 35.), aequatione I. in ∂x ducta et adjuncta aequationi II. in ∂y ductae,

$$0 = \tfrac{\partial x \partial\partial x + \partial y \partial\partial y}{\partial\tau^2} + \tfrac{n^2 a^3 (x\partial x + y\partial y)}{v^3} + \tfrac{m n^2 a^3 ((x-x')\partial x + (y-y')\partial y)}{w^3} + \tfrac{m n^2 a^3 (x'\partial x + y'\partial y)}{u^3};$$

unde ob $x\partial x + y\partial y = v\partial v$ (§. 36.), posito compendii causa

$$\tfrac{(x-x')\partial x + (y-y')\partial y}{w^3} + \tfrac{x'\partial x + y'\partial y}{u^3} = \partial S,$$

integrando obtinetur

$$\text{V. } 0 = \tfrac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial\tau^2} - \tfrac{2n^2 a^3}{v} + 2m n^2 a^3 S + C,$$

ubi est C constans per integrationem ingressa. Evanescente igitur actione solis seu massa m, motus lunae ellipticus definitur aequatione

$$3) \quad 0 = \tfrac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial\tau^2} - \tfrac{2n^2 a^3}{v} + C,$$

sive posito arcu elliptico orbis lunaris $= \partial s$,

$$3) \quad 0 = \tfrac{\partial s^2}{\partial\tau^2} - \tfrac{2n^2 a^3}{v} + C.$$

Designata jam anomalia lunae media et vera literis μ, ν, constat per leges Kepleri esse in motu elliptico

$$\frac{\partial s}{\partial \mu} = a\sqrt{\frac{1 - 2k\cos\nu + k^2}{1 - k^2}}, \text{ et } \cos\nu = \frac{v - a(1 - k^2)}{kv},$$

proinde $\frac{\partial s}{\partial \mu} = a\sqrt{(\frac{2a}{v} - 1)}$. Quum autem sit $\partial\mu$ motus lunae medius tempore $\partial\tau$, ideoque $\partial\mu = n\partial\tau$, habemus

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = n a \sqrt{\frac{2a - v}{v}};$$

quo valore in aequatione 3) substituto nascitur

$$0 = -n^2 a^2 + C \text{ seu } C = n^2 a^2.$$

Hinc aequatio V. hanc formam induit:

$$\text{V. } 0 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial \tau^2} - \frac{2n^2 a^3}{v} - n^2 a^2 + 2mn^2 a^3 S.$$

§. 40. Quod si huic aequationi additur aequatio I. in x ducta simul cum II. in y ducta (§. 36.), resultat

$$\text{VI. } 0 = \frac{v\partial\partial v + \partial v^2}{\partial\tau^2} - \frac{n^2 a^3}{v} + n^2 a^2 + mn^2 a^3 (2S + R).$$

Scripto jam iterum $v + \delta v$ loco v, ut supra (§. 37.) ∂v^2 abit in $\partial v^2 + 2\partial v\partial\delta v$ et $v\partial\partial v$ in $v\partial\partial v + \delta v\partial\partial v + v\partial\partial\delta v$; quo valore substituto aequatio postrema permutatur in hanc:

$$\text{VI. } 0 = \frac{\partial v^2 + v\partial\partial v}{\partial\tau^2} + \frac{2\partial v\partial\delta v + \delta v\partial\partial v + v\partial\partial\delta v}{\partial\tau^2} - \frac{n^2 a^3}{v} + \frac{n^2 a^3 \delta v}{v^2} + n^2 a^2 + mn^2 a^3 (2S + R);$$

unde pro motu elliptico, ubi δv et m evanescunt, nec non pro motu perturbato seorsim evanescere debent termini factoribus δv aut m affecti et non affecti. Motus itaque perturbatus sequente aequatione definitur:

$$\frac{vn^2 a^3 \partial v}{v^2} = -\frac{2\partial v\partial\delta v + \delta v\partial\partial v + v\partial\partial\delta v}{\partial\tau^2} - mn^2 a^3 (2S + R).$$

Quo valore in aequatione IV. (§. 38.) substituto nanciscimur

$$\text{VII.}\quad \frac{2n\,a^2\,\partial\delta\xi}{\partial\tau}\sqrt{(1-k^2)} = \frac{6\partial v\,\partial\delta v + 2\delta v\,\partial\partial v + 4v\,\partial\partial\delta v}{\partial\tau^2} + 6\,m\,n^2\,a^3\,S + 4\,m\,n^2\,a^3\,R;$$

cujus integrale est

$$\delta\xi\sqrt{(1-k^2)} = \frac{2v\,\partial\delta v + \delta v\,\partial v}{n\,a^2\,\partial\tau} + 3mna\int S\,\partial\tau + 2mna\int R\,\partial\tau.$$

§. 41. En aequationem completam, qua omnes omnino continentur aequationes longitudinis lunae $\delta\xi$ e vi solis oriundae, cujuscunque sint argumenti. Primi tres termini evoluti ad nullum terminum formae $\int A\,\partial\tau$ perducunt, sed aequationes duntaxat periodicas praebent, sinubus vel cosinubus angulorum variabilium proportionales: quod quidem sibimet ipse quisque facile persuaserit, qui operae in singulos terminos evolvendos conferendae parcere non voluerit. Quare determinandae aequationi lunae saeculari postremum duntaxat membrum

$$\delta\xi\sqrt{(1-k^2)} = 2mna\int R\,\partial\tau$$

inservire potest, ideoque totum negotium reducitur ad evolutionem quantitatis R, cujus quidem illi tantummodo termini asservandi sunt, qui forma $A\,\varkappa^2$ induuntur, quoniam aequationem lunae saecularem a quadrato excentricitatis telluris dependere jam constat. Aequatio itaque saecularis sequente definitur aequatione

$$\text{VIII.}\quad \delta\xi = \frac{2mna}{\sqrt{(1-k^2)}}\int R\,\partial\tau = mna\,(2+k^2)\int R\,\partial\tau.$$

§. 42. Pro evolvenda quantitate R ponamus brevitatis gratia $xx' + yy' = zz$, ut sit (§. 36.) $R = \frac{v^2 - z^2}{w^3} + \frac{z^2}{u^3}$. Quum praeterea axis abscissarum x ad punctum aequinoctiale verum dirigatur (pag. 12), unde longitudines ξ computantur, appellemus ξ veram longitudinem solis, ut sit (§. 34.) $x = v\cos\xi$, $y = v\sin\xi$, $x' = u\cos\xi'$, $y' = u\sin\xi'$,

$$z^2 = uv\cos(\xi - \xi'),$$

$$w^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 = x'x' + y'y' + x^2 + y^2 - 2z^2$$
$$= u^2 + v^2 - 2uv \cos(\xi - \xi');$$

unde posito angulo $\xi - \xi' = \Phi$ fit

$$\frac{1}{w^3} = (u^2 + v^2 - 2uv \cos \Phi)^{-\frac{3}{2}}.$$

Quum v ratione distantiae u admodum exigua sit, quantitas $\frac{1}{w^3}$ irrationalis in seriem juxta potestates quoti $\frac{v}{u} = r$ progredientem resoluta valde converget. Fit nempe

$$\frac{1}{w^3} = \frac{1}{u^3}\left[1 + 3r\cos\Phi - \frac{3}{2}r^2 + \frac{3\cdot 5}{2}r^2\cos^2\Phi - \frac{3\cdot 5}{2}r^3\cos\Phi + \frac{5\cdot 7}{2}r^3\cos^3\Phi\right.$$
$$\left. + \frac{3\cdot 5}{8}r^4 - \frac{3\cdot 5\cdot 7}{4}r^4\cos^2\Phi + \frac{5\cdot 7\cdot 9}{8}r^4\cos^4\Phi + \text{cet.}\right].$$

Quare quum termini periodici in aequationem saecularem non ingrediantur, pro quantitate $\frac{v^2}{w^3}$ termini duntaxat constantes hujus seriei sunt asservandi, pro quantitate vero $\frac{z^2}{w^3}$ nonnisi termini in $\cos\Phi$ ducti, ob $z^2 = uv\cos\Phi$. Habemus itaque

$$\frac{1}{w^3} = \frac{1}{u^3}\left[1 + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 2}r^2 + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 4}r^4 + \text{cet.} + 3r\left(1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}r^2\right)\cos\Phi + \text{cet.}\right].$$

§. 43. Hinc obtinemus

$$\frac{v^2}{w^3} = \frac{v^2}{u^3}\left(1 + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 2}r^2 + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 4}r^4\right),$$
$$\frac{z^2}{w^3} = \frac{3v^2}{2u^3}\left(1 + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}r^2\right), \text{ et } \frac{z^2}{u^3} = 0: \text{ unde fit (§. 42.)}$$
$$R = \frac{-v^2}{2u^3}\left(1 + \frac{9}{8}r^2\right);$$

neglectis nempe potestatibus quantitatis r secunda altioribus. Positis jam anomalia media lunae $= \mu$, solis $= \mu'$, per naturam ellipsis est

$$v = a\left(1 + \tfrac{1}{2}k^2 + k\cos\mu + \text{cet.}\right), \text{ et}$$
$$\mu = 1 + \tfrac{1}{2}\kappa^2 + \kappa\cos\mu' + \text{cet.}$$

unde neglectis terminis periodicis fit

$$v^2 = a^2\left(1+\tfrac{3}{2}k^2\right),\ \frac{1}{u^2} = 1+\tfrac{1}{2}\varkappa^2,\ \frac{1}{u^3} = 1+\tfrac{3}{2}\varkappa^2,$$

ideoque

$$r^2 = a^2\left(1+\tfrac{3}{2}k^2+\tfrac{1}{2}\varkappa^2\right),$$

unde sequitur

$$R = -\frac{a^2}{2}\left(1+\tfrac{3}{2}k^2+\tfrac{3}{2}\varkappa^2\right)\left(1+\tfrac{9}{8}a^2\left(1+\tfrac{3}{2}k^2+\tfrac{1}{2}\varkappa^2\right)\right),\ \text{h. e.}$$

$$R = -\frac{a^2}{2}\left(1+\tfrac{3}{2}k^2+\tfrac{3}{2}\varkappa^2+\tfrac{9}{8}a^2+\tfrac{27}{8}a^2k^2+\tfrac{9}{4}a^2\varkappa^2\right),$$

proinde (§. 41.)

$$\text{VIII. } \delta\xi = -mna^3\int\partial\tau\left[1+\tfrac{9}{8}a^2+\left(2+\tfrac{63}{16}a^2\right)k^2+\tfrac{3}{2}\left(1+\tfrac{3}{2}a^2\right)\varkappa^2\right].$$

§. 44. Primus hujus seriei terminus, puta

$$-mna^3\int\partial\tau\left(1+\tfrac{9}{8}a^2\right) = -mna^3\tau\left(1+\tfrac{9}{8}a^2\right),$$

tempori τ proportionalis, pars motus lunae medii est. Alter terminus formae $\int k^2\partial\tau$, quatenus k constans supponitur, itidem ad motum medium pertinet; quatenus autem k variabilis statuitur, ex hoc termino aequatio orietur, quae eandem periodum habet quam variationes excentricitatis lunae, h. e. sex circiter mensium, de qua infra nonnulla dicemus. Quamobrem pro aequatione saeculari unicus superest terminus

$$\delta\xi = -\tfrac{3}{2}mna^3\left(1+\tfrac{3}{2}a^2\right)\int\varkappa^2\partial\tau;$$

quae expressio cum illa, quam cel. la Place (*loc. cit.*) reperit, convenit, excepto postremo termino in a^5 ducto, quem magnus ille Geometra neglexerat. Haec igitur aequatio a quadrato excentricitatis telluris pendens, ejusdem erit periodi ac variationes excentricitatis telluris, h. e. periodi plurium millium annorum, ideoque speciem aequationis saecularis mentietur.

§. 45. Quia scilicet actione planetarum excentricitas telluris continuo immutatur, veram excentricitatem tanquam functionem temporis considerare oportet, unde patet, ponendum esse

$$\varkappa^2 = A + B\tau + C\tau^2 + \text{cet.}$$

Calculo autem generali pro omnibus planetarum perturbationibus instituto reperimus *), anno 1750 pro epocha assumto, esse $\varkappa = 0,\ 016802$; variationem vero saecularem $\delta\varkappa = -0,0000469$; praeterea ad annum 1750 h. e. mille annos ante epocham assumtam, computavimus situm apsidum nec non excentricitatem orbitarum omnium planetarum, ac inde invenimus excentricitatem telluris anno 1750 seu $\varkappa' = 0,\ 016733$ et variationem saecularem $\delta\varkappa' = -0,\ 0000413$. Si jam tempus τ integris saeculis exprimitur, seu centum anni pro unitate assumuntur, motum saecularem $\delta\varkappa$ seu velocitatem, qua $\varkappa$ variatur, considerare licet, unde fit $\delta\varkappa = \frac{\partial\varkappa}{\partial\tau}$, $\delta\varkappa' = \frac{\partial\varkappa'}{\partial\tau}$. Est autem, aequationem $\varkappa^2 = A + B\tau + C\tau^2$ differentiando, $\frac{2\varkappa\partial\varkappa}{\partial\tau} = B + 2C\tau$, atque pro anno 1750, $\tau = 0$, pro anno 1750, $\tau = -10$: unde obtinetur

$$2\varkappa\delta\varkappa = B \text{ et } 2\varkappa'\delta\varkappa' = B - 20C.$$

Quare quum, valoribus superioribus substitutis, sit

$$2\varkappa\delta\varkappa = -0,000001579 \text{ et } 2\varkappa'\delta\varkappa' = -0,000001350;$$

sequitur

$$B = -0,000001579 \text{ et } C = -0,00000001145.$$

---

*) Singula calculi hujus capita plenarie evoluta sunt in nostra *Astronomia Theoretica* sermone Germanico edita, *Vol. III. Sect. V. Cap. 3.*

Valore $\varkappa^2 = A + B\tau + C\tau^2$ introducto, habemus

$$\int \varkappa^2 \partial\tau = A\tau + \tfrac{1}{2}B\tau^2 + \tfrac{1}{3}C\tau^3 + \text{cet.}$$

cujus seriei terminus primus $A\tau$ pars motus medii est: unde superest aequatio saecularis (§. 44.)

$$\delta\xi = -\tfrac{3}{2}mna^3\left(1 + \tfrac{3}{2}a^2\right)\left(\tfrac{1}{2}B\tau^2 + \tfrac{1}{3}C\tau^3\right).$$

§. 46. Quum intervallum centum annorum hic pro unitate sit assumtum, est n motus lunae medius uno saeculo, h. e.

$$n = 1732564400'';$$

a est radius orbis lunaris per radium orbis telluris, seu parallaxis solis per parallaxin lunae divisa, ideoque

$$a = \frac{8'',65}{57'\ 21''} = 0,0025138;$$

m denique massa est solis per massam telluris divisa, h. e.

$$m = 365361:$$

unde invenitur

$$\tfrac{3}{2}mna^3 = 15083328'',$$

$$\tfrac{9}{4}mna^5 = 143'',$$

proinde (§. 45.)

$$\delta\xi = +\tau^2 . 11'',908 + \tau^3 . 0'',05757.$$

Quae expressio aequationis longitudinis lunae saecularis ab ea, quam cel. la Place reperit, puta

$$\delta\xi = +\tau^2 . 11'',135 + \tau^3 . 0'',04398$$

vix sensibiliter differt.

§. 47. E termino (§. 43.)

$$\delta\xi = -mn\,a^3\,(2+\tfrac{63}{16}a^2)\int k^2\,\partial\tau, \text{ sive}$$

$$\delta\xi = -2mn\,a^3\,(1+2a^2)\int k^2\,\partial\tau,$$

aequatio longitudinis lunae periodica oritur, a variationibus excentricitatis lunae pendens, quam Ptolemaeus jam animadverterat. Est nempe vera lunae excentricitas k modo minor modo major excentricitate media

$$K = 0,\ 05505;$$

atque innumerabiles observationes a Ptolemaeo ad nostram usque aetatem docuerunt, excentricitatem lunae correctione indigere, cujus maximus valor est

$$\delta = 0,\ 01172732,$$

et quae semper proportionalis est sinui duplae elongationis solis a medio loco apogaei lunae. Quare posita longitudine solis $= \odot$, longitudine media apogaei lunae $= A$, seu anomalia lunae media $= q$, elongatione lunae a sole $= p$ (§. 2.), erit vera excentricitas lunae

$$k = K + \delta\cos 2\,(\odot - A),$$

vel quum sit $q = \mathbb{C} - A$, ideoque $\odot - A = \odot - \mathbb{C} + q = q - p$,

$$k = K + \delta\cos 2\,(q-p)\ ^*):$$

unde oritur

$$\delta\xi = -2mn\,a^3\,(1+2a^2)\int\partial\tau\,(K^2 + 2K\delta\cos(2q-2p) + \delta^2\cos^2(2q-2p)),$$

h.e. $$\delta\xi = -2mn\,a^3(1+2a^2)\int\partial\tau\,(K^2+\tfrac{1}{2}\delta^2 + 2K\delta\cos 2\,(q-p) + \tfrac{1}{2}\delta^2\cos 4\,(q-p)),$$

---

*) V. *loc. cit. Vol. II. Sect. IV. Cap. 4.* §. 177.

sive rejecto termino $K^2 + \frac{1}{2}\delta^2$, qui integratus formam $(K^2 + \frac{1}{2}\delta^2)\tau$ induit, ideoque ad motum medium pertinet,

$$\delta\xi = -mna^3\delta(1+2a^2)\int\partial\tau\,(4K\cos 2(q-p) + \delta\cos 4(q-p)).$$

§. 48. Restituto jam valore (§. 35.) $\partial t = n'\partial\tau$, variationes angulorum q, p, per motum solis medium ∂t exprimere oportet. Est autem

$$\partial p = 12,\,36892\,\partial t \text{ (§. 2.), et}$$

$$\partial q = 13,\,255865\,\partial t \text{ (V. } \textit{Theor. lunae pag.} \text{ 86. 87):}$$

unde posito $12,\,36892 = p'$, $13,\,255865 = q'$,

nanciscimur

$$\delta\xi = -\frac{n}{n'}ma^3\delta(1+2a^2)\int\partial t\,(4K\cos 2(q-p) + \delta\cos 4(q-p)).$$

Quare quum sit

$$\partial q - \partial p = (q'-p')\,\partial t = 0,\,886945\,\partial t,$$

et motus medius lunae (n) ad motum medium solis (n') ut annus sideralis (31558151 min. sec.) ad mensem sideralem (2360591, 5 min. sec.), ideoque

$$\frac{n}{n'} = 13,\,3687472;$$

posito $q - p = r$, resultat

$$\delta\xi = -\frac{13,\,3687472}{0,\,886945}ma^3\delta(1+2a^2)\int\partial r\,(4K\cos 2r + \delta\cos 4r),$$

ac integrando

$$\delta\xi = -\frac{13,\,3687472}{0,\,386945}ma^3\delta(1+2a^2)\,(2K\sin 2r + \frac{\delta}{4}\sin 4r).$$

Adhibitis superioribus valoribus (§. 46.) reperitur

$$\frac{13,3687472}{0,886945} m a^3 \delta (1 + 2a^2) = 0,001025917;$$

quod in $2K$ et $\frac{\delta}{4}$ ductum praebet valores

$$0,000112953 \text{ et } 0,0000030078.$$

Numeris hisce, qui angulos partibus radii exprimunt, ad minuta secunda reductis, nanciscimur tandem novam longitudinis lunae aequationem

$$\delta\xi = +23'',3 \sin 2(p-q) + 0'',6 \sin 4(p-q):$$

quas autem aliis aequationibus periodicis ejusdem argumenti ab excentricitate lunae pendentibus, quae in libro Euleriano supputatae sunt, jungere oportet.

PASSAGE DE MERCURE SUR LE SOLEIL DU 7 MAY 1799.

PAR

Mr. *L'ABBÉ HENRY.*

Présenté et lû le 4 Juillet 1799.

Le ciel qui avoit été entièrement couvert tous les jours précédens, s'éclaircit heureusement le jour même de ce phénomène, environ une demi-heure avant l'entrée de Mercure, et resta en apparence assez pur tout le reste du jour, de manière qu'on ne cessa pas de voir Mercure pendant toute la durée de son passage. Je dis que le ciel resta assez pur en apparence, car dans la réalité l'atmosphère étoit remplie de vapeurs qui faisoient paroître les bords du soleil dans un mouvement d'ondulation assez considérable, surtout vers le tems de la sortie de Mercure, le soleil étant déjà assez proche de l'horison. Cette circonstance rendant les limites du disque solaire incertaines et y produisant des échancrures assez sensibles, étoit un obstacle pour saisir avec précision les instans des contacts des bords du soleil et de Mercure; aussi il me semble que cette observation n'a pas

toute l'éxactitude qu'elle auroit pû avoir sans cette circonstance.

Je n'ai trouvé la durée de l'entrée et de la sortie de Mercure que $2' 50''$, tandis que selon le calcul elle devoit être de $3' 20''$ du moins, en employant le diamètre de Mercure tel que le donnent les tables de la nouvelle édition de l'Astronomie de Mr. de la Lande.

Pour satisfaire à mon observation il faudroit donc diminuer le diamètre de Mercure de $1'' 92$. Ainsi au lieu de l'employer de $12'' 4$, comme le donnent les Tables pour cette époque, il ne faudroit le supposer que de $10'' 5$. D'un autre côté Mr. Bode ayant bien voulu communiquer son observation à l'Académie, j'y remarque que les durées de l'entrée et de la sortie de Mercure, telles qu'il les a obtenues, se rapprochent beaucoup des durées tirées du calcul. En effet il trouve pour la durée de l'entrée $3' 18''$ et de la sortie $3' 13''$, tandis que le calcul donne pour Berlin $3' 18'' 9$ et $3' 20'' 4$. La durée de l'entrée s'accorde donc fort bien avec le diamètre tiré des tables, mais la durée de la sortie le suppose un peu plus petit d'environ une demi-seconde.

Au reste cette sorte d'observations ne me paroît pas susceptible d'une grande précision; il suffit, pour s'en convaincre de jetter les yeux sur celles des précédens passages de cette planète, et l'on y pourra remarquer que des observateurs habiles, ont différé entr'eux dans le même observatoire, de près d'une minute sur le tems de la même phase. (Voyez les Ephémérides de Milan pour 1788.)

Quoiqu'il en soit j'ai calculé mon observation, ainsi que celle de Mr. Bode, par la méthode de Mr. Du Sejour. (Traité analytique des mouvemens apparens des corps céléstes

Tome I. pag. 434 et suivantes) et je me contente de présenter les équations de condition entre les élémens du passage, sans en tirer, quant à présent, aucun résultat, attendant pour cela que quelques autres observations de ce passage nous soient parvenues.

L'entrée de Mercure ayant précédée midi, j'ai aussi observé les passages au méridien du soleil et de cette planète, ainsi que leurs distances au Zénith. J'en ai conclu les ascensions droites et les déclinaisons de ces deux astres, et ensuite leurs longitudes et latitudes qui, comparées à celles que donnent les tables, m'en ont fait connoître les erreurs. Enfin au moyen de la différence en longitude de ces deux astres et de leur mouvement horaire rélatif, j'en ai déduit l'instant de leur conjonction ainsi que leur longitude et la latitude de Mercure en conjonction.

Le 16 Avril 1799.

La pendule marquoit lors de la culmination de

α de l'Hydre $9^h\ 19'\ 12''\ 7$

α du Lion . $9\ 59\ 9''\ 5$

mais ce jour là on avoit:

Ascension droite apparente en tems de

α de l'Hydre $9^h\ 17'\ 40''\ 92$

α du Lion . $9\ 57'\ 37''\ 53$

partant la pendule avançoit le 16 Avril sur le tems sidéral de $1'\ 32''\ 0$.

Le 7 May.

Passage de Mercure sur le disque du soleil.

La pendule marquoit lors de

		l'entrée	la sortie
du	premier bord . . .	$2^h\ 9'\ 43''\ 0$	$9^h\ 32'\ 35''\ 0$
	centre par estimation	$2\ 11'\ 5''\ 0$	$9\ 34'\ 0''\ 0$
	second bord	$2\ 12'\ 30''\ 0$	$9\ 35'\ 22''\ 0$

et lors du passage au méridien

du premier bord du soleil	$2^h\ 56'\ 59''\ 5$
du centre de Mercure	$2\ 58'\ 59''\ 0$
du second bord du soleil	$2\ 59'\ 12''\ 6$
d'Aldebaran	$4\ 25'\ 16''\ 4$
de Regulus	$3\ 58'\ 31''\ 5$

mais le 7 May on avoit:

Ascension droite apparente en tems de

α du Taureau . .	$4^h\ 24'\ 23''\ 80$
α du Lion . . .	$3\ 57'\ 39''\ 48$.

Ces quantités comparées aux précédentes donnent pour avancement de la pendule sur le tems sidéral le 7 May $52''\ 3$ et pour retardement diurne $2''\ 5$.

La distance apparente au Zénith

du bord inférieur du soleil étoit de . .	$43°\ 19'\ 18''\ 2$
du centre de Mercure étoit de	$43°\ 3'\ 14''\ 3$
Le tems moyen à midi étoit le 7 May de	$23^h\ 56'\ 15''\ 7$

Les tables du soleil donnent pour cet instant :

Longitude vraye du soleil	1^s	16°	46′	30″ 0
Déclinaison boréale du soleil		16°	52′	8″ 9
en employant pour obliquité apparente de l'écliptique		23°	28′	9″ 9
Demi-diamètre horisontal			15′	51″ 44
Parallaxe horisontale				8″ 42
Mouvement horaire			2′	24″ 91
Equation du tems			3′	44″ 3
Lors de la culmination du centre du soleil la pendule marquoit		2^h	58′	6″ 0
Mais elle avançoit alors sur le tems sydéral de				52″ 8
On avoit donc pour le tems sydéral de sa culmination		2^h	57′	13″ 2
D'où suit son ascension droite	1^s	14°	18′	18″ 0
Et sa longitude vraye	1^s	16°	46′	39″ 1

Avec la distance apparente du bord inférieur du soleil au Zénith ci-dessus on trouve, en employant + 53″ 6 pour refraction et 6″ 08 pour parallaxe de hauteur :

Déclinaison vraye boréale du centre du soleil		16°	52′	9″ 2
L'erreur des tables du soleil en longitude étoit		= +		9″ 1
Lors de la culmination de Mercure la pendule marquoit		2^h	58′	59″ 0
Son avancement étoit de				52″ 8
Le tems sydéral du passage de Mercure étoit donc		2^h	58′	6″ 2
et partant son ascension droite	1^s	14°	31′	33″ 0
On avoit pour tems moyen correspondant		23^h	57′	27″ 7

Les Tables de Mercure donnent pour cet instant :

Longitude vraie géocentrique de Mercure	1^s	16°	58′	32″ 8
Latitude vraie géocentrique de Mercure .		0°	3′	38″ 2

Parallaxe horisontale	15″ 45
Diamètre horisontal	12″ 40
Mouvement horaire géocentrique en longitude .	3 55″ 7
Mouvement horaire géocentrique en latitude .	43″ 7

D'ailleurs avec la distance au Zénith de Mercure ci-dessus on trouve, en employant la réfraction de + 53″ 1 et la parallaxe de hauteur — 10″ 5.

Déclinaison boréale de Mercure	16°	52′	26″	0
On a donc longitude géocentrique de Mercure	1ˢ 16°	58′	50″	6
Latitude géocentrique australe de Mercure	0°	3′	38″	1

Ces deux dernières quantités, comparées avec celles qui sont tirées des tables, donnent l'erreur des tables de Mercure nulle en latitude et de + 27″ 8 en longitude.

Lors de la culmination de Mercure, c'est-à-dire	23ʰ	57′	27″	9
La longitude vraye du soleil étoit de .	1ˢ 16°	46′	41″	2
Et par conséquent la différence de longitude géocentrique de Mercure au soleil étoit de		12′	16″	2
Mais à raison du mouvement horaire relatif		— 3′	55″	7
de Mercure au soleil cette différence répond à	3ʰ	7′	24″	5
de tems, qui ajoutées à	23ʰ	57′	27″	9
Donnent pour tems moyen de la conjonction	3ʰ	4′	52″	4
On trouve ensuite longitude des deux astres	1ˢ 16°	54′	13″	8
et latitude géocentrique australe de Mercure	0°	5′	54″	7

Maintenant voici mon observation du passage de Mercure, corrigée de l'avancement de la pendule et réduite en tems moyen et vrai, celle de Mr. Bode vient ensuite:

à St. Pétersbourg.

	Tems de l'entrée						Tems de la sortie					
	moyen			vrai			moyen			vrai		
Premier bord	23h	7′	57″8	23h	11′	41″4	6h	29′	42″0	6h	33′	26″5
Centre . .	23	9′	23″6	23	13′	7″2	6	31′	4″8	6	34′	49″3
Second bord	23	10′	47″3	23	14′	30″9	6	32′	32″5	6	36′	17″0

à Berlin.

Premier bord	22h	0′	28″0	22h	4′	11″6	5h	22′	17″0	5h	26′	1″5
Second bord	22	3′	46″0	22	7′	29″6	5	25′	30″0	5	29′	14″5

Pour former l'angle horaire du soleil je retrancherai 4′ 31″ 0 du tems vrai de chaque phase, pour avoir égard à l'aberration de la lumière.

Elémens, du calcul rélatif au passage de Mercure sur le disque du soleil, dans son noeud descendant le 7 May 1799, tirés des tables astronomiques.

Heure vraie que l'on comptoit à Paris a l'instant de la conjonction

de Mercure et du soleil vuë du centre de la terre	1h 7′ 34″ 0
Longitude héliocentrique de Mercure et de la terre	7s 16° 53′ 43″ 9
Longitude géocentrique du soleil à l'instant de la conjonction	1s 16° 53′ 43′ 9

Obliquité apparente de l'écliptique	23° 28′ 9″ 9
Déclinaison boréale du soleil	16° 54′ 15″ 1
Distance de la terre au soleil	1, 009624
Parallaxe horisontale du soleil	8″ 42
Demi-diamètre horisontal du soleil	15′ 51″ 84
Mouvement horaire du soleil	2′ 24″ 91
Latitude héliocentrique de Mercure en conjonction	7′ 2″ 2
Latitude géocentrique de Mercure	5′ 44″ 2
Distance de Mercure au soleil	0, 443136
Distance de Mercure à la terre	0, 556471
Trajet de la lumiere de Mercure à la terre	4′ 31″ 0
Parallaxe horisontale de Mercure	15″ 45
Diamètre horisontal de Mercure	12″ 40
Mouvement horaire héliocentrique de Mercure en longitude	7′ 13″ 8
Mouvement horaire héliocentrique de Mercure en latitude	+ 53″ 6
Mouvement horaire géocentrique de Mercure en longitude	1′ 30″ 8
Mouvement horaire géocentrique de Mercure en latitude	+ 43″ 7
Mouvement horaire héliocentrique de Mercure au soleil	4′ 48″ 9
Mouvement horaire géocentrique de Mercure au soleil	— 3′ 55″ 7

De ces élémens on conclue.

Longit. Sol.	=	46°	53′	43″	9	
ω	=	23°	28′	9″	9	
δ	=	16°	54′	15″	1	
2δ	=	33°	48′	30″	2	
p	=	0°	0′	8″	42	
σ	=	0°	15′	51″	84	
μ'	=	—	4′	48″	9	
μ	=		3′	55″	7	
ν	=	+	0′	53″	6	
ϑ	=	190°	30′	38″	3	
Φ	=	207°	2′	7″	8	
λ'	=	—	7′	2″	2	
λ	=	—	5′	44″	2	
π	=	0°	0′	15″	45	
$(\pi - p)$	=	0°	0′	7″	03	
s	=	0°	0′	6″	20	
$\Delta = \sigma + s$	=	0°	15′	58″	04	
$\Delta' = \sigma - s$	=	0°	15′	45″	64	
s	=	1, 00335				
∂	=	0, 438512				
$\frac{\partial}{1-\partial}$	=	0, 782252				

Logarithmes

cosin longit. $\odot$	+	9	.	8346311
sin ω	+	9	.	6001661
cos ω	+	9	.	8624984
tang ω	+	9	.	6376677
sin δ	+	9	.	4635538
cos δ	+	9	.	9808176
tang δ	+	9	.	4827362
sin 2δ	+	9	.	7454006
sin p	+	5	.	6101480
sin μ'	—	7	.	1463226
sin μ	—	7	.	0579335
sin m	—	3	.	5016310
sin ϑ	—	9	.	2610670
cos ϑ	—	9	.	9926499
tang ϑ	+	9	.	2684171
sin Φ	—	9	.	6575744
cos Φ	+	9	.	9497441
tang Φ	—	9	.	7078303
sin λ'	—	7	.	3110926
sin λ	—	7	.	2223852
sin π	+	5	.	8742789
sin $(\pi - p)$	+	5	.	5394127
ϱ	+	0	.	0014501
arc 15°	+	9	.	4179686
∂	+	9	.	6423775
$\frac{\partial}{1-\partial}$	+	9	.	8933465

Quantités constantes.

R.

(1) Logar. cos δ cos Φ + 9 . 9305617
(2) Logar. ϱ sin Φ — 9 . 6590245
(3) Logar. ϱ sin δ cos Φ + 9 . 4147480

S.

(1) Logar. cos δ sin Φ — 9 . 6383920
(2) Logar. ϱ cos Φ + 9 . 9511942
(3) Logar. ϱ sin δ sin Φ — 9 . 1225783

E.

(1) — — — — — 1 . 0000000
(2) Logar. sin δ sin π + 5 . 3378327
(3) Logar. ϱ cos δ sin π + 5 . 8565466

K.

(1) Logar. ϱ sin δ sin Φ — 9 . 1225783
(2) Logar. ϱ cos Φ + 9 . 9511942

D.

(1) Logar. ϱ sin δ cos Φ + 9 . 4147480
(2) Logar. ϱ sin Φ — 9 . 6590245

sin ψ.

(1) sin λ cos ϑ . . + 0 . 0016407
(2) Logar. sin $(\pi - p)$ + . 5 . 5324127

n

(1) $\text{Log.}\left(\frac{\cos\vartheta \sin(\pi-p)}{\cos\lambda \sin m}\right) + 2.0234322$ (3) $\text{Log.}\left(\frac{\cos\vartheta}{\cos\lambda \sin m}\right) + 6.4910195$

(2) $\frac{\cos\vartheta}{\cos\lambda \sin m} \sin\vartheta \sin\lambda + 942'' 91$

δy.

$\text{Logar.}\frac{\cos\vartheta \sin(\pi-p)}{13751 \sin m} + 7.8850973 \ldots \quad \text{Log.}\frac{\cos\vartheta}{206265 \sin m} + 1.1765938$

$\text{Logar.}\frac{\cos\vartheta}{206265 \sin m}\left(\frac{\partial}{1-\partial}\right) + 1,0699403 \ldots$

compl. arithm. $\text{Log.}\frac{1}{206264 \sin\mu} - 7.6276414$

Calcul de l'observation de St. Pétersbourg.

On avoit lors de

	l'entrée du		la sortie du	
	premier bord	second bord	premier bord	second bord
Latitude vraie $= 59^\circ\,56'\,13''\,0$, d'où $l = 59^\circ\,51'\,24''\,2$				
heure vraie	$23^h\ 7'\ 10''\ 3$	$23^h\ 9'\ 59''\ 8$	$6^h\ 28'\ 55''\ 7$	$6^h\ 31'\ 46''\ 2$
d'où h . .	$346^\circ\ 47'\ 34''\ 5$	$347^\circ\ 29'\ 57''\ 0$	$97^\circ\ 13'\ 55''\ 5$	$97^\circ\ 56'\ 33''\ 0$
Δ . .	$15'\ 58''\ 04$	$15'\ 45''\ 64$	$15'\ 45''\ 64$	$15'\ 58''\ 04$

Logarithmes

sin l. + 9 . 9369018

cos l. + 9 . 7008459.

sin h	— 9 . 3588315	9 . 3353653	+ 9 . 9965296	9 . 9958138
cos h	+ 9 . 9883587	9 . 9895801	— 9 . 0999869	9 . 1404427
sin h cos l	— 9 . 0596774	8 . 9362112	+ 9 . 6973755	9 . 6966597
cos h cos l	+ 9 . 6892046	9 . 6904260	— 8 . 8008328	8 . 8412886
tang Δ	+ 7 . 6655995	7 . 6599237	+ 7 . 6599237	7 . 6655995.

Avec ces quantités on trouve:

R	+ 0 , 557626	+ 0 , 570213	+ 0 , 980617	+ 0 , 981847
S	— 0 , 413796	— 0 , 388240	+ 0 , 060740	+ 0 , 059188
E	+ 0 , 999946	+ 0 , 999946	+ 9 , 999986	+ 0 , 999986
ψ	$159^\circ\ 29'\ 47''\ 8$	$159^\circ\ 13'\ 11''\ 4$	$20^\circ\ 35'\ 30''\ 0$	$20^\circ\ 18'\ 40''\ 0$
n	— 14419″ 6	— 14213″ 3	+ 12314″ 9	+ 12515″ 6
K	+ 0 , 451531	+ 0 , 449602	— 0 , 122559	— 0 , 127966
D	+ 0 , 193147	+ 0 , 2011 2	— 0 , 100625	— 0 , 097598
y	$1^h\ 59'\ 54''\ 9$	$1^h\ 59\ 24''\ 0$	$1^h\ 56'\ 6''\ 8$	$1^h\ 55'\ 38''\ 6$

On avoit donc à St. Pétersbourg.

Lors du contact extérieur des limbes à l'entrée:

$$y + \delta y = + 1^h\ 59'\ 54''\ 9 - 0,997089\ \delta k + 16 . 0330\ \delta\Delta + 2,7821\ \delta\lambda + 7 . 3106\ \delta p + 61,1779\ \delta\mu.$$

Lors du contact intérieur des limbes à l'entrée:

$$y' + \delta y' = + 1^h\ 59'\ 24''\ 0 - 0,997134\ \delta h' + 16,0623\ \delta\Delta + 2,8635\ \delta\lambda + 7,1027\ \delta p + 60,3239\ \delta\mu.$$

Lors du contact intérieur des limbes à la sortie :

$$'y + \delta' y = + 1^h\,56'\,6''\,8 + 1,\ 001231\ \delta' h - 16,\ 0423\ \delta\Delta - 8,\ 2869\ \delta\lambda - 5,\ 0416\ \delta p - 52,\ 2483\ \delta\mu.$$

Lors du contact extérieur des limbes à la sortie :

$$y'' + \delta y'' = 1^h\,55'\,38''\,6 + 1,\ 001262\ \delta h'' - 16,\ 0130\ \delta\Delta - 8.\ 2045\ \delta\lambda - 5,\ 0063\ \delta p - 53,\ 0998\ \delta\mu.$$

d'où l'on tire les équations de condition suivantes :

Equation de condition entre les contacts extérieurs des limbes lors de l'entrée et de la sortie :

$$0 = - 256''\,3 + 1,\ 001262\ \delta h'' - 0,\ 997089\ \delta h - 32,\ 0460\ \delta\Delta - 10,\ 9866\ \delta\lambda - 12,\ 3169\ \delta p - 114,\ 2777\ \partial\mu.$$

Equation de condition entre les contacts intérieurs des limbes lors de l'entrée et de la sortie :

$$0 = - 197''\,2 + 1,\ 001231\ \delta h + 0,\ 997134\ \delta h' - 32,\ 3046\ \delta\Delta - 11,\ 1504\ \delta\lambda - 12,\ 1443\ \delta p - 112,\ 5722\ \delta\mu.$$

Calcul de l'observation de Berlin.

On avoit lors de

	l'entrée du		la sortie du	
	premier bord	second bord	premier bord	second bord
Latitude vraie = 52° 31′ 30″ 0, d'où l = 52° 25′ 57″ 4				
heure vraie	$21^h\ 59'\ 40''\ 5$	$22^h\ 2'\ 58''\ 7$	$5^h\ 21'\ 30''\ 4$	$5^h\ 24'\ 43''\ 6$
d'où h .	329° 55′ 7″ 5	330° 44′ 40″ 5	80° 22′ 30″ 6	81° 10′ 54″ 0
Δ .	15′ 58″ 04	15′ 45″ 64	15′ 45″ 64	15′ 58″ 04

Logarithmes

sin l + 9 . 8930741

cos l + 9 . 7851123

sin h	— 9 . 7000349	9 . 6890456	+ 9 . 9938453	9 . 9948358
cos h	+ 9 . 9371745	9 . 9407405	+ 9 . 2231591	9 . 1855480
sin h cos l	— 9 . 4851472	9 . 4741579	+ 9 . 7789576	9 . 7799481
cos h cos l	+ 9 . 7222868	9 . 7258528	+ 9 . 0082714	8 . 9706603
tang Δ	+ 7 . 6655995	7 . 6599237	+ 7 . 6599237	7 . 6655995.

Avec ces quantités on trouve:

R	+ 0 , 399046	+ 0 , 401398	+ 0 , 923176	+ 0 , 925999
S	— 0 , 547870	— 0 , 54469	+ 0 , 206016	+ 0 , 206121
E	+ 0 , 999945	+ 0 , 999944	+ 0 , 999975	+ 0 , 999976
ψ	159° 25′ 31″ 7	159° 8′ 32″ 2	20° 37′ 2″ 4	20° 20′ 11″ 0
n	— 14428″ 2	— 14227″ 6	+ 12328″ 0	+ 12526″ 9
K	+ 0 , 512024	+ 0 , 51490	+ 0 , 011375	+ 0 , 003636
D	+ 0 , 161195	+ 0 , 165163	— 0 , 109726	— 0 , 042627
y	52′ 34″ 7	52′ 32″ 3	48′ 28″ 4	48′ 22″ 7

On avoit donc à Berlin.

Lors du contact extérieur des limbes à l'entrée:

$$y + \delta y = + 52' 34'' 7 - 0,996533\,\delta h + 16,0405\,\delta\Delta + 2,8030\,\delta\lambda + 8,1956\,\delta p + 61,2144\,\delta\mu.$$

Lors du contact intérieur des limbes à l'entrée:

$$y' + \delta y' = + 52' 32'' 3 - 0,996530\,\delta h' + 16,0705\,\delta\Delta + 2,8865\,\delta\lambda + 8,1457\,\delta p + 60,3632\,\delta\mu.$$

Lors du contact intérieur des limbes à la sortie :

$$'y + \delta' y = +48' 28'' 4 + 1,000230\,\delta' h - 16,0450\,\delta\Delta - 8,2945\,\delta\lambda - 6,5002\,\delta p - 52,3037\,\delta\mu.$$

Lors du contact extérieur des limbes à la sortie :

$$y'' + \delta y'' = +48' 22'' 7 + 1,000296\,\delta h'' - 16,0156\,\delta\Delta - 8,2119\,\delta\lambda - 6,4532\,\delta p - 53,1476\,\delta\mu.$$

d'où l'on tire ces équations de condition :

Equation de condition entre les contacts extérieurs des limbes lors de l'entrée et de la sortie :

$$0 = -252'' 0 + 1,000296\,\delta h'' + 0,996533\,\delta h - 32,0561\,\delta\Delta - 11,0149\,\delta\lambda - 14,6488\,\delta p - 114',3620\,\delta\mu.$$

Equation de condition entre les contacts intérieurs des limbes lors de l'entrée et de la sortie :

$$0 = -243'' 9 + 1,000230\,\delta' h + 0,996530\,\delta h' - 32,1155\,\delta\Delta - 11,1810\,\delta\lambda - 14,6459\,\delta p - 112,6669\,\delta\mu.$$

ESSAI
SUR LA METHODE
DE TROUVER
LA LATITUDE SUR MER
PAR LES HAUTEURS SIMULTANÉES DE DEUX ASTRES.

PAR

Mr. *KRAFFT.*

Présenté et lû le 28 *Nov.* 1799.

La détermination exacte de la latitude sur Mer est non seulement en elle même un point essentiel de la Navigation hauturiere; le Pilote en a encore un besoin continuel pour corriger son éstime des routes, qu'il n'a d'autres moyens de faire que sur le témoignage assez incertain du Lock et du Compas de route. Malgré ce besoin et le nombre des méthodes qu'on a imaginées pour déterminer la latitude, la Marine n'en possede guerre qu'une seule, celle des hauteurs meridiennes des Astres, qui soit propre à ses usages, parceque contrarié dans la précision de ses observations par bien de circonstances sur Mer, le Pilote trouve dans cette méthode le grand avantage, d'en obtenir pour sa latitude un resultat précisement aussi exact, que l'est l'observation dont il se sert, aulieu que dans l'emploi des autres méthodes

l'erreur commise dans l'observation en produit une plus grande encore sur la latitude qu'on en deduit. Il s'ensuit, que pour employer avec sureté ces sortes de méthodes, il faut être à même de mettre une grande précision dans les observations qui leur servent de base, et que par conséquent leur utilité pour la Marine dépend du perfectionnement des Instrumens dont on se sert sur Mer pour observer les Astres; aussi bientôt après que la Marine se vit en possession des Octans à reflexion, à la place des anciens quartiers anglois, pour prendre hauteur, elle commença à se servir aussi en certains cas des hauteurs des Astres prises hors du meridien mais dans le voisinage du midi. Or cet instrument, vraiment précieux à la Marine, étoit d'abord encore bien éloigné de ce haut degré de perfection où il est porté aujourd'hui; il a reçu surtout une nouvelle augmentation très-importante par l'invention ingenieuse des horizons artificiels de Gerson; les experiences nombreuses de l'illustre Mr. de Zach font voir la précision étonante, avec laquelle donne les hauteurs des Astres jusqu'aux secondes un Sextant de Hadley seulement de 6 pouces en rayon, garni d'un Vernier à louppe et accompagné d'un horison artificiel à Niveau. Ces considérations m'ont porté à faire une sorte de revue des méthodes que je pouvois recueillir pour déterminer la latitude, afin d'examiner, quelles etoient celles, qui après un si grand perfectionnement des Sextans de Hadley meritoient d'être tirées de l'abandon où la Marine devoit les laisser jusqu'ici par la seule raison de l'imperfection de ses anciens instrumens à prendre hauteur; la méthode enoncée dans le titre de ce Mémoire m'a parûe entr'autres meriter une attention particulière à cet égard. Je reserve à la fin de ce mémoire de faire voir et les avantages de cette méthode et les objections qu'on pourroit y faire encore. Le calcul d'après les procédés ordinaires de la Trigonometrie sphèrique en est sans doute trop embarassant pour les Navigateurs astronomes; je me suis donc appliqué à le simplifier et à l'accommoder autant que possible, à l'usage de la Marine. Exposer jusqu'à quel point il me semble y avoir reussi, c'est l'objet de ce mémoire.

Problême.

§. 1. Ayant observé les hauteurs simultanées de deux Astres connûs, trouver la latitude du lieu de l'observation.

Préparation à la Solution.

Après avoir appliqué aux hauteurs observées les corrections nécessaires et tiré des ephèmerides astronomiques pour le tems de l'observation les déclinaisons des deux Astres et leur différence en ascension droite, soit

Pour l'astre qui selon le mouvement diurne	La hauteur vraie	La déclinaison	Leur différence en ascension droite
précède . . .	$= H$	$= D$	$= \vartheta$
suit	$= H^*$	$= D^*$	

Supposons la latitude cherchée boréale $= l$ et les déclinaisons des deux Astres du côté du Pôle élevé et partant aussi boréales, de sorte qu'une latitude negative est australe et qu'une déclinaison australe est negative.

Soient ensuite les quantités calculées d'après ces données

$$\frac{\sin H}{2\cos D\cos\frac{1}{2}\vartheta}+\frac{\sin H^*}{2\cos D^*\cos\frac{1}{2}\vartheta}=M \qquad \frac{\sin(D+D^*)}{2\cos D.\cos D^*\cos\frac{1}{2}\vartheta}=N$$

$$\frac{\sin H}{2\cos D\sin\frac{1}{2}\vartheta}-\frac{\sin H^*}{2\cos D^*\sin\frac{1}{2}\vartheta}=m \qquad \frac{\sin(D-D^*)}{2\cos D.\cos D^*\sin\frac{1}{2}\vartheta}=n.$$

Solution.

1) Qu'on calcule par les nombres M, m, N et n les valeurs

$$A = \frac{MN + mn}{N^2 + n^2 + 1} \text{ et } B = \frac{M^2 + m^2 - 1}{N^2 + n^2 + 1}.$$

2) Si la valeur B est *positive:* il y aura deux latitudes l et λ, également satisfaisantes à l'observation et de même denomination, sçavoir toutes les deux boréales, si la valeur A est positive, et toutes les deux australes, si la valeur A est negative. Pour les trouver, qu'on cherche un angle Φ par l'équation $\sin \Phi = \frac{\sqrt{B}}{A}$ et on aura

$$\sin l = \frac{\sqrt{B}}{tang\ \frac{1}{2}\Phi} \text{ et } \sin \lambda = \text{tang } \tfrac{1}{2}\Phi \,.\, \sqrt{B}.$$

3) Si la valeur B est *negative:* il y aura deux latitudes l et λ également satisfaisantes à l'observation, mais de différente denomination, l'une boreale, l'autre australe. Pour les trouver, qu'on prenne la valeur B positive et qu'on cherche un angle ψ par l'équation $\text{tang } \psi = \frac{\sqrt{B}}{A}$ et on aura

$$\sin l = \frac{\sqrt{B}}{tang\ \frac{1}{2}\psi} \text{ et } \sin \lambda = -\text{tang } \tfrac{1}{2}\psi \,.\, \sqrt{B}.$$

Demonstration.

§. 2. Soient les angles horaires inconnûs des deux Astres, celui de l'Astre précédant $= t$ et celui de l'Astre suivant $= t^*$, l'un et l'autre vers l'orient de la partie australe du meridien, de sorte que $t^* = t + \vartheta$. Les principes de la Trigonometrie sphérique donnent

$$\cos t = \frac{sin\ H - sin\ D\ .\ sin\ l}{cos\ D\ .\ cos\ l} \text{ et } \cos t^* = \frac{sin\ H^* - sin\ D^*\ sin\ l}{cos\ D^*\ .\ cos\ l},$$

d'où, moyennant des transformations connûes de la différence et de la somme des cosinus de deux angles, on obtient

$$\sin\left(t+\tfrac{1}{2}\vartheta\right) = \frac{m - n\,\sin l}{\cos l} \text{ et } \cos\left(t+\tfrac{1}{2}\vartheta\right) = \frac{M - N\,\sin l}{\cos l}.$$

Il s'ensuit, que, quelle que soit la position des deux Astres à l'égard du Meridien, on a toujours

$$\cos l^2 = (m - n\,\sin l)^2 + (M - N\,.\,\sin l)^2$$

ou bien par le developpement des quarrés

$$\sin l^2 - 2A\,.\,\sin l + B = 0.$$

Par la forme de cette équation et par la théorie connue des racines des équations qui en ont de réelles, on voit, que, si B est une quantité positive, les deux racines de l'équation sont de même nom, sçavoir toutes les deux positives ou toutes les deux negatives, selon que la quantité A est positive ou negative, et partant que les deux latitudes satisfaisantes à l'observation sont de même denomination, boréales, si A est une quantité positive; australes en cas du contraire. Si B est une quantité negative, on voit par la même theorie, que, quelle que soit la valeur A, l'une des deux racines est positive et l'autre negative et partant que les deux latitudes également, satisfaisantes à l'observation sont de différente denomination. Soit l'une $= l$; l'autre $= \lambda$ et on aura

$$\sin l = A + \sqrt{(A^2 - B)} \text{ et } \sin\lambda = A - \sqrt{(A^2 - B)}.$$

Donc si B est uue quantité positive; elle ne sauroit en aucun cas possible du problème surpasser la quantité A^2; il y aura donc toujours un angle Φ tel, que $B = A^2\,.\,\sin\Phi^2$ et partant $\sin\Phi = \frac{\sqrt{B}}{A}$; moyennant quoi on a

$$\sin l = A\,(1 + \cos\Phi) = \frac{(1 + \cos\Phi)\sqrt{B}}{\sin\Phi} = \frac{\sqrt{B}}{tg\,\frac{1}{2}\Phi} \text{ et}$$

$$\sin\lambda = A\,(1 - \cos\Phi) = \frac{(1 - \cos\Phi)\sqrt{B}}{\sin\Phi} = tg\,\tfrac{1}{2}\Phi\,\sqrt{B}.$$

De même, si la quantité B est negative, ayant

$$\sin l = A + \sqrt{(A^2 + B)} \text{ et } \sin \lambda = A - \sqrt{(A^2 + B)},$$

quelle que soit la relation entre B et A^2, il y aura toujours un angle ψ tel, que $B = A^2 . \text{tg. } \psi^2$ et partant $\text{tg. } \psi = \frac{\sqrt{B}}{A}$, moyennant quoi on a

$$\sin l = A \frac{(1 + \cos \psi)}{\cos \psi} = \frac{(1 + \cos \psi)\sqrt{B}}{\sin \psi} = \frac{\sqrt{B}}{\text{tg } \frac{1}{2} \psi} \text{ et}$$

$$\sin \lambda = A \frac{(\cos \psi - 1)}{\cos \psi} = - \frac{(1 - \cos \psi)\sqrt{B}}{\sin \psi} = - \text{tg } \tfrac{1}{2} \psi . \sqrt{B}.$$

Corollaires.

§. 3. Joignons à cette solution du problème les Corollaires suivans :

1) La solution que je viens de donner, est bien plus simple et surtout beaucoup moins sujette aux meprises dans le calcul, que la solution ordinaire qui se fait par des procedés connus de la Trigonometrie sphèrique ; celle-cy pour trouver l'une et l'autre des deux latitudes également satisfaisantes à l'observation, demande la résolution de quatre triangles sphèriques, dont trois dans le cas des deux côtés donnés avec l'angle compris, et un dans le cas de tous les trois côtés donnés ; or on sçait, que ce sont précisement les deux cas les plus embarassans et sujets aux meprises dans le calcul des triangles sphèriques obliquangles.

2) Quoique le calcul des quantités

$$A = \frac{M . N + m n}{N^2 + n^2 + 1} \text{ et } B = \frac{M^2 + m^2 - 1}{N^2 + n^2 + 1}$$

ne soit pas fort compliqué : il est pourtant sujet à l'inconveniant, d'obliger le calculateur trop souvent de repasser des lo-

garithmes aux nombres et reciproquement ; et cet inconvenient est d'autant plus grand, quand un ou quelques uns des nombres M, m, N et n sont grands. Voici un moyen de reduire le calcul des deux quantités A et B à autant de simplicité, qu'il semble qu'on puisse desirer. Après avoir calculé les nombres M, m, N et n, qu'on cherche quatre angles α, β, γ et δ par les équations

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{m}{M};\ \text{tang}\,\beta = \frac{n}{N};\ \text{tang}\,\gamma = \frac{\cos\alpha}{M} \text{ et } \text{tang}\,\delta = \frac{\cos\beta}{N}$$

et on trouvera facilement, qu'on aura

$$M.N + mn = \frac{M.N\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$$

$$M^2 + m^2 - 1 = \frac{\cos 2\gamma}{\sin\gamma^2} \text{ et}$$

$$N^2 + n^2 - 1 = \frac{1}{\sin\delta^2}$$

ce qui donne pour A et B les expressions suivantes

$$A = \frac{M.N\cos(\alpha-\beta)\sin\delta^2}{\cos\alpha.\cos\beta} = \frac{\cos(\alpha-\beta).\sin 2\delta}{2\,tg\,\gamma} \text{ et } B = \frac{\cos 2\gamma\,\sin\delta^2}{\sin\gamma^2}$$

qu'on calculera à l'aide des Logarithmes sans aucune difficulté.

3) Malgré ce moyen d'abreger beaucoup le calcul je ne donne point encore la solution précédente pour une methode propre à l'usage de la Marine ; les calculs des angles subsidiaires, sur lesquels est fondée la simplification précédente, pourroient bien être trop longs pour que dans l'application du problème sur Mer on puisse aisément s'en acquitter. Mais je remarque, que la solution que j'ai donnée du problème, est susceptible d'être reduite facilement en Tables bien compendieuses, dont l'application paroit très-propre à la pratique de la Marine.

Manière de former pour l'application de cette méthode des Tables propres à l'usage de la Marine.

§. 4. L'idée et la formation de ces Tables sont fondées sur les considérations suivantes:

1) Les valeurs N et n étant independantes des hauteurs des deux Astres, et les expressions pour les valeurs M et m étant de la forme:

$$M = p \sin H + q \,.\, \sin H^* \text{ et } m = r \sin H + t \,.\, \sin H^*$$

où les coëfficians p, q, r et t n'en dependent non plus: il est clair, que les valeurs

$$A = \frac{MN + mn}{N^2 + n^2 + 1} \text{ et } B = \frac{M^2 + m^2 - 1}{N^2 + n^2 + 1} \text{ sont de la forme:}$$

$$A = a \sin H + b \sin H^* \text{ et } B = c \sin H^2 + d \sin H^{*2}$$
$$+ e \sin H \,.\, \sin H^* + f$$

et que les coëfficians a, b, c, d, e et f, également independans des hauteurs, ne se rapportent qu'à la position des deux Astres, c'est-à-dire, à leurs déclinaisons et à leur différence en ascension droite.

2) Faisant donc dans les expressions des valeurs A et B les substitutions $M = p \sin H + q \sin H^*$ et $m = r \sin H + t \sin H^*$, on trouve d'abord

$$A = \frac{N \,.\, p + n \,.\, r}{N^2 + n^2 + 1} \,.\, \sin H + \frac{N \,.\, q + n \,.\, t}{N^2 + n^2 + 1} \,.\, \sin H^* \text{ et}$$

$$B = \frac{p^2 + r^2}{N^2 + n^2 + 1} \sin H^2 + \frac{q^2 + t^2}{N^2 + n^2 + 1} \,.\, \sin H^{*2}$$
$$+ \frac{2\,(pq + rt)}{N^2 + n^2 + 1} \,.\, \sin H \,.\, \sin H^* - \frac{1}{N^2 + n^2 + 1}$$

de façon, que

$$a = \frac{N \cdot p + n \cdot r}{N^2 + n^2 + 1};\ b = \frac{N \cdot q + n \cdot t}{N^2 + n^2 + 1};\ c = \frac{p^2 + r^2}{N^2 + n^2 + 1}$$

$$d = \frac{q^2 + t^2}{N^2 + n^2 + 1};\ e = \frac{2\,(pq + rt)}{N^2 + n^2 + 1};\ f = \frac{-1}{N^2 + n^2 + 1}.$$

Faisant maintenant, comme cy-dessus (§. 3.)

$\frac{n}{N} = \text{tang}\,\beta$; $\frac{\cos\beta}{N} = \text{tang}\,\delta$ et partant $N^2 + n^2 + 1 = \frac{1}{\sin\delta^2}$

on obtient

$$\frac{N}{N^2 + n^2 + 1} = \frac{\cos\beta \sin 2\delta}{2} \text{ et } \frac{n}{N^2 + n^2 + 1} = \frac{\sin\beta \sin 2\delta}{2}$$

et par conséquant

$$a = \frac{\sin 2\delta}{2}(p \cdot \cos\beta + r \cdot \sin\beta)$$

$$b = \frac{\sin 2\delta}{2}(q \cdot \cos\beta + t \cdot \sin\beta)$$

$$c = (p^2 + r^2)\sin\delta^2;\ d = (q^2 + t^2)\sin\delta^2$$

$$e = 2\,(pq + rt)\sin\delta^2 \text{ et } f = -\sin\delta^2.$$

Or ayant (§. 1.)

$$p = \frac{1}{2\cos D \cdot \cos\frac{1}{2}\vartheta};\ q = \frac{1}{2\cos D^* \cdot \cos\frac{1}{2}\vartheta};$$

$$r = \frac{1}{2\cos D \cdot \sin\frac{1}{2}\vartheta} \text{ et } t = \frac{-1}{2\cos D^* \sin\frac{1}{2}\vartheta}$$

et partant

$$p^2 + r^2 = \frac{1}{\cos D^2 \cdot \sin\vartheta^2};\ q^2 + t^2 = \frac{1}{\cos D^{*2} \cdot \sin\vartheta^2} \text{ et}$$

$$pq + rt = \frac{-\cos\vartheta}{\cos D \cdot \cos D^* \sin\vartheta^2}$$

on obtient pour le calcul de ces coëfficians les expressions suivantes simples et commodes:

$$a = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\vartheta + \beta\right) . \sin 2\delta}{2 \cos D . \sin \vartheta}$$

$$b = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\vartheta - \beta\right) . \sin 2\delta}{2 \cos D^* . \sin \vartheta}$$

$$c = \frac{\sin \delta^2}{\cos D^2 . \sin \vartheta^2}$$

$$d = \frac{\sin \delta^2}{\cos D^{*2} \sin \vartheta^2}$$

$$e = \frac{-2 \sin \delta^2 . \cos \vartheta}{\cos D . \cos D^* . \sin \vartheta^2} \text{ et}$$

$$f = -\sin \delta^2.$$

Il est clair, qu'à l'aide de ces formules il est facile, de calculer les valeurs, de ces coëfficians pour tel couple et pour autant de couples d'étoiles fixes connûes qu'on voudra, et de former de Tables dont chacune présente pour le couple auquel elle appartient les valeurs de A et B sous la forme $A = a . \sin H + b . \sin H^*$ et $B = c . \sin H^2 + d . \sin H^{*2} + e . \sin H . \sin H^* + f$ et qui par conséquent sera applicable à toutes les hauteurs des deux etoiles qu'on aura pu observer.

3) Comme le problème proposé a son application principale dans le cas desastreux, où le Pilote pressé de connoître

sa latitude n'a pour resource qu'un ciel peu serein qui ne lui fait voir que les étoiles les plus luisantes, et se couvrant des nuages fait craindre, qu'on ne manque le moment unique de leurs passages par le meridien: il suffiroit de choisir pour la formation de pareilles tables les étoiles de la premiere grandeur.

4) Ces Tables serviroient aux Pilotes de trouver leur latitude par des operations du calcul ordinaire dans la Navigation hauturiere, et elles leur rendroient ce service aussi longtems que les déclinaisons et les ascensions droites des étoiles aux quelles elles se rapportent, n'auront pas changé trop considerablement. Or parmi les étoiles de la premiere grandeur la plus grande variation annuelle en ascension droite est de 66 sec. et la plus petite de 30 sec. et comme il ne s'agit ici que de la différence en ascension droite, la plus grande variation annuelle de l'angle ϑ ne va qu'à 36 sec.; et encore n'a-t-elle lieu que pour le couple d'étoiles α de la Chevre et la luisante de la Lyre; pour les autres elle est beaucoup moindre; p. e. pour Aldebaran et Rigel elle n'est, que de 8 sec. par an. Pour ce qui regarde la declinaison, la plus grande variation annuelle pour les étoiles de la premiere grandeur n'en va qu'à 20 sec. pour quelques unes; pour la plupart elle est bien moindre encore p. e. pour Aldebaran elle est de 8 sec. et de 5 sec. seulement pour Rigel; d'ailleurs il est assez facile de calculer d'avance les petites corrections qu'il faudroit appliquer à la latitude calculée par les Tables, lorsque l'époque des observations aura considérablement devancé celle qu'on a mise pour base dans la formation des Tables.

5) Pour donner un echantillon de pareilles Tables choisissons les deux étoiles brillantes, Aldebaran dans la Constellation du Taureau et Rigel dans celle d'Orion. On trouve dans les catalogues des étoiles pour le commencement de l'année 1800:

	la déclinaison	l'ascension droite
d'Aldébaran	16° 5′ 45″ . Bor.	66° 6′ 49″
de Rigel . .	8° 26′ 35″ . Austr.	76° 13′ 53″

Comme Aldebaran précéde Rigel dans le sens du mouvement diurne et que la déclinaison de Rigel est australe : on a

$$D = 16^\circ\ 5'\ 45''; \quad D^* = -8^\circ\ 26'\ 35'' \text{ et } \vartheta = 10^\circ\ 7'\ 4''.$$

Avec ces élémens je trouve

$$N = 0,0703346; \quad n = 2,4778491;$$

$$\beta = 88^\circ\ 22'\ 26''.7 \text{ et } \delta = 21^\circ\ 58'\ 11''.4;$$

moyennant quoi j'obtiens par les équations données cy-dessus (§. 4. nro. 2.)

$la = 0,3121514 +$	$a = +2,051878$
$lb = 0,2973340 -$	$b = -1,983052$
$lc = 0,6913466 +$	$c = +4,912998$
$ld = 0,6660768 +$	$d = +4,635288$
$le = 0,9729348 -$	$e = -9,395822$
$lf = 9,1460180 -$	$f = -0,139964.$

De sorte que pour le couple d'étoiles: Aldebaran et Rigel, on a

$$A = 2,051878 . \sin H - 1,983052 . \sin H^* \text{ et}$$

$$B = 4,912998 . \overline{\sin H^2} + 4,635288 . \sin H^{*2}$$
$$- 9,395822 . \sin H . \sin H^* - 0,139964.$$

Comme dans le calcul de la latitude on n'a nul besoin de connoître ces coëfficians mêmes, excepté le nombre absolu f qui n'est affecté d'aucun Sinus, et qu'il suffit d'avoir les logarithmes des autres: je les donne sous le titre: Logarithme du multiplicateur, et je forme la Table suivante:

Echantillon des Tables:

Couple d'Etoiles: Aldebaran et Rigel.
(H A) designe la hauteur vraie d'Aldebarani et
(H R) celle de Rigel

Pour calculer A		Pour calculer B	
	Logar. du multiplicateur.		Logar. du multiplicateur.
+ sin (H A)	0, 3121514	+ sin $(H A)^2$	0, 6913466
— sin (H R)	0, 2973340	+ sin $(H R)^2$	0, 6660768
		— sin (HA) . sin (HR)	0, 9729348
		— 0, 1399645.	

§. 5. Si donc le Pilote ne voit que ces deux étoiles et s'il ne les voit que pour le peu de tems qu'il lui faut pour en prendre les hauteurs simultanées: il pourra trouver à l'aide de cette Table la latitude du vaisseau par un calcul simple et facile et qui est necessairement à la portée de tout Pilote hauturier. Eclaircissons ce calcul par un exemple:

Exemple.

On a observé sur Mer les hauteurs simultanées d'Aldebaran et de Rigel, et après les avoir corrigées en raison de la hauteur d'oeil au dessus de la surface de la Mer et en raison de

la refraction, on en a conclu la hauteur vraie d'Aldebaran 40° 30′ et celle de Rigel 17° 10′. On demande la latitude du Vaisseau.

On a donc (H A) = 40° 30′ et (H R) = 17° 10′ et le calcul se fera de la façon suivante:

Calcul pour les valeurs A et B.

Pour A.	Pour B.	
l . sin (HA) = 9 , 8125444 +	l . sin (HA)^2 = 9 , 6250888 +	Partie I = + 2 , 072214
l . multipl. = 0 , 3121514	l . multipl. = 0 , 6913466	Part. II = + 0 , 403802
l . Part. I = 0 , 1246958 +	l . Partie I = 0 , 3164354 +	+ 2 , 476016
l . sin (HR) = 9 , 4700461 —	l . sin (HR)^2 = 8 , 9400922 +	Part. III = — 1 , 801045
l . multipl. = 0 , 2973340	l . multiplic. = 0 , 6660768 +	+ 0 , 674971
l . Part. II = 9 , 7673801 —	l . Partie II = 9 , 6061690 +	Nombr. abs. = — 0 , 139964
Partie I = + 1 , 332586	l . sin (HA) = 9 , 8125444 +	B = + 0 , 535007
Partie II = — 0 , 585302	l . sin (HR) = 9 , 4700461 —	
A = + 0 , 747284	l : multiplic. = 0 , 9729348	
	l . Partie III = 0 , 2555253 —	

Calcul pour les latitudes.

l . B = 9 , 7283595

l . $\sqrt{B}$ = 9 , 8641797

l . A = 9 , 8734858

l . $\frac{\sqrt{B}}{A}$ = 9 , 9906939 = l sin Φ

Φ = 78° 10′ 52″

$\frac{1}{2}\Phi$ = 39° 5′ 26″

l . $\sqrt{B}$ = 9 , 8641797

l . tg $\frac{1}{2}\Phi$ = 9 , 9097722

l . $\frac{\sqrt{B}}{\text{tg}\,\frac{1}{2}\Phi}$ = 9 , 9544075 = l . sin l

l . tg $\frac{1}{2}\Phi\sqrt{B}$ = 9 , 7739519 = l . sin λ

et partant les deux latitudes sont:

l = 64° 12′ 11″ . Bor. et λ = 36° 27′ 27″ Bor.

Comme donc le Pilote connoit toujours à quelque chose près l'endroit où il se trouve, il lui sera facile de distinguer, la quelle de ces deux latitudes est celle de son vaisseau.

Quelques cas particuliers du Problème.

§. 6. Dans le nombre de cas différens qui sont compris dans ce Problème, il y a quelques uns, qui meritent un developpement particulier:

1) Les deux Astres ayant la même ascension droite.

Pour ce cas on a $\vartheta = 0$; donc $m = \infty$ et $n = \infty$; ce qui donne

$A = \frac{M \cdot N + m \cdot n}{N^2 + n^2 + 1} = \frac{m}{n}$ et $B = \frac{M^2 + m^2 - 1}{N^2 + n^2 + 1} = \frac{m^2}{n^2}$ et partant $\frac{\sqrt{B}}{A} = \sin \Phi = 1$ et $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Phi = 1$. D'où l'on trouve

$$\sin l = \sin \lambda = \sqrt{B} = A = \frac{m}{n} = \frac{\cos D^* \sin H - \cos D \cdot \sin H^*}{\sin (D - D^*)}.$$

On obtient le même resultat aussi par les formules données cy-dessûs (§. 3. nro. 2.); car ayant $m = \infty$ et $n = \infty$, on a $\alpha = 90°$; $\beta = 90°$; $\gamma = 0$ et $\delta = 0$ et par conséquent

$$A = \frac{\cos (\alpha - \beta) \cdot \sin 2\delta}{2 \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\sin \delta}{\operatorname{tg} \gamma} \text{ et}$$

$$B = \frac{\cos 2\gamma \cdot \sin \delta^2}{\sin \gamma^2} = \frac{(1 - \operatorname{tg} \gamma^2) \sin \delta^2}{\operatorname{tg} \gamma^2} = \frac{\sin \delta^2}{\operatorname{tg} \gamma^2} \text{ donc}$$

$\frac{\sqrt{B}}{A} = 1 = \sin \Phi$; $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Phi = 1$ et

$\sin l = \sin \lambda = \sqrt{B} = A = \frac{\sin \delta}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{0}{0}$. Pour trouver la valeur de cette quantité indeterminée, on remarque, que

$\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{M \cdot \cos \beta}{N \cdot \cos \alpha}$; et partant $\frac{\sin \delta}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{M \cdot \cos \beta}{N \cdot \cos \alpha} = \frac{m \cdot \sin \beta}{n \cdot \sin \alpha} = \frac{m}{n}$; comme cy-dessûs.

2) Les deux Astres ayant la même déclinaison.

Pour ce cas à cause de $D^* = D$, on a $n = o$:

$$M = \frac{\sin H + \sin H^*}{2 \cos D . \cos \frac{1}{2}\vartheta}; \; m = \frac{\sin H - \sin H^*}{2 \cos D . \sin \frac{1}{2}\vartheta} \text{ et } N = \frac{\operatorname{tg} D}{\cos \frac{1}{2}\vartheta}$$

$$\text{donc } \operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{M} = \frac{\sin H - \sin H^*}{(\sin H + \sin H^*) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta}$$

$$\beta = o; \; \operatorname{tg} \gamma = \frac{\cos \alpha}{M} \text{ et } \operatorname{tg} \delta = \frac{\cos \frac{1}{2}\vartheta}{\operatorname{tg} D} \text{ d'où l'on obtient}$$

$$A = \frac{\cos \alpha \sin 2\delta}{2 \operatorname{tg} \gamma} \text{ et } B = \frac{\cos 2\gamma . \sin \delta^2}{\sin \gamma^2}.$$

Ayant trouvé les valeurs A et B, le reste du calcul s'acheve, comme cy-dessus.

3) Les deux Astres ayant la même hauteur.

Pour ce cas, à cause de $H = H^*$, on aura (§. 4.)

$A = (a + b) . \sin H$ et $B = (c + d + e) . \sin H^2 + f$.

C'est ainsi p. e. que pour Aldebaran et Rigel on a, en cas d'égalité des hauteurs simultanées, $A = o,\, o688258 . \sin H$ et $B = o,\, 1524683 \sin H^2 - o,\, 1399645$, et le calcul de la latitude est bien simple et court; mais ce n'est pas le cas, que peut attendre le Pilote pressé de connoître sa latitude.

4) Les deux Astres se levant ou se couchant en même tems.

Pour ce cas on a $H = H^* = o$, et partant $A = o$ et $B = f = -\sin \delta^2$; d'où en prenant B positif, on obtien

$\text{tg}\,\psi = \frac{\sin\,\delta}{A} = \infty$ et partant $\text{tg}\,\frac{1}{2}\psi = 1$. On a donc $\sin\,l = \sin\,\delta$ et $\sin\,\lambda = -\sin\,\delta$; les deux latitudes sont donc l'une et l'autre, $= \delta$, l'une boréale, l'autre australe.

§. 7. Après la methode des hauteurs meridiennes, qui, quand on peut en faire usage, est sans contredit la plus directe et la plus sure, il paroit, que la methode, que je viens d'exposer et d'accommoder à l'usage de la Marine, merite d'être mise au niveau de celle de deux hauteurs successives d'un même Astre. 1) Parce qu'elle est independante de toute mesure du tems, par laquelle celle-cy n'est que trop bornée et qui sur Mer est toujours sujette à bien de précautions et pourroit bien en cas d'accidens y manquer absolument. 2) Parce qu'elle ne demande aucune correction en raison du sillage et du rhum de vent que le vaisseau a couru dans l'intervalle du tems qui separe les deux hauteurs successives d'un même astre et 3) parce qu'elle est practicable même dans le tems le moins favorable, où le ciel n'accorderoit au Navigateur, que l'apparition courte et passagere de deux étoiles connues. Mr. Bezout dans la suite de son cours de mathématiques à l'usage de la Marine, fait une courte mention de cette methode et y oppose des objections; d'abord, qu'elle demande le concours de deux observateurs, et puis qu'on ne sauroit être assuré, qu'avec deux observateurs les deux observations seront parfaitement simultanées. Comme Mr. Bezout ajoute lui même des moyens de remedier à ces difficultés, si elles avoient reellement lieu; je ne m'y arrete pas d'avantage.

SUR L'OCCULTATION DE ε DES GEMAUX du 8 Août 1798.

PAR

Mr. *L'ABBÉ HENRY.*

Présenté et lû le 27 Février 1800.

Je vais commencer par exposer l'observation que j'ai faite de cette éclipse avec le détail des circonstances qui l'ont accompagnées, j'y joindrai ensuite les observations de la même éclipse, faites à Leipzick, Dantzick, Ofen et Celle, telles qu'elles ont été publiées par la voye des éphemerides géographiques de Mr. de Zach ; et après avoir calculé chacune séparément, j'en comparerai les résultats, à l'effet d'en déduire la différence des Méridiens de ces différentes villes avec celui de Pétersbourg.

La nuit de cette éclipse le ciel fut très sérein jusques vers les deux heures du matin, où quelques légers nuages s'élèverent au nord ouëst. Ces nuages, en se portant de cette plage vers l'opposée, passèrent devant la lune et la couvrirent par intervalles. Cette circonstance m'empêcha d'observer l'instant précis de l'immersion de l'étoile, qui d'un instant à l'autre dispa-

roissoit et reparoissoit alternativement à mes yeux. Cependant comme l'instant, où elle me parût réellement cachée par la lune, n'est éloigné de celui où jé l'apperçus pour la derniere fois, que de quatre à cinq secondes, l'erreur sur le tems précis de cette phase ne surpasse pas cette quantité. Lors de l'émersion de l'étoile le ciel étoit pûr, au moins dans la région de la lune, et malgré la grande clarté du crépuscule je saisis très-bien l'instant où elle reparût.

La petite incertitude qu'il y a sur le tems de l'immersion de l'étoile, ne m'a pas empêché de la faire concourir avec l'émersion à la détermination de la conjonction des deux astres.

La pendule reglée sur le tems sydéral marquoit le 8 Août lors de

$$1^{\prime} \begin{cases} \text{immersion } 0^h\ 5^{\prime}\ 10^{\prime\prime}\ 0 \\ \text{émersion } 0^h\ 51^{\prime}\ 32^{\prime\prime}\ 5. \end{cases}$$

Le passage de Vega au méridien eut lieu, les

7		$18^h\ 30^{\prime}\ 3^{\prime\prime}\ 5$
8	à	$18^h\ 29^{\prime}\ 57^{\prime\prime}\ 0$
9		$18^h\ 29^{\prime}\ 50^{\prime\prime}\ 5.$

Le tems du passage de la même étoile, calculé d'après le catalogue de Mr. Maskeline, ou son ascension droite apparente en tems, étoit à cette époque de $18^h\ 30^{\prime}\ 7^{\prime\prime}\ 84$. La comparaison de cette quantité avec les précédentes fait voir, que le retard de la pendule, à l'instant de la culmination de Vega, étoit le 7, de $4^{\prime\prime}\ 3$; le 8, de $10^{\prime\prime}\ 84$ et le 9, de $17^{\prime\prime}\ 3$, tandisque le retardement diurne, ou plus exactement, le retardement dans l'espace de 24 heures sydérales étoit de $-\ 6^{\prime\prime}\ 5$.

Retranchant le tems du passage de Vega au méridien le 8 Août des tems marqués par la pendule lors de l'immersion et

de l'émersion de ε des gemaux, on a $5^h\ 35'\ 15''$ et $6^h\ 21'\ 35''\ 5$ pour les intervalles qui séparent la culmination de Vega de l'immersion de ε des gemaux, mais a raison de $6''\ 5$ en $23^h\ 56'$, la pendule a dû retarder pendant ces intervalles de $1''\ 48$ et de $1''\ 72$, ce qui ajouté a $10''\ 84$ donne $12''\ 3$ et $12''\ 6$ pour le retard total de la pendule, lors de l'immersion et de l'émersion de cette étoile. On avoit donc

	en tems sydéral	en dégrés de l'équateur
Immersion . .	$0^h\ 5'\ 22''\ 3$	$1°\ 20'\ 30''\ 7$
Emersion . .	$0^h\ 51'\ 45''\ 1$	$12°\ 56'\ 16''\ 5$

On trouve pour le tems moyen correspondant à ce tems sydéral

Immersion . . $14^h\ 54'\ 21''\ 7$

Emersion . . $15^h\ 40'\ 37''\ 0.$

L'ascension droite moyenne et la déclinaison moyenne de ε des gemaux ont été tirées du Catalogue de Mr. de Zach. J'en ai conclu pour le 8 Août le

Lieu apparent de l'étoile

Ascension droite apparente	$97°\ 53'\ 1''\ 8$
Déclinaison boréale apparente	$25°\ 19'\ 5''\ 1$
Obliquité apparente de l'écliptique	$23°\ 27'\ 58''\ 9$
Longitude apparente	$97°\ 7'\ 51''\ 6$
Latitude boréale apparente	$2°\ 2'\ 46''\ 4$

On avoit le 8 Août a $15^h\ 17'\ 29''\ 4$ tems moyen du milieu de l'éclipse, au méridien de Pétersbourg, (d'après les tables de la lune, qui sont dans la troisième édition de l'astronomie de Mr. de la Lande)

Longitude vraie de la lune		$3^s\ 6°\ 34'\ 0''\ 5$
Latitude vraie boréale (croissante)		$2°\ 55'\ 34''\ 5$
Mouvement horaire en longitude pour l'heure	précéd.	$35'\ 1''\ 61$
	suiv. .	$35'\ 3''\ 95$
Mouvement horaire en latitude pour l'heure	précéd. .	$2'\ 33''\ 51$
	suiv. . .	$2'\ 32''\ 28$
Logar. $\left(\frac{\text{mouv. hor. longit.}}{1^h}\right)$ pour l'heure	précéd.	9 . 7662476
	suiv.	9 . 7667226
Logar. $\left(\frac{\text{mouv. hor. latit.}}{1^h}\right)$ pour l'heure	précéd.	8 . 6298342
	suiv.	8 . 6263404
Parallaxe horisontale de la lune à St. Pétersbourg		$58'\ 48''\ 5$
Demi-diamètre horisontal de la lune		$32'\ 11''\ 01$
Variation horaire de la parallaxe pour l'heure	précéd. .	$+\ 3''\ 2$
	suiv. . .	$+\ 2''\ 2$
Variation horaire du diamètre pour l'heure	précéd. .	$+\ 1''\ 7$
	suiv. . .	$+\ 1''\ 2$

Tels sont les élémens qui vont servir de base aux calculs de cette éclipse.

Voici maintenant les observations, annoncées au commencement de ce mémoire, auxquelles je joins aussi la mienne

Tems moyen des phases

Lieux	Immersion	Emersion
Pétersbourg .	$14^h\ 54'\ 21''\ 7$	$15^h\ 40'\ 37''\ 0$
Ofen . . .	$13^h\ 57'\ 27''\ 6$	$14^h\ 35'\ 37''\ 2$
Dantzick . .	$14^h\ 1'\ 39''\ 4$	$14^h\ 46'\ 45''\ 1$
Leipzick . .	$13^h\ 35'\ 17''\ 5$	$14^h\ 19'\ 31''\ 5$
Celle . . .	$13^h\ 27'\ 42''\ 5$	$14^h\ 13'\ 29''\ 2$

Va maintenant suivre l'exposé des données et des principaux résultats du calcul de chacune de ces observations, dans le même ordre qu'elles sont présentées ici.

Calcul de l'observation de St. Pétersbourg.

	On avoit lors de l'Immersion	Emersion
Lieu vrai de la lune :		
Longitude de la lune . .	3ˢ 6° 20′ 30″ 4	3ˢ 6° 47′ 31″ 5
Latitude vraie boréale . .	2° 54′ 35″ 3	2° 56′ 33″ 2
Parallaxe horisontale . .	58′ 47″ 3	58′ 49″ 3
Demi-diamètre horisontal .	16′ 5″ 2	16′ 5″ 7
On avoit aussi :		
Tems sydéral en dégrès ou .	— — —	— — —
Ascension droite du zénith .	1° 20′ 30″ 7	12° 56′ 16″ 5
Latitude de Pétersbourg . . .	59° 56′ 23″ 0	
Angle de la verticale correspondant	— 9′ 58″ 6	
Déclinaison du zénith	59° 46′ 24″ 4	
Longitude du zénith . . .	35° 11′ 20″ 8	42° 25′ 1″ 4
Latitude boréale du zénith .	51° 59′ 16″ 7	48° 23′ 35″ 2
Longitude lune moins longit. zénith	61° 9′ 9″ 6	54° 22′ 30″ 1
Au moyen de quoi on trouve :		
Parallaxe de longitude . . .	+ 31′ 54″ 7	+ 32′ 0″ 6
Latitude boréale apparente .	2° 8′ 56″ 8	2° 13′ 31″ 5
Demi-diamètre apparent . .	16′ 10″ 5	16′ 13″ 0
On tire de ce qui précède :		
Différ. longit. appar. lune et étoile	— 14′ 55″ 9	+ 12′ 10″ 3
Différ. latit. appar. lune et étoile	+ 6′ 2″ 5	+ 10′ 37″ 2

À	l'Immersion	Emersion
Ajoutant ces quantités au lieu de étoile, on a d'après l'observation :		
Longitude apparente de la lune	3ˢ 6° 52′ 55″ 7	3ˢ 7° 20′ 4″ 9
Latitude boréale apparente de la lune	2° 8′ 48″ 9	2° 13′ 23″ 6
Mais on a selon les tables de la lune citées :		
Longitude apparente de la lune	3ˢ 6° 52′ 25″ 1	3ˢ 7° 19′ 52″ 1
Latitude boréale apparente de la lune	2° 8′ 56″ 8	2° 13′ 31″ 5
D'où résulte pour erreur des tables de la lune		
En longitude par défaut . . .	30″ 6	29″ 8
En latitude par excés	7″ 9	7″ 9
On trouve enfin :		
Différ. longit. vraie lune et étoile	46′ 50″ 2	19′ 50″ 6
Distance en tems à la conjonction	1ʰ 20′ 14″ 1	33′ 57″ 2
Tems moyen des phases . .	14ʰ 54′ 21″ 7	15ʰ 40′ 37″ 0
Tems moyen de la conjonction	16 14′ 35″ 8	16 14′ 34″ 2
Longit. des deux astres en conjonct.	3ˢ 7° 7′ 51″ 6	
Latitude vraie boréale de la lune	2° 57′ 51″ 9	

Calcul de l'observation d'Ofen.

On avoit lors de	l'Immersion	Emersion
Lieu vrai de la lune :		
Longitude vraie de la lune	3ˢ 6° 13′ 42″ 8	3ˢ 6° 35′ 59″ 5
Latitude vraie boréale . .	2° 54′ 5″ 5	2° 55′ 43″ 1
Parallaxe horisontale . .	58′ 49″ 6	58′ 51″ 5
Demi-diamètre horisontal	16′ 5″ 2	16′ 5″ 7

	Immersion	Emersion
On avoit aussi:		
Longitude moyenne du soleil	4ˢ 17° 45′ 34″ 2	4ˢ 17° 47′ 48″ 0
Tems moyen des phases en dégrés	6ˢ 29° 21′ 54″ 0	7ˢ 8° 54′ 18″ 0
Ascension droite du zénith	11ˢ 17° 6′ 28″ 2	11 26° 42′ 6″ 0
Latitude d'Ofen	47° 29′ 44″ 0	
Angle de la verticale correspondant	— 11′ 26″ 0	
Déclinaison du zénith . .	47° 18′ 18″ 0	
Longitude du zénith . . .	13° 6′ 22″ 1	20° 46′ 47″ 6
Latitude boréale du zénith	47° 15′ 33″ 8	43° 36′ 29″ 7
Longitude lune moins longitude zénith	83° 7′ 16″ 4	75° 49′ 7″ 6
Au moyen de quoi on trouve:		
Parallaxe de longitude . .	+ 39′ 44″ 3	+ 41′ 29″ 7
Latitude boréale apparente .	2° 11′ 5″ 6	2° 15′ 33″ 5
Demi-diamètre apparent .	16′ 7″ 0	16′ 8″ 9
On tire de ce qui précède:		
Differ. longit. appar. lune et étoile	13′ 55″ 5	10′ 6″ 6
Differ. latit. appar. lune et étoile	8′ 8″ 8	12′ 35″ 9
Ajoutant ces quantités au lieu de l'étoile, on a d'après l'observation:		
Longit. appar. de la lune .	3ˢ 6° 53′ 56″ 1	3ˢ 7° 17′ 58″ 2
Latitude appar. boréale de la lune	2° 10′ 54″ 4	2° 15′ 22″ 3
Mais selon les tables de la lune on a		
Longit. appar. de la lune .	3ˢ 6° 53′ 27″ 1	3ˢ 7° 17′ 29″ 2
Latit. appar. boréale de la lune	2° 11′ 5″ 6	2° 15′ 33″ 5

À	l'Immersion	Emersion
Ces quantités comparées aux précédentes donnent pour erreurs des tables		
En longitude par défaut . .	29″ 0	29″ 0
En latitude par excès . . .	11″ 2	11″ 2
On trouve enfin :		
Differ. longit. vraie lune et étoile	53′ 39″ 8	31′ 23″ 1
Distance en tems à la conjonction	1ʰ 31′ 52″ 4	53′ 43″ 9
Tems moyen des phases . .	13ʰ 57′ 27″ 6	14ʰ 35′ 37″ 2
Tems moyen de la conjonction	15ʰ 29′ 20″ 0	15 29′ 21″ 1
Long. des deux astres en conjonction	3ˢ 7° 7′ 51″ 6	
Latit. vraie boréale de la lune	2° 57′ 48″ 9.	

Calcul de l'observation de Dantzick.

On avoit lors de	l'Immersion	Emersion
Lieu vrai de la lune :		
Longit. vraie de la lune .	3ˢ 6° 17′ 5″ 1	3ˢ 6° 43′ 24″ 8
Latit. vraie boréale . . .	2° 54′ 20″ 4	2° 56′ 15″ 5
Parallaxe horisontale . . .	58′ 45″ 9	58′ 49″ 6
Demi-diamètre horisontal .	16′ 5″ 2	16′ 5″ 7
On avoit aussi :		
Longit. moyenne du soleil .	4ˢ 17° 44′ 57″ 0	4ˢ 17° 46′ 42″ 1
Tems moyen de phases en dégrès	7ˢ 0° 24′ 51″ 0	7ˢ 11° 41′ 13″ 5
Ascension droite du zénith	11ˢ 18° 9′ 48″ 0	11ˢ 29° 27′ 55″ 6
Latitude de Dantzick . .	54° 20′ 48″ 0	
Angle de la verticale correspondant	— 10′ 52″ 8	
Déclinaison du zénith . .	54° 9′ 55″ 2	

	Immersion	Emersion
Longitude du zénith . . .	20° 21′ 47″ 8	28° 29′ 50″ 0
Latitude boréale du zénith .	52° 19′ 26″ 1	48° 13′ 51″ 1
Long. lune moins long. zénith	75° 55′ 19″ 2	68° 13′ 36″ 6
Au moyen de quoi on trouve:		
Parallaxe de longitude . .	+ 35′ 3″ 9	+ 36′ 35″ 2
Latitude boréale apparente .	2° 8′ 25″ 1	2° 12′ 58″ 2
Demi-diamètre apparent .	16′ 10″ 3	16′ 10″ 2
On tire de ce qui précède:		
Differ. longit. appar lune et étoile	15′ 12″ 1	12′ 38″ 9
Differ. latit. appar. lune et étoile	5′ 42″ 2	10′ 5″ 3
Ajoutant ces quantités au lieu de l'étoile, on à d'après l'observation :		
Longitude appar. de la lune .	3ˢ 6° 52′ 39″ 7	3ˢ 7° 20′ 30″ 7
Latitude boréale appar. de la lune	2° 8′ 18″ 6	2° 12′ 51″ 7
Mais selon les tables de la lune on a:		
Longitude appar. de la lune .	3ˢ 6° 52′ 10″ 6	3ˢ 7° 20′ 1″ 5
Latit. boréale appar. de la lune	2° 8′ 25″ 6	2° 12′ 58″ 7
La comparaison de ces quantités aux précédentes donne pour erreurs des tables :		
En longitude par défaut . .	29″ 1	29″ 2
En latitude par excès . . .	7″ 0	7″ 0
On a enfin :		
Differ. longit vraie lune et étoile	50′ 16″ 0	23′ 56″ 3
Distance en tems à la conjonction	1ʰ 26′ 6″ 3	41′ 0″ 7

	1' Immersion	Emersion
Tems moyen des phases . . .	$14^h\ 1'\ 34''\ 4$	$14^h\ 46'\ 44''\ 9$
Tems moyen de la conjonction	$15^h\ 27'\ 45''\ 7$	$15^h\ 27'\ 45''\ 2$
Longit. des deux astres en conjonct.	$3^s\ 7°\ 7'\ 51''\ 6$	
Latit. vraie boréale de la lune	$2°\ 57'\ 52''\ 8$	

Calcul de l'observation de Leipzick.

On avoit lors de	l'Immersion	Emersion
Lieu vrai de la lune:		
Longitude vraie de la lune .	$3^s\ 6°\ 16'\ 17''\ 1$	$3^s\ 6°\ 42'\ 6''\ 8$
Latitude vraie boréale	$2°\ 54'\ 16''\ 7$	$2°\ 56'\ 9''\ 5$
Parallaxe horisontale	$58'\ 48''\ 4$	$58'\ 50''\ 6$
Demi-diamètre horisontal .	$16'\ 5''\ 5$	$16'\ 6''\ 2$
On avoit aussi:		
Ascension droite moyenne du soleil	$137°\ 44'\ 47''\ 1$	$137°\ 46'\ 36''\ 1$
Tems moyen des phases en dégrès	$203°\ 49'\ 22''\ 5$	$214°\ 52'\ 49''\ 5$
Ascension droite du zénith .	$341°\ 34'\ 9''\ 6$	$352°\ 39'\ 25''\ 6$
Latitude de Leipzick . . .	$51°\ 19'\ 14''\ 0$	
Angle de la verticale correspond.	$—\ 11'\ 12''\ 3$	
Déclinaison du zénith . .	$51°\ 8'\ 1''\ 7$	
Longitude du zénith . . .	$12°\ 8'\ 26''\ 2$	$20°\ 48'\ 21''\ 5$
Latitude boréale du zénith .	$52°\ 29'\ 12''\ 2$	$48°\ 15'\ 29''\ 8$
Longit. lune moins longit. zénith	$84°\ 7'\ 50''\ 9$	$75°\ 53'\ 45''\ 3$
Au moyen de ces quantités on trouve:		
Parallaxe de longitude . . .	$+\ 35'\ 42''\ 5$	$+\ 38'\ 12''\ 4$
Latitude boréale apparente .	$2°\ 7'\ 48''\ 1$	$2°\ 12'\ 34''\ 9$
Demi-diamètre apparent . .	$16'\ 7''\ 1$	$16'\ 9''\ 4$

A	l'Immersion	Emersion
On tire de ce qui précède :		
Differ longit. appar. lune et étoile	15′ 22″ 3	12′ 57″ 3
Differ. latit. appar. lune et étoile	4′ 53″ 1	9′ 49″ 9
Ajoutant ces quantités au lieu de l'étoile, on a d'après l'observation :		
Longitude apparente de la lune	3ˢ 6° 52′ 29″ 3	3ˢ 7° 20′ 48″ 9
Latitude apparente boréale lune	2° 7′ 39″ 5	2° 12′ 26″ 3
Mais les tables de la lune donnent :		
Longit appar. de la lune . .	3ˢ 6° 51′ 59″ 6	3ˢ 7° 20′ 19″ 2
Lat. boréale appar. de la lune	2° 7′ 48″ 1	2° 12′ 34″ 9
De la comparaison de ces quantités aux précéd. résulte pour erreur des tables :		
En longitude par défaut . . .	29″ 7	29″ 7
En latitude par excès	8″ 6	8″ 6
On trouve enfin :		
Differ. longit. vraie lune et étoile	51′ 4″ 8	25′ 15″ 1
Distance en tems à la conjonction	1ʰ 27′ 27″ 1	43′ 13″ 9
Tems moyen des phases . .	13ʰ 35′ 17″ 5	14ʰ 19′ 31″ 3
Tems moyen de la conjonction	15ʰ 2′ 44″ 6	15ʰ 2′ 45″ 2
Longit. des deux astres en conjonct.	3ˢ 7° 7′ 51″ 6	
Latit. vraie boréale de la lune . . .	2° 57′ 51″ 2	

Calcul de l'observation de Celle.

On avoit lors de	l'Immersion	Emersion
Lieu vrai de la lune:		
Latitude vraie boréale	3^s 6° 17′ 23″ 9	3^s 6° 44′ 8″ 1
Longitude vraie de la lune . .	2° 54′ 21″ 9	2° 56′ 18″ 8
Parallaxe horisontale	58′ 48″ 0	58′ 49″ 9
Demi-diamètre horisontal .	16′ 5″ 2	16′ 5″ 7
On avoit aussi:		
Ascension droite moyenne du soleil	137° 44′ 55″ 8	137° 46′ 48″ 6
Tems moyen des phases en dégrès	201° 55′ 37″ 5	213° 22′ 17″ 8
Ascension droite du zénith .	339° 40′ 33″ 3	351° 9′ 6″ 4
Latitude de Celle	52° 37′ 12″ 0	
Angle de la verticale correspond.	— 11′ 4″ 9	
Déclinaison du zénith . . .	52° 26′ 7″ 1	
Longitude du zénith . . .	11° 59′ 20″ 4	20° 51′ 57″ 2
Latitude boréale du zénith .	54° 14′ 8″ 5	49° 51′ 28″ 6
Longit. lune moins longit. zénith	84° 17′ 53″ 1	75° 52′ 0″ 5
On trouve à l'aide de ces quantités:		
Parallaxe de longitude . . .	+ 34′ 14″ 2	+ 36′ 55″ 5
Latitude boréale apparente .	2° 6′ 41″ 5	2° 11′ 43″ 2
Demi-diamètre apparent . .	16′ 5″ 8	16′ 8″ 8
On tire de ce qui précède:		
Differ. longit. appar. lune et étoile	16′ 23″ 9	13′ 1″ 6
Differ. latit. appar. lune et étoile	3′ 54″ 1	8′ 55″ 8
Ajoutant ces différences à la longitude et à la latitude de l'étoile on a:		
Longitude appar. de la lune .	3^s 6° 52′ 8″ 5	3^s 7° 21′ 54″ 0
Latitude appar. boréale lune .	2° 6′ 17″ 6	2° 11′ 19″ 3

	Immersion	Emersion
Mais les tables de la lune donnent :		
Longit. boréale appar. lune .	$3^s\ 6^\circ\ 51'\ 38''\ 1$	$4^s\ 7^\circ\ 21'\ 3''\ 6$
Latitude boréale appar. lune .	$2^\circ\ 6'\ 41''\ 5$	$2^\circ\ 11'\ 43''\ 2$
La comparaison de ces quantités aux précéd. donne pour erreurs des tables :		
En longitude, par défaut . .	$30''\ 4$	$30''\ 4$
En latitude, par excès . . .	$23''\ 9$	$23''\ 9$
Enfin on trouve :		
Differ. longit. vraie lune et étoile	$49'\ 57''\ 3$	$23'\ 13''\ 1$
Distance en tems à la conjonction	$1^h\ 25'\ 32''\ 2$	$39'\ 45''\ 7$
Tems moyen des phases . .	$13^h\ 27'\ 42''\ 5$	$14^h\ 13'\ 29''\ 2$
Tems moyen de la conjonction	$14^h\ 53'\ 14''\ 7$	$14^h\ 53'\ 14''\ 8$
Longit. lune et étoile en conjonct.	$3^s\ 7^\circ\ 7'\ 51''\ 6$	
Latit. vraie boréale de la lune . .	$2^\circ\ 57'\ 35''\ 9.$	

Maintenant réunissons sous un même point de vüe les tems que l'on comptoit, à St. Pétersbourg, Ofen, Dantzick, Leipzick et Celle, lors de la conjonction de la lune avec ε de gémaux, ce qui nous fournira cette petite table.

Tems moyen de la conjonction de la lune avec ε des gémaux.

Lieux	par l'immersion	par l'émersion	milieu
Pétersbourg	$16^h\ 14'\ 35''\ 8$	$16^h\ 14'\ 34''\ 2$	$16^h\ 14'\ 35''\ 0$
Ofen . . .	$15^h\ 29'\ 20''\ 0$	$15^h\ 29'\ 21''\ 1$	$15^h\ 29'\ 20''\ 5$
Dantzick . .	$15^h\ 27'\ 45''\ 7$	$15^h\ 27'\ 45''\ 2$	$15^h\ 27'\ 45''\ 5$
Leipzick . .	$15^h\ 2'\ 44''\ 6$	$15^h\ 2'\ 45''\ 2$	$15^h\ 2'\ 44''\ 9$
Celle . . .	$14^h\ 53'\ 14''\ 7$	$14^h\ 53'\ 14''\ 8$	$14^h\ 53'\ 14''\ 7$

Supposant la différence des méridiens entre Paris et St. Pétersbourg de $1^h\ 51'\ 58''$, on a

Différence des méridiens entre

		Pétersbourg	Paris
et	Ofen . . .	$45'\ 14''\ 5$	$1^h\ 6'\ 43''\ 5$
	Dantzick .	$46'\ 49''\ 5$	$1^h\ 5'\ 8''\ 5$
	Leipzick .	$1^h\ 11'\ 50''\ 1$	$40'\ 7''\ 9$
	Celle . . .	$1^h\ 21'\ 20''\ 3$	$30'\ 37''\ 7$

Toutes ces observations s'accordent à donner environ $30''$ secondes pour erreur des tables de la lune en longitude. En prenant un milieu entre les erreurs des tables de la lune en latitude, qui résultent des observations de Pétersbourg, Dantzick et Leipzick, dont la différence ne va qu'à $1''$, $\frac{1}{2}$, on a pour erreur des tables en latitude $7''\ 8$, qui est à un dixième de seconde près celle que donne l'observation de St. Pétersbourg.

L'observation d'Ofen porte cette erreur jusqu'à 11 secondes et celle de Celle jusqu'à $23''\ 9$. J'ignore à quoi tient précisément cette différence; mais je présume qu'une partie peut venir de l'influence qu'a sur la parallaxe de latitude de la lune, la latitude du lieu que je suppose n'être pas aussi exactement connue dans ces deux villes que dans les autres; et peut-être une autre partie est elle dûe à une petite inexactitude sur le tems des phases.

RÉSULTATS
DE
L'OBSERVATION DE LA LUNE
AU MÉRIDIEN
ET
DE L'OCCULTATION DE ♑ DU SAGITTAIRE,
du 21 Août 1798;
FAITE À LA TOUR ASTRONOMIQUE DE ST. PÉTERSBOURG.

PAR

Mr. *L'ABBÉ HENRY.*

Présenté et lû à l'Académie le 27 Févr. 1800.

Je vais exposer le détail de mon observation et les résultats que j'en ai tiré; j'y joindrai ensuite le calcul des observations de la même éclipse, qui ont été faites à Mirepoix et à Paris, et j'en comparerai les résultats avec les miens, à l'éffét d'en déduire la différence des méridiens de ces deux villes avec celui de Pétersbourg.

Le ciel, après avoir été couvert le 21 Août toute la journée, s'éclaircit peu de tems après le coucher du soleil et j'apperçus assez distinctement l'étoile qui devoit être occultée

par la lune, quoiqu'à peine élevée de plus de trois-à-quatre dégrés au dessus de l'horison. Il me fût donc possible d'observer d'abord les passages de la lune et de l'étoile au méridien, et ensuite l'immersion de l'étoile. Mais l'émersion n'ayant précédé le coucher de ces deux astres que de quelques minutes, et les bords de l'horison étant d'ailleurs chargés de vapeurs, je ne pus observer cette phase.

La pendule reglée sur le tems sidéral marquoit lors de la culmination du premier bord de la lune	$18^h\ 29'\ 7''\ 8$
de la culmination de ♑ du sagittaire	$18^h\ 32'\ 32''\ 0$
de l'immersion de ♑ du sagittaire	$19^h\ 7'\ 8''\ 0$
de la culmination d'α de l'aigle	$19^h\ 40'\ 25''\ 0$
de la culmination d'α du cygne	$20^h\ 34'\ 4''\ 5$

Le lendemain 22 Août la pendule marquoit à l'instant

de la culmination d'α de l'aigle	$19^h\ 40'\ 20''\ 5$
de la culmination d'α du cygne	$20^h\ 34'\ 39''\ 0$

Ces tems comparés aux précédens donnent $4''\ 5$ pour le retardement de la pendule en un jour sidéral. Mais on avoit le 21 Août d'après les meilleurs catalogues connus.

Ascensions droites apparentes en tems

de ♑ du sagittaire	$18^h\ 33'\ 14''\ 13$
d'α de l'aigle	$19^h\ 40'\ 57''\ 28$
d'α du cygne	$20^h\ 34'\ 36''\ 81$

Ces ascensions droites comparées avec les passages réspectifs de ces mêmes étoiles au méridien, donnent les quantités suivantes pour le retardement de la pendule lors de ces passages $-\ 32''\ 13$; $-\ 32''\ 28$; $-\ 32''\ 31$. D'où il suit que le retardement de la pendule étoit lors des passages de la lune et de l'étoile au méridien et de l'immersion de l'étoile, de $-\ 32''\ 1$, $-\ 32''\ 1$, $-\ 32''\ 4$.

Partant on avoit le 21 Août tems sidéral:

de la culmination du premiere limbe de la lune	$18^h\ 29'\ 39''\ 9$
de la culmination de ☌ du sagittaire	$18^h\ 33'\ 4''\ 1$
de l'immersion de ☌ du sagittaire	$19^h\ 7'\ 40''\ 4$

Ce tems converti en tems moyen donne tems moyen:

de la culmination du premiere limbe de la lune	$8^h\ 28'\ 27''\ 4$
de la culmination de ☌ du sagittaire	$8^h\ 31'\ 51''\ 1$
de l'immersion de ☌ du sagittaire	$9^h\ 6'\ 21''\ 7$

On tire des tables de la lune (qui sont dans la troisième édition de l'astronomie de Mr. de la Lande) pour l'instant de la culmination du premier bord de la lune:

Longitude vraie de la lune	$9^s\ 6°\ 54'\ 39''\ 9$
Latitude vraie australe de la lune	$3°\ 1'\ 21''\ 3$
Parallaxe horisontale à Pétersbourg	$55'\ 36''\ 1$
Demi-diamètre horisontal	$15'\ 12''\ 75$
Mouvement horaire en longitude	$31'\ 19''\ 52$
Mouvement horaire en latitude	$2'\ 9''\ 74$

On conclue de ces données pour l'instant de l'occultation de ☌ du sagittaire les quantités suivantes:

Longitude vraie de la lune	$9^s\ 7°\ 14'\ 27''\ 8$
Latitude vraie australe de la lune	$3°\ 2'\ 45''\ 3$
Parallaxe horisontale à Pétersbourg	$55'\ 35''\ 1$
Demi-diamètre horisontal	$15'\ 12''\ 2$

On avoit d'ailleurs le 21 Août suivant les Catalogues:

Ascension droite apparente de ☌ du sagittaire .	$278°\ 16'\ 2''\ 0$
Déclinaison australe apparente	$27°\ 11'\ 0''\ 6$
D'où on tire avec l'obliquité apparente de l'écliptique	$23°\ 27'\ 58''\ 9$
Longitude apparente de ☌ du sagittaire . .	$277°\ 21'\ 58''\ 1$
Latitude australe apparente	$3°\ 55'\ 42''\ 7$

Distance au zénith observée du bord inférieur de la lune	87° 10′ 27″ 3
Distauce au zénith observée de ☉ du sagittaire	86° 53′ 22″ 9

Le Baromètre marquoit alors 28″ 3 et le Thermomètre + 13,3

On a la réfraction relative à la premiere de .	15′ 1″ 5
et pour la réfraction de l'étoile	14′ 5″ 2
La parallaxe en hauteur de la lune étant d'ailleurs de	55′ 32″ 7
et son demi-diamètre en déclinaison, ou horisontal, de	15′ 12″ 7
On trouve pour différence de déclinaison de la lune et de l'étoile	52′ 44″ 7
Cette quantité retranchée de la déclinaison de l'étoile	27° 11′ 0″ 6
Il reste pour la déclinaison vraie du centre de la lune	26° 18′ 15″ 9
Au moyen du demi-diamètre horisontal de la lune et de sa déclinaison, on trouve son demi-diamètre en ascension droite de . .	16′ 58″ 1
Ainsi l'ascension droite du premier bord étant de	277° 24′ 58″ 5
On a pour ascension droite du centre de la lune	277° 41′ 56″ 6
d'où on tire, en employant pour obliquité de l'écliptique	23° 27′ 58″ 9
Longitude vraie de la lune	276° 54′ 27″ 0
Latitude vraie australe de la lune	0° 1′ 20″ 9

Comparant cette longitude et cette latitude de la lune avec la longitude et la latitude que nous avons tirées des tables de la lune, on a pour erreurs des tables :

En longitude, par excès	12″ 9
En latitude par défaut	0″ 4
Maintenant si l'on convertit en degrès le tems sidéral de l'occultation de ☉ du sagittaire, on trouve pour ascension droite du zénith . . .	286° 55′ 1″ 8

La latitude de Pétersbourg étant de . . .	59°	56′	23″ 0
et l'angle de la verticale correspondant de .	—	9′	58″ 6
On a pour déclinaison du zénith corrigée . .	59°	46′	24″ 4
d'où on tire avec la même obliquité de l'écliptique, que ci-dessus	23°	27′	58″ 9
Longitude vraie du zénith de Pétersbourg . .	326°	17′	21″ 8
Latitude vraie boréale du zénith	79°	51′	27″ 0

Au moyen de la longitude vraie et de la latitude vraie de la lune, de la longitude et de la latitude du zénith on trouve les trois quantités suivantes:

Parallaxe de longitude de la lune		7′	25″ 0
Latitude australe apparente de la lune . . .	3°	57′	43″ 3
Demi-diamètre apparent		15′	14″ 5
et puisque la longitude vraie de la lune est .	277°	14′	27″ 4
On a pour sa longitude apparente	277°	7′	2″ 4

La longitude et la latitude apparentes de la lune que nous venons de trouver étant comparées respectivement avec celles de l'étoile trouvée plus haut, on trouve:

Différence de longitude apparente sur l'écliptique	14′	55″ 7
Différence de latitude apparente	2′	0″ 6

Avec le demi-diamètre apparent de la lune et la différence de latitude apparente on trouve aussi:

Différence de longit. appar. sur l'écliptique . .	15′	9″ 4
Cette dernière différence, comparée à la précédente, donne pour excès de la longitude de la lune tirée des tables citées		13″ 7

La même différence de longitude que nous venons de trouver, diminuée de la parallaxe en longitude, laisse pour

Différence de longitude vraie de la lune et de l'étoile	7′	44″ 4

Le tems correspondant à cette différence, est à raison du mouvement horaire de la lune en longitude de	14′ 50″ 7
Cette quantité ajoutée au tems moyen de l'immersion	9ʰ 6′ 21″ 7
Donne le tems moyen de la conjonction à . .	9ʰ 21′ 12″ 4
L'équation du tems (soustractive) étant alors de	— 2′ 41″ 5
Le tems vrai de la conjonction étoit . . .	9ʰ 18′ 30″ 9
La longitude vraie de la lune étant alors . .	9ˢ 7° 21′ 58″ 1
Et sa latitude vraie australe de	3° 3′ 15″ 1

Calcul de l'observation de Mirepoix.

	tems vrai	tems moyen	tems moyen en dégrès
On avoit à l'émersion	7ʰ 44′ 38″ 7	7ʰ 47′ 20″ 2	116° 50′ 3″ 0

Les tables de la lune donnent pour cet instant:

Longitude vraie de la lune	9ˢ 7° 32′ 37″ 7
Latitude vraie australe de la lune	3° 3′ 58″ 5
Parallaxe horisontale à Mirepoix	55′ 37″ 6
Demi-diamètre horisontal	15′ 12″ 2

On avoit aussi:

Longitude ou ascension droite moyenne du soleil	150° 21′ 16″ 3
Tems moyen de l'émersion en dégrés . . .	116° 50′ 3″ 0
Ascension droite du zénith de Mirepoix . .	267° 11′ 19″, 3
Latitude de Mirepoix	43° 5′ 19″ 0
Angle de la verticale correspondant . . .	— 11′ 26″ 9
Déclinaison du zénith	42° 53′ 52″ 1
Longitude du zénith	264° 48′ 43″ 6
Latitude boréale du zénith	66° 18′ 50″ 2
Longitude lune moins longitude zénith . .	12° 43′ 54″ 1

Au moyen de quoi on trouve :

Parallaxe de longitude de la lune		4′	57″ 9
Latitude apparente de la lune (australe) . .	3°	56′	17″ 6
Demi-diamètre apparent de la lune . . .		15′	17″ 7
Longitude apparente de la lune	9ˢ 7°	37′	35″ 6
La longitude apparente et la latitude apparente de la lune que nous venons de trouver, comparées avec la longitude apparente et la latitude apparente de l'étoile, on a	—	—	—
Différence de longitude apparente calculée .		15′	37″ 5
Différence de latitude apparente		0′	34″ 9
Au moyen de cette différence de latitude apparente et du demi-diamètre apparent de la lune on trouve aussi la différence de longitude apparente sur l'écliptique . . .		15′	19″ 2
On a donc pour excès de la longitude des tables			18″ 3
Retranchant la parallaxe de longitude de la différence de longitude apparente on a pour différence de longitude vraie		10′	21″ 3
Cette quantité répond en tems à		19′	50″ 0
Ce qui étant retranché du tems moyen de l'émersion	7ʰ	47′	20″ 2
On a pour le tems moyen de la conjonction .	7ʰ	27′	30″ 2
Longitude vraie de la lune en conjonction - .	9ˢ 7°	21′	58″ 1
Latitude vraie australe de la lune	3°	3′	15″ 1

Calcul de l'observation de Paris.

On avoit à	tems moyen	tems moyen en dégrès
l'émersion	7ʰ 52′ 12″ 2	118° 3′ 3″ 0.

Les tables de la lune donnent pour cet instant :

Longitude vraie de la lune	9ˢ 7°	34′	11″ 0
Latitude vraie australe de la lune	3°	4′	5″ 0
Parallaxe horisontale à Paris		55′	37″ 0
Demi-diamètre horisontal		15′	12″ 2

On avoit aussi :

Ascension droite moyenne du soleil . . .		150°	21′	23″ 7
Tems moyen de l'emersion en dégrès . . .		118°	3′	3″ 0
Ascension droite du zénith de Paris . . .		268°	24′	26″ 7
Latitude de Paris . , ...		48°	50′	15″ 0
Angle de la verticale correspondant . . .		—	11′	22″ 2
Déclinaison du zénith		48°	38′	52″ 8
Longitude du zénith		266°	34′	33″ 6
Latitude boréale du zénith		72°	6′	1″ 6
Longitude de la lune moins celle du zénith .		10°	59′	37″ 4

Aves ces quantités on trouve :

Parallaxe de longitude de la lune			3′	16″ 9
Latitude apparente australe de la lune . .		3°	58′	2″ 7
Demi-diamètre apparent de la lune . . .	9ˢ	7°	37′	27″ 9

La longitude apparente de la lune et la latitude apparente que nous venons de trouver, comparées avec la longitude et la latitude apparente de l'étoile on trouve :

Différence de longitude apparente calculée . .		15′	29″ 8
Différence de latitude apparente		2′	20″ 0

Au moyen de cette différence de latitude apparente et du demi-diamètre apparent de la lune, on trouve aussi :

Différence de longitude appar. sur l'écliptique		15′	7″ 2
Et partant pour excès de la longitude des tables			22″ 6
Retranchant la parallaxe de longitude de la différence de longitude apparente on a pour différence longitude vraie		11′	50″ 3
Cette quantité qui répond en tems à . . .		22′	40″ 5
Etant retranchée du tems moyen de l'émersion	7ʰ	52′	12″ 2
On trouve pour le tems moyen de la conjonction	7°	29′	31″ 7
La longitude vraie de la lune étant alors de .	9ˢ	7°	21′ 58″ 1
et sa latitude vraie boréale de		3°	3′ 15″ 1

Maintenant comparant les tems que l'on comptoit lors de la conjonction à Paris, Mirepoix et St. Pétersbourg, on trouve pour différence des méridiens entre Paris et Mirepoix $2' 1'' 5$, entre Paris et St. Pétersbourg $1^h 51' 40'' 7$. Ces différences s'eloignent assez considérablement de celles qui sont d'ailleurs connues et que j'ai supposées dans mon calcul du lieu de la lune, savoir $1' 51'' 0$ et $1^h 51' 58''$. Mais j'observe que l'excès de la premiere $9'' 5$ et le défaut de la seconde $17'' 2$ sont respectivement proportionelles à l'excès de l'erreur des tables que donne chacune de ces observations sur celle que j'ai déduite de la mienne, c'est-à-dire à $4'' 6$ et $8'' 9$, ce qui suppose sur le tems de l'observation de Mirepoix une erreur de $8'' 8$ et sur celle de Paris, une de $17''$. En admettant ces corrections, on trouve par les trois observations la même erreur des tables $13'' 7$ et pour différences des méridiens $1' 53'' 3$ et $1^h 51' 58'' 7$, qui différent à peine de celle qu'on connoît déjà d'ailleurs, et que j'ai supposée dans ces calculs.

Au reste ces erreurs sur le tems de l'observation n'auront pas de quoi surprendre, si on fait attention que c'est l'émersion de l'étoile qui a été observée à Mirepoix et à Paris, et que cette phase a eu lieu du côté du bord éclairé de la lune qui, étant d'ailleurs dans sa plus grande déclinaison australe, n'étoit pas fort élevée sur les horisons de ces lieux, ce qui a pu nuire à l'exactitude de l'observation.

SUPPLEMENT AU MÉMOIRE SUR LA REDUCTION DES DISTANCES LUNAIRES.

PAR

Mr. *K R A F F T.*

Présenté et lû le 13 *May* 1800.

Dans un Mémoire inseré au Tome 7me des nouveaux Actes de l'Académie *) j'ai donné une nouvelle méthode de degager les distances apparentes de la Lune au Soleil ou à une étoile fixe, de l'effet combiné de la refraction et de la parallaxe, et partant de réduire en distances vraies les distances des deux astres observées sur Mer pour en conclure la longitude du vaisseau. Je me suis servi, le premier à ce que je sache, du moyen des sinus-verses des angles pour resoudre ce problème, et j'ai démontré, que la solution que j'en ai obtenue, est rigoureuse dans ses principes et dans tous ses développemens, sûre dans les opé-

*) Méthode à la portée des navigateurs pour réduire en distance vraie la distance apparente de la lune au soleil ou une étoile fixe, présentée à l'Académie l'an 1791. Nova Acta Acad. Petrop. T. VII.

rations du calcul, et si facile dans son application à tous les cas possibles, qu'elle doit être nécessairement à la portée de tout Pilote hauturier. L'accueil que le Bureau de longitude à Londres a fait à cette méthode, et deux excellens Mémoires *) qu'a publiés ensuite sur le même sujet le célèbre Capitaine de vaisseau de la Marine royale d'Espagne, Mr. de Mendoza y Rios, qui a bien voulu me les communiquer, me donnent l'occasion de faire ce petit supplement à mon Mémoire. De toutes les solutions connûes de cet important problème de l'Astronomie nautique celles qui employent les sinus-verses, étant reconnues préferables à plusieurs égards, et Mr. de Mendoza ayant encore enrichi la Marine d'une solution de la même éspece; il m'a parû intéressant et utile, de présenter ces deux méthodes dans leur rapprochement et dans leur liaison réciproque; et quoique l'une et l'autre présente aux Pilotes hauturiers le grand avantage, de pouvoir se dispenser pour les appliquer de toute connoissance des Logarithmes; cependant comme il y en a aussi, qui sont très-bons mathématiciens, il ne sera peut-être pas hors de propos, d'exposer ici une manière d'abreger la pratique de ces deux méthodes par le moyen des Logarithmes, à l'usage des Pilotes qui en sont au fait; voila le contenu de ce supplement.

---

*) Memoria sobre alcunos methodos nuevos de calcular la longitud por las distancias lunares y applicacion de su teorica à la solucion de otros problemas de navegacion, por Don Joseph de Mendoza y Rios, Capitan de Navio de la Real Armada, individuo de la Real Sociedad de Londres, de Paris y de Lisboa. Madrid anno de 1795. Recherches sur les solutions des principaux problèmes de l'Astronomie nautique, par le même à Londres l'an 1797.

Méthode prèmiere.

Soit

d . . . la distance observée
t . . . la différence des haut. observées } des centres des deux astres.
H . . . la différence des haut. vraies
X . . . la distance vraie cherchée

$$\cos\omega = \frac{\text{cos haut. vr. du centre } \mathbb{C} \text{ . cos haut. vr. du centre } \odot}{2 \text{ cos haut. app. du centre } \mathbb{C} \text{ . cos haut. app. du centre } \odot}$$

Ce-ci supposé, et designant par Σ le sinus-verse d'un angle, j'ai démontré dans mon Mémoire cité cy-dessus, que

$$\Sigma X = \Sigma H + \Sigma(d+\omega) + \Sigma(d-\omega) - \Sigma(t+\omega) - \Sigma(t-\omega)$$

et que par conséquant, on trouve la distance vraie cherchée X par les opérations suivantes:

1) Ajoutez ensemble les sinus-verses des trois angles H, $d+\omega$ et $d-\omega$:

2) Ajoutez ensemble les sinus-verses des deux angles $t+\omega$ et $t-\omega$;

3) Prennez la différence de ces deux sommes; cette différence est le sinus-verse de la distance vraie cherchée.

Méthode seconde.

Soit

d . . . la distance observée
u . . . la somme des haut. observées } des centres des deux astres.
K . . . la somme des haut. vraies
X . . . la distance vraie cherchée
ω . . . un angle tel, comme cy-dessûs.

Mr. de Mendoza demontre dans ses Mémoires cités cy-dessus, que

$$\Sigma X = \Sigma(180° - K) + \Sigma(d+\omega) + \Sigma(d-\omega) + \Sigma(u+\omega) + \Sigma(u-\omega) - 4.$$

Il appelle Su. sinus-verse d'un angle le sinus-verse de son supplement à 180°, et partant en vertu de la méthode de Mr. de Mendoza on trouve la distance vraie cherchée X par les opérations suivantes :

1) Ajoutez ensemble le Su. sinus-verse de l'angle K et les sinus-verses des quatres angles $d + \omega$, $d - \omega$, $u + \omega$ et $u - \omega$.

2) Diminuez la somme de quatre unités ; le reste est le sinus-verse de la distance vraie cherchée.

Mr. de Mendoza deduit cette méthode avec plusieurs autres, de l'expression générale de la relation entre la distance vraie cherchée et les données du problème ; pour le but que je me propose ici, il suffit de faire voir, de quelle manière elle resulte immediatement de la mienne.

L'expression donnée cy-dessus pour l'angle ω se transforme par les regles connûes de la Trigonometrie en celle-cy :

$2\cos\omega = \frac{\cos H + \cos K}{\cos t + \cos u}$, de sorte que

$$\cos H + \cos K = 2\cos\omega \cdot \cos t + 2\cos\omega \cdot \cos u = \cos(t+\omega) + \cos(t-\omega) + \cos(u+\omega) + \cos(u-\omega)$$

ou bien

$$\Sigma H + \Sigma K = \Sigma(t+\omega) + \Sigma(t-\omega) + \Sigma(u+\omega) + \Sigma(u-\omega) - 2;$$

et partant

$$\Sigma(t+\omega) + \Sigma(t-\omega) = \Sigma H + \Sigma K - \Sigma(u+\omega) - \Sigma(u-\omega) + 2.$$

Substituant cette valeur dans l'expression de ΣX donnée par ma solution on obtient

$$\Sigma X = -\Sigma K + \Sigma (d+\omega) + \Sigma (d-\omega) + \Sigma (u+\omega) + \Sigma (u-\omega) - 2\,;$$ d'où, à cause de

$\Sigma K = 2 - \Sigma (180° - K)$, on a

$$\Sigma X = \Sigma (180° - K) + \Sigma (d+\omega) + \Sigma (d-\omega) + \Sigma (u+\omega) + \Sigma (u-\omega) - 4$$

ce qui est la solution donnée par Mr. de Mendoza.

La comparaison de ces deux méthodes offre les remarques suivantes:

1) Pour ce qui regarde l'angle auxiliaire ω, qui est le même dans l'une et l'autre méthode, M. de Mendoza a fourni à la Marine une table complette de ces angles pour toutes les parallaxes horizontales et toutes les hauteurs de la Lune, dans le recueil de ses Tables publiées à Londres to reduce the observed distances from the Moon to the Sun or a Star in order to find the longitude.

2) La méthode de M. de Mendoza, en admettant outre les sinus-verses aussi les Su-sinus-verses des angles, jouit de l'avantage d'avoir, à l'exception d'un terme absolu tous les termes additifs dans l'expression de la distance vraie; la mienne, en admettant deux termes negatifs, ne demande que des sinus-verses, sans avoir besoin d'aucun Su-sinus-verse, et écarte du calculateur la possibilité des se meprendre dans le titre des Tables de ces deux lignes trigonometriques. M. de Mendoza a encore le merite d'avoir publié, dans le recueil cité, aussi une Table complette des sinus-verses et des Su-sinus-verses de tous les degrés du cercle jusqu'à 180°, de minute en minute et de dix en dix secondes.

3) La méthode de Mr. de Mendoza employe la *somme* des hauteurs des deux astres, la mienne employe la *différence* de ces hauteurs. Mr. de Mendoza remarque avec raison, qu'en parité de toutes les autres circonstances, l'emploie des sommes est préferable à celui des différences, car on peut deduire la somme des hauteurs vraies de la somme des hauteurs apparentes, en y appliquant l'ensemble des corrections pour les deux astres, pendant que, pour avoir la *différence* des hauteurs vraies, il n'y a de meilleur procédé que celui de corriger séparément chaque hauteur apparente pour en faire la soustraction ensuite. D'ailleurs on peut aussi procurer à la méthode qui employe les différences, l'avantage d'avoir tous les termes additifs; car j'ai fait voir à la fin de mon Mémoire, qu'on a l'égalité

$$2 + \sin\tfrac{1}{2}X^2 = \sin\tfrac{1}{2}H^2 + \sin\frac{\overline{d+\omega}^2}{2} + \sin\frac{\overline{d-\omega}^2}{2} + \sin\frac{\overline{180^\circ - t + \omega}^2}{2} + \sin\frac{\overline{180^\circ - t - \omega}^2}{2},$$

qui se transforme immédiatement en celle-cy:

$$\Sigma X = \Sigma H + \Sigma(d+\omega) + \Sigma(d-\omega) + \Sigma(180^\circ - t + \omega) + \Sigma(180^\circ - t - \omega) - 4;$$

$$= \Sigma H + \Sigma(d+\omega) + \Sigma(d-\omega) + \mathrm{Su.}\,\Sigma(t+\omega) + \mathrm{Su.}\,\Sigma(t-\omega) - 4.$$

Les deux méthodes dont je viens de faire le parallele, et particulièrement celle de Mr. de Mendoza, présentent incontestablement aux Pilotes hauturiers toutes les facilités qu'ils peuvent desirer, pour resoudre le problème sans le secours des Logarithmes et sans aucune connoissance des lignes trigonomètriques.

Je vais maintenant proposer à ceux d'entr'eux qui sont habitués dans le calcul logarithmique et dans la théorie des lignes trigonometriques, un moyen aisé d'abreger encore beau-

coup la pratique de ma méthode, sans en perdre aucun des ses avantages, dont le principal est d'être exemte de toute distinction des différens cas du problème. Cette méthode est fondée sur l'égalité :

$$\Sigma X = \Sigma H + \Sigma (d+\omega) + \Sigma (d-\omega) - \Sigma (t+\omega) - \Sigma (t-\omega);$$

or comme par des transformations trigonometriques connues on a généralement

$\Sigma (a+b) + \Sigma (a-b) = 2 (1 - \cos a \,.\, \cos b)$, on obtient

$\Sigma X = \Sigma H + 2 \cos \omega [\cos t - \cos d]$, et comme on a de même

$\cos a - \cos b = 2 \sin \frac{b+a}{2} \sin \frac{b-a}{2}$; on a l'égalité :

$$\Sigma X = \Sigma H + 4 \,.\, \cos \omega \,.\, \sin \frac{d+t}{2} \sin \frac{d-t}{2};$$

dans la quelle le second terme est toujours additif, puisque d est toujours plus grand que t, et $\frac{d+t}{2}$ toujous plus petit que 180°, de façon, que cette égalité donne à connoitre, de combien le sinus-verse de la distance vraie surpasse le sinus-verse de la différence des hauteurs vraies des deux astres; d'où resulte le calcul suivant de la distance vraie.

Méthode troisième.

Les significations des lettres d, t, H, X et ω étant les mêmes que celles dans la premiere méthode, on a

$$\Sigma X = \Sigma H + 4 \,.\, \cos \omega \sin \frac{d+t}{2} \sin \frac{d-t}{2};$$

donc

1) Calculez par les Logarithmes le nombre

$$4 \cos \omega \,.\, \sin \frac{d+t}{2} \sin \frac{d-t}{2};$$

2) Ajoutez ce nombre au sinus-verse H. La somme sera le sinus-verse de la distance vraie cherchée.

Sur quoi je remarque encore, que le log. 2 cos ω se trouve pour toute hauteur et pour toute parallaxe horizontale de la Lune tout calculé dans le recueil des Tables publié par le Bureau de longitude à Londres sous le titre: Tables requisite to be used with the nautical ephemeris etc. Table IX *), auquel on n'a conséquement, qu'à ajouter log. $2 = 0,3010300$.

Traitée d'une manière semblable, la méthode de M. de Mendoza donne par les mêmes transformations trigonometriques l'égalité $\Sigma X = \text{Su.}\,\Sigma K - 4 \cos\omega \cos\frac{d+u}{2} \cos\frac{d-u}{2}$; mais il est aisé à remarquer, que $\frac{d+u}{2}$ peut surpasser 90°, et comme dans ce cas le second terme change de signe, la méthode qui en resulte, n'auroit pas l'avantage d'être exemte de la distinction des cas.

Eclaircissons cette troisième méthode par quelques exemples calculés dans les tables mentionnées cy-dessus par d'autres méthodes qui employent également les Logarithmes.

---

*) Cette Table a pour titre: Logarithms for readily computing the true distance of the Moon from the Sun or a fixed star. Elle contient

$$\text{Log.}\ \frac{[\cos h \,.\, vr.\,\mathbb{C}]\,.\,[\cos h \,.\, vr.\,*]}{[\cos h \,.\, app.\,\mathbb{C}]\,.\,[\cos h \,.\, app.\,*]}.$$

Dans mon Mémoire cité ci-dessus j'ai posé

$$\frac{[\cos h \,.\, vr.\,\mathbb{C}]\,.\,[\cos h \,.\, vr.\,*]}{[\cos h \,.\, app.\,\mathbb{C}]\,.\,[\cos h \,.\, app.\,*]} = 2\cos y \cos z = 2\cos\omega,$$

et j'ai fait voir, que dès que la hauteur de la Lune surpasse cinq degrès, on peut, sans porter la moindre atteinte à la précision du résultat, supposer $\cos y = 0,5001343$ ou $y = 59^\circ\ 59'\ 27''$. Or dans la Table IX du dit recueil, on a supposé $\log.\frac{\cos h \,.\, vr.\,*}{\cos h \,.\, app.\,*} = 0,000120$, et partant $\frac{\cos h \,.\, vr.\,*}{\cos h \,.\, app.\,*} = 2\cos y = 1,0002764$ ou $\cos y = 0,5001383$, ce qui donne $y = 59^\circ\ 59'\ 27''.05$, valeur qui ne différe de la précédente, que d'$\frac{1}{20}$ de seconde. Ayant posé dans mon Mémoire $\log. 2\cos y = 0,0001177$, qui dans la Table IX est posé $= 0,0001200$; il faudroit ôter 0,000002 des Logarithmes contenus dans la Table IX; mais cette différence est trop petite pour influer sur le dernier résultat.

Exemple I.

Soit la hauteur observée d'une étoile = 24° 48′ 0″; celle du centre de la lune = 12° 30′ 0″ et leur distance apparente = 51° 28′ 35″; la parallaxe horizontale de la Lune étant = 56′ 15″.

Par les Tables connues de refraction et des parallaxes on trouve les corrections pour la hauteur de l'étoile = — 2′ 3″ et pour celle de la ☾ = + 50′ 42″; et partant la hauteur vraie de l'étoile = 24° 45′ 57″ et celle de la ☾ = 13° 20′ 42″. On a donc la différence de leurs hauteurs observées = 12° 18′ 0″ et celle de leurs hauteurs vraies = 11° 25′ 15″.

Ceci supposé, le calcul de la distance vraie est le suivant:

Distance observée = 51° 28′ 35″
Diff. des haut. obs. = 12° 18′ 0″

Somme . . . . . = 63° 46′ 35″
Différence . . . . = 39° 10′ 35″

Demi-Somme . . = 31° 53′ 17″ Log. sin = 9 , 7228488
Demi-différence . = 19° 35′ 17″ Log. sin = 9 , 5253754
La Tab IX du même recueil donne Log. 4 cos ω = 0 , 2996770

Somme = 9 , 5479012.

Nombre respond. 0 , 3531028.

Sinus-verse de la différ. des haut. vraies = 0 , 0198008.

Sinus-verse de la distance vraie . . . . . = 0 , 3729036.

Distance vraie . . . . . 51° 9′ 51″.

Exemple II.

Soit la hauteur apparente du centre du ☉ = 84° 7′ 0″; celle du centre de la Lune = 5° 17′ 0″ et leur distance apparente = 90° 21′ 13″, la parallaxe horizontale de la ☾ étant = 61′ 48″.

Par les Tables des refractions et des parallaxes on trouve les corrections pour la hauteur du ☉ = — 0′ 5″ et pour celle de la ☾ = + 52′ 4″ et partant la hauteur vraie du ☉ = 84° 6′ 55″ et celle de la ☾ = 6° 9′ 4″. On a donc la différence des hauteurs apparentes = 78° 50′ 0″ et celle des hauteurs vraies = 77° 57′ 51″.

Moyennant quoi la distance vraie se calcule de la manière suivante :

Distance apparente =	90° 21′ 13″		
Diff. des haut. app. =	78° 50′ 0″		
Somme . . . =	169° 11′ 13″		
Différence . . =	11° 31′ 13″		
Demi-Somme . . =	84° 35′ 36″	Log. sin =	9 , 9980635
Demi-Différence . =	5° 45′ 36″	Log. sin =	9 , 0015676
La Table IX donne . . .		Log. 4 cos ω =	0 , 3004910
		Somme . =	9 , 3001921
		Nombre resp. =	0 , 1996145
Sinus-verse de la différ. des haut. vraies		=	0 , 7914770
Sinus-verse de la dist. vraie cherchée . .		=	0 , 9910915

Distance vraie cherchée 89° 29′ 22″.

Exemple III.

Soit la hauteur apparente de l'étoile = 11° 17′ 0″, celle du centre de la Lune = 9° 38′ 0″; et leur distance apparente = 43° 35′ 42″; la parallaxe horizontale de la Lune étant = 54′ 42″.

On trouve les corrections pour la hauteur de l'étoile = — 4′ 39″ et pour celle de la Lune = + 48′ 28″, et partant la hauteur vraie de l'étoile = 11° 12′ 21″ et celle de la Lune = 10° 26′ 28″. On a donc la différence des hauteurs apparentes = 1° 39′ 0″ et celle des hauteurs vraies = 0° 45′ 53″.

Moyennant quoi la distance vraie se calcule de la manière suivante:

Distance apparente	= 43° 35′ 42″		
Diff. des haut. app.	= 1° 39′ 0″		
Somme . . .	= 45° 14′ 42″		
Différence . .	= 41° 56′ 42″		
Demi-Somme . .	= 22° 37′ 21″	Log. sin	= 9 , 5850746
Demi-Différence .	= 20° 58′ 21″	Log. sin	= 9 , 5537857
La Table IX donne		Log. 4 cos ω	= 0 , 3000660
		Somme . .	= 9 , 4389263
		Nombre resp.	= 0 , 2747427
Sinus-verse de la différ. des haut. vraies			= 0 , 0000381
Sinus-verse de la distance vraie . . .			= 0 , 2748318

Distance vraie = 43° 31′ 1″.

Ces trois exemples se trouvent calculés dans le dit r e-cueil, le premier par la méthode de Mr. Lyons; le second p ar celle de Mr. Dunthorne, et le troisième par celle de Mr. Maskelyne, de sorte, qu'ils peuvent servir à comparer ces trois méthodes avec celle que je viens de proposer ici. Si celle-cy est préférable aux autres; il est juste de reconnoitre, qu'elle n'auroit pas pû être offerte aux Pilotes mathématiciens sans la publication des Tables fort-étendues des sinus-verses que Mr. de Mendoza a le merite d'avoir fournies à la Marine.

SUR LES PASSAGES DE MERCURE SUR LE SOLEIL QUI AURONT LIEU DANS LE DIX-NEUFVIEME SIECLE.

PAR
F. T. SCHUBERT.

PREMIERE PARTIE

contenant les principes et formules du calcul.

Présenté à l'Académie le 9 Juillet 1800.

Avant de donner le résultat des calculs que j'ai faits, de ces phénomenes également intéressans pour l'Astronomie et pour la Géographie, je crois devoir rendre compte à l'Académie, des méthodes et des formules dont je me suis servi, afin qu'elle puisse juger du dégré de précision que j'ai taché de mettre dans ces calculs, pour les rendre vraiment utiles aux astronomes Il m'a paru d'ailleurs que, malgré les expositions assès longues du calcul d'une éclipse ou d'un passage, qui sont entre les mains des

astronomes, une théorie complete et succincte de cette partie du calcul astronomique, ne serait pas inutile. Le mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, se divise donc en deux parties, dont l'une contiendra les formules sur lesquelles j'ai calculé les passages de Mercure dans le 19e siecle, dont les résultats se trouveront dans la seconde partie. L'une et l'autre sera subdivisée en trois sections, savoir, les calculs pour le centre de la terre, pour les différens points de sa surface, et pour l'observatoire de St. Pétersbourg.

SECTION I.

Calcul pour le centre de la terre.

§. 1. Ayant trouvé par des tables calculées pour un méridien A, le tems moyens T de la conjonction compté au méridien A, on tirera de ces tables, pour le tems T, les élémens du calcul suivans:

Longitude héliocentrique de la terre et de Mercure $= L$,
Latitude héliocentrique de Mercure $= b$,
Mouvement horaire héliocentrique de la terre en longitude $= h$,
Mouvement horaire héliocentrique de Mercure en longitude $= H$,
Mouvement horaire héliocentrique de Mercure en latitude $= \beta$,
Distance de la terre au soleil $= \pi$,
Distance de Mercure au soleil $= \varrho$,
Distance de Mercure à la terre $= \sigma = \pi - \varrho$,
Demi-diamètre géocentrique du soleil $= r$,
Demi-diamètre géocentrique de Mercure $= R$,

Parallaxe horizontale du soleil $= p$,

Parallaxe horizontale de Mercure $= P = \frac{\pi p}{\pi - \varrho}$,

Différence des parallaxes $= P - p = \frac{\varrho p}{\pi - \varrho}$.

§. 2. Au moyen de ces élémens on calculera les quantités suivantes:

Inclinaison de l'orbite relative de Mercure à l'écliptique $=$ $\omega =$ Ang. tang. $\frac{\beta}{H - h}$,

Mouvement horaire héliocentrique de Mercure sur son orbite relative $= G = \sqrt{[(H-h)^2 + \beta^2]} = \frac{\beta}{\sin \omega} = \frac{H-h}{\cos \omega}$,

La plus courte distance héliocentrique des centres de Mercure et de la terre $= m = b \cos \omega$,

Intervalle héliocentrique entre la conjonction et le milieu du passage $= n = b \sin \omega$,

Distance géocentrique des centres du soleil et de Mercure, au moment du contact extérieur $= r + R + P - p$,

Distance au moment du contact intérieur $= r - R + P - p$.

Quant au rayon du soleil r, je l'ai constamment diminué de $3''$, à cause de *l'irradiation*, suivant ce que Mr. *du Sejour* a trouvé par les observations des éclipses de soleil.

§. 3. Comme les angles héliocentriques se changent en géocentriques, et réciproquement, étant multipliés ou divisés par $\frac{\varrho}{\sigma}$ (§. 2.), on trouve d'abord les valeurs suivantes, dont on aura besoin dans la suite.

Distance héliocentrique des centres de Mercure et de la terre, au moment du contact extérieur $=$

$$u = \frac{\sigma}{\varrho}(r + R + P - p) = \frac{\sigma}{\varrho}(r + R) + p,$$

Distance héliocentrique au moment du contact intérieur $= v = \frac{\sigma}{\varrho}(r - R) + p$,

La plus courte distance géocentrique des centres du soleil et de Mercure $= m' = \frac{\varrho}{\sigma} m = \frac{\varrho b \cos \omega}{\pi - \varrho}$,

Intervalle héliocentrique entre le milieu du passage et le point du contact extérieur $= \sqrt{(u^2 - m^2)}$,

Intervalle entre le milieu et le point du contact intérieur $= \sqrt{(v^2 - m^2)}$,

Tems du milieu du passage $= t = T - \frac{n}{G} = T - \frac{b}{\beta} \sin^2 \omega$ heures,

Tems du contact extér. $= t \mp \frac{\sqrt{(u^2 - m^2)}}{G} = t \mp \frac{\sin \omega \sqrt{(u^2 - m^2)}}{\beta}$ heures,

Tems du contact. intér. $= t \mp \frac{\sqrt{(v^2 - m^2)}}{G} = t \mp \frac{\sin \omega \sqrt{(v^2 - m^2)}}{\beta}$ heures;

le signe supérieur (—) étant pour l'entrée, et le signe (+) pour la sortie.

§. 4. La durée totale du passage $= \frac{2 \sin \omega}{\beta} \sqrt{(u^2 - m^2)}$ heures, peut varier depuis zéro jusqu'à $\frac{2u}{\beta} \sin \omega = \frac{2(\frac{\pi - \varrho}{\varrho} r + p)}{\sqrt{((H - h)^2 + \beta^2)}}$, parceque $\sin \omega = \frac{\beta}{\sqrt{((H - h)^2 + \beta^2)}}$ (§. 2.). Pour les passages du mois de Mai on trouve les valeurs $\pi = 1,010$; $\varrho = 0,453$; $\pi - \varrho = 0,557$; $p = 8'',45$; $P = 15'',33$; $H = 7' 15''$; $h = 2' 25''$; $H - h = 290''$, $r = 950''$; et au mois de Novembre $\pi = 0,990$; $\varrho = 0,314$; $\pi - \varrho = 0,676$; $p = 8'',8$; $P = 12'',9$; $H = 15' 10''$, $h = 2' 51''$, $H - h = 759''$, $r = 972''$; et comme nous avons supposé Mercure dans le noeud même, en faisant $m = 0$, on a $\beta = H$ multiplié par la tangente de l'inclinaison $= 7°$, c'est-à-dire, $\beta = H \cdot 0,1228$; partant au mois de Mai $\beta = 53''$, et au mois de Novembre $\beta = 1' 50''$: ce qui donne *la plus grande valeur de la durée totale du passage du centre de Mercure,*

au mois de Mai $= \frac{2\,(1168+8\,,5)}{294\,,8}$ heures $= 7,\ 9817$ heures
$= 7$ h. 58 m. 54 s.

et au mois de Novembre $= \frac{2\,(2092+8\,,8)}{767} = 5,\ 4795$ heures
$= 5$ h. 28 m. 46 s.

La plus grande durée possible d'un passage est donc de huit heures.

§. 5. La latitude b étant supposée boréale, et le mouvement β dirigé vers le pole boréal de l'écliptique, b deviendra négative dans ces formules, quand la latitude de Mercure est australe, et β, quand Mercure s'approche du pole austral: d'où il suit la regle suivante. L'angle ω est positif, c'est-à-dire, la partie de la perpendiculaire à l'orbite, qui est du côté du nord, décline à l'orient du cercle de latitude (parceque dans les conjonctions inférieures le mouvement géocentrique des planètes est rétrograde), quand β est positif, c'est-à-dire, quand les passages arrivent au mois de Novembre vers le noeud ascendant; mais ω est négatif, quand les passages arrivent au mois de May: parceque tang $\omega = \frac{\beta}{H - h}$ (§. 2.). Le milieu du passage arrive avant la conjonction, quand b et β ont le même signe, c'est-à-dire, quand la conjonction arrive après le passage par le noeud; il arrive après la conjonction, quand celle-ci a lieu avant le passage par le noeud: parceque $t = T - \frac{b}{\beta} \sin^2 \omega$ (§. 3.).

§. 6. Le changement de la distance de Mercure au soleil, et l'inégalité de son mouvement, sont assès sensibles dans l'espace de quelques heures, pour devoir entrer dans le calcul. Or, le tems du commencement et de la fin du passage étant déjà à très-peu près connu, on n'a qu'à calculer la distance ρ, et les mouvemens horaires H, β, pour le commencement et la fin, de la même manière dont on avait calculé ces quantités pour l'épo-

que de la conjonction. Par le moyen de ces trois valeurs de ϱ, H, β, on trouvera aisément leurs valeurs pour chaque moment de toute la durée du passage. Il seroit inutile de tenir compte de ces différences dans le calcul héliocentrique; mais on ne peut pas s'en dispenser, lorsqu'il s'agit de trouver les mouvemens géocentriques, dont on a besoin dans le calcul parallactique pour un lieu déterminé. Voyons donc, comment les mouvemens géocentriques se déduisent des mouvemens héliocentriques.

§. 7. On sait qu'en nommant γ l'angle de commutation, ou la différence des longitudes héliocentriques de Mercure et de la terre, η l'élongation ou la différence des longitudes géocentriques de Mercure et du soleil, et b, b', les latitudes de Mercure vues du soleil et de la terre, on a

$$\text{tang}\,\eta = \frac{\varrho\,\sin\gamma}{\pi - \varrho\,\cos\gamma}, \text{ et tang}\,b' = \frac{\sin\eta}{\sin\gamma}\,\text{tang}\,b.$$

Mais, γ et b étant toujours fort petits dans les passages, on aura

$$\eta = \frac{\varrho\gamma}{\pi - \varrho}, \text{ et } b' = \frac{\eta b}{\gamma} = \frac{\varrho b}{\pi - \varrho}.$$

Pour juger de la précision de ces formules, il faut remarquer que dans un passage, l'angle γ ne saurait être plus grand que $u = \frac{\pi - \varrho}{\varrho}\,16'$ (§. 3.) $= \frac{1,01 - 0,31}{0,31}\,16' = 36'$, (en donnant à π sa plus grande, et à ϱ sa moindre valeur). On trouve par là

$$\text{tang}\,\eta = \frac{0,31\,.\,\sin 36'}{1,01 - 0,31\,.\,\cos 36'} = \text{tang}\,15'\,57'',$$

$$\text{et } \eta = \frac{\varrho}{\pi - \varrho}\,.\,\frac{\pi - \varrho}{\varrho}\,.\,16' = 16' :$$

d'où il suit que l'erreur de ces formules sera toujours moindre que $3''$, dans toute la durée d'un passage. Ayant donc calculé pour un moment quelconque, les longitudes héliocentriques de

Mercure, de la terre, et du soleil, ☿, ♁, et ☉ = 180° + ♁, et la latitude héliocentrique de Mercure, b, on a $\gamma = ♁ - ☿$, d'où l'on déduit la longitude géocentrique de Mercure, $☿' = ☉ + \eta = 180° + \frac{\pi ♁ - \varrho ☿}{\pi - \varrho}$. On en tire aisément les mouvemens horaires géocentriques

du soleil = h, de ☿ en longitude = $\frac{\pi h - \varrho H}{\pi - \varrho} = H'$,

en latitude = $\frac{\beta \varrho}{\pi - \varrho} = \beta'$, et le mouvement horaire rélatif

en longitude = $\frac{\pi h - \varrho H}{\pi - \varrho} - h = -\frac{\varrho (H - h)}{\pi - \varrho} = G'$.

Pour ce qui regarde les mouvemens héliocentriques, au lieu de les tirer des tables, il vaut mieux les calculer au moyen des formules connues que voici. En nommant $a = 0,3871$ la distance moyenne de Mercure au soleil, ϱ sa distance vraie, $\varepsilon = 0,2056212$ son excentricité, b sa latitude héliocentrique, $\nu = 7°$ l'inclinaison de son orbite, $\mu = 613'', 85$ le mouvement horaire moyen dans son orbite, $\lambda = 147'' 85$ celui du soleil, F, H, β, les mouvemens horaires vrais de Mercure, dans son orbite, en longitude, et en latitude, enfin B sa longitude héliocentrique moins celle du noeud: on a

$$F = \frac{a^2}{\varrho^2}\mu\sqrt{(1-\varepsilon^2)} = \frac{\lambda\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}}{\varrho^2}, \text{ parceque } \lambda : \mu = a^{\frac{3}{2}} : 1,$$

$$H = \frac{F \cos \nu}{\cos^2 b}, \text{ et } \beta = F \sin \nu \cos B, \text{ ou bien}$$

$$F = \frac{90'', 02276}{\varrho\varrho}, \quad H = \frac{89'', 35176}{\varrho^2 \cos^2 b}, \quad \beta = \frac{10'', 97102}{\varrho^2} \cos B.$$

§. 8. La propagation successive de la lumière fait que, du centre de la terre, on ne voit la conjonction que quelque tems après la conjonction vraie. Pour en tenir compte, il faut se souvenir que l'*aberration* d'une planete est toujours égale à son mouvement géocentrique, pendant le tems que la lumière emploie à venir de la planete jusqu'à la terre, mais dans un sens contraire. Or, la lumiere employant $487\frac{1}{2}$ secondes à par-

courir le rayon de l'orbite terrestre $= 1$, et par conséquent $\sigma \cdot 487\frac{1}{2}$ secondes à parcourir la distance σ de la planète, on aura (§. 7.)

l'*aberration de Mercure*

en longitude $= + \frac{\sigma \cdot 487\frac{1}{2}}{3600} \cdot \frac{\varrho H - \pi h}{\sigma} = + 0,135\,(\varrho H - \pi h)$,

en latitude $= - \frac{\sigma \cdot 487\frac{1}{2}}{3600} \cdot \frac{\varrho\beta}{\sigma} = - 0,135 \cdot \varrho\beta$,

et celle du soleil en longitude $= - 0,135 \cdot h$, c'est-à-dire, au mois de May $= - 0,135 \cdot 145'' = - 19'' 6$, et au mois de Novembre $= - 0,135 \cdot 151'' = - 20'' 4$, ou en général, $= - 20''$. De là il suit qu'au moment de la conjonction vraie, Mercure paraitra éloigné du soleil à l'orient d'un arc égal à $20'' + 0,135\,(\varrho H - \pi h)$, qui, réduit en tems, à raison du mouvement horaire $G' = \frac{\varrho\,(H-h)}{\pi - \varrho}$ (§. 7.) donnera $\frac{3600\,(\pi - \varrho)}{\varrho\,(H-h)}$ $(20'' + 0,135\,(\varrho H - \pi h))$ secondes $= V$ pour le retardement de la conjonction, qu'il faut ajouter au tems calculé T (§. 1.), pour avoir l'instant de la conjonction apparente. Par la même raison il faut mettre $b + \frac{\beta V}{3600}$ au lieu de b, pour avoir la latitude héliocentrique vraie,

$b' + \frac{\beta' V}{3600}$ (§. 7.) $= b' + \frac{\beta}{H-h}\,(20'' + 0,135\,(\varrho H - \pi h))$

au lieu de b', pour avoir la latitude géocentrique vraie,

et $b + \frac{\beta' V}{3600} - 0,135 \cdot \varrho\beta = \frac{\varrho}{\pi - \varrho}\,(b + \frac{\beta V}{3600}) - \varrho\beta \cdot 0,135$;

pour avoir la latitude géocentrique apparente au moment de la conjonction apparente.

§. 9. L'intervalle entre le moment du contact extérieur et de l'intérieur (§. 3.) est $= \frac{\sin \omega}{\beta}\,(\sqrt{(u^2 - n^2)} - \sqrt{(v^2 - m^2)})$: c'est ce que j'appellerai la *durée de l'immersion et de l'émersion.*

Il est facile de voir, que cet intervalle sera d'autant plus court, que Mercure s'approchera d'avantage du centre du soleil :

d'où il suit que ce tems aura sa moindre valeur, quand Mercure passe par le centre du soleil, où $m = 0$, et sa plus grande valeur, quand Mercure ne fait que raser le bord intérieur du soleil, c'est-à-dire, quand $m = v$. Le *minimum* de la durée de l'immersion est donc égal à

$$\frac{\sin\omega}{\beta}(u-v) = \frac{2(\pi-\varrho)R}{\varrho\,.\,\sqrt{[(H-b)^2+\beta^2]}} \text{ (§. 2. 3.)} = M,$$

et le *maximum* $M' = \frac{\sin\omega}{\beta}\sqrt{(u^2-v^2)} = M\sqrt{\frac{u+v}{u-v}} = M\sqrt{\frac{r+P-\varrho}{R}}$.

En employant donc les valeurs (§. 4.), et le demi-diamètre apparent de Mercure au mois de Mai, $R = 6''$, 2; au mois de Novembre, $R = 5''$, 1: on trouve pour les passages du mois de Mai,

le *minimum* $= \frac{1,114}{0,453}\cdot\frac{6,2}{294,8} = 0$, 05172 heures $= 3$ min. 6 s.

le *maximum* $= \frac{1,114}{0,453}\cdot\frac{\sqrt{957.6,2}}{294,8} = 0$, 64256 heures $= 38$ min. 33 s.

et pour ceux du mois de Novembre

le *minimum* $= \frac{1,352}{0,314}\cdot\frac{5,1}{767} = 0$, 02863 heur. $= 1$ min. 43 sec.

et le *maximum* $= \frac{1,352}{0,314}\cdot\frac{\sqrt{976.5,1}}{767} = 0$, 39606 heur. $= 23$ min. 46 sec.

de sorte que la durée de l'immersion ou de l'émersion peut varier depuis 1 min. 43 sec. jusqu'à 38 min. 33 sec.

SECTION II.

Calcul pour la surface de la terre.

§. 10. Pour trouver l'effet des parallaxes en différens pays de la terre, il faut commencer par calculer pour les trois époques du commencement, du milieu, et de la fin du passage vu du centre de la terre, les déclinaisons D', D°, D'', et les angles de position $\varkappa'$, $\varkappa^{\circ}$, $\varkappa''$, du soleil, au moyen des longitudes A', A°, A'', du soleil et des formules,

$$\sin D = \sin e \sin A, \text{ et } \operatorname{tg} \varkappa = \operatorname{tg} e \cos A,$$

e étant l'obliquité de l'écliptique. Il faut observer que les déclinaisons boréales sont positives, et que l'angle $\varkappa$ est positif, quand le soleil se trouve dans les signes ascendans, où cos A est positif, c'est-à-dire, quand le cercle de latitude décline à l'occident du cercle de déclinaison; au lieu que D est négatif, quand la déclinaison est australe, et $\varkappa$ négatif dans les signes descendans. Au reste, les trois valeurs de D et de $\varkappa$, serviront à trouver la valeur de D ou de $\varkappa$, pour un moment quelconque dans toute la durée du passage, par une simple regle de trois.

Tab. XIV. Fig. 2. §. 11. Soit (*Fig.* 2.) B D *b d* S une projection ortographique de la terre, dont le rayon $=$ P $-$ p; P étant la projection du pole arctique de la terre, S celle du centre de la terre, et du lieu qui a le soleil au zénith, et G S P F la projection du méridien du soleil, qui coupe le cercle d'illumination en deux parties égales, dont la partie occidentale F *d b* G renferme tous les lieux qui verront dans ce moment le lever du soleil, et la partie orientale G D B F ceux qui auront le soleil couchant. Qu'on prenne du côté occidental, l'angle P S L $=$ $\varkappa$ (§. 10.), et du côté oriental l'angle L S M $=$ ω (§. 5.), qu'on

fasse $SF : SL : SM = P - p : b' : m'$ (§. 7. 3.), et qu'on tire une ligne droite IMLE perpendiculaire à SM. qui représentera l'orbite de Mercure vue de la terre. Ayant coupé cette ligne en deux points I, E, de façon que $SI = SE = r + P - p$, I sera le premier point de l'entrée du centre de Mercure, et E le dernier point de la sortie; le lieu i étant le premier de tous les pays de la terre, qui verra le centre de Mercure entrer sur le soleil, et le lieu e le dernier qui verra Mercure sortir de dessus le soleil. Pareillement, faisant $SK = r - (P - p)$, de façon que $Kk = r$, le point k sera le dernier de tous les pays de la terre, qui verra Mercure entrer sur le soleil. Au lieu des points I, K, on peut substituer un point intermediaire A, éloigné du centre S de $SA = r$, de sorte que les points B, b, de la terre, qui verront le commencement et la fin de l'entrée, sont diamétralement opposés. Par la même raison, faisant $SC = r$, les points diamétralement opposés D, d, verront le commencement et la fin de la sortie. Les points B, d, sont ceux que Mr. de la Lande appelle *poles d'entrée* et *de sortie*.

§. 12. Le tems que Mercure emploie à parcourir le segment IK de son orbite, c'est-à-dire, la durée de l'entrée se trouve facilement au moyen des données, $SM = m$, $SI = r + (P - p)$, $SK = r - (P - p)$, ce qui donne

$$IK = \sqrt{((r + P - p)^2 - m'^2)} - \sqrt{((r - P + p)^2 - m'^2)}$$
$$= \sqrt{(r^2 - m'^2 + 2r(P - p))} - \sqrt{(r^2 - m'^2 - 2r(P - p))}$$
$$= \sqrt{(r^2 - m'^2)} + \frac{r(P-p)}{\sqrt{(r^2 - m'^2)}} - \sqrt{(r^2 - m'^2)} + \frac{r(P-p)}{\sqrt{(r^2 - m'^2)}}$$
$$= \frac{2r(P-p)}{\sqrt{(r^2 - m'^2)}},$$ dont la valeur héliocentrique (§. 3.)

est $\frac{2(\pi - \varrho)(P - p)r}{\varrho\sqrt{(r^2 - m'^2)}} = \frac{2pr}{\sqrt{(r^2 - m'^2)}}$ (§. 1.).

On convertira cela en tems, à raison du mouvement horaire $G = \sqrt{((H - h)^2 + \beta^2)}$ (§. 2.), ce qui donne $\frac{2rp}{\sqrt{(r^2 - m'^2)}\sqrt{((H-h)^2+\beta^2)}}$ heures pour la *durée de l'entrée et de la sortie.*

La valeur de ce tems sera un *minimum*, lorsque $m' = o$, et un *maximum*, lorsque $m' = SK = r - (P - p)$ (§. 9.). Le *minimum* est donc $= \frac{2p}{\sqrt{((H-h)^2+\beta^2)}}$, et le *maximum* $= \frac{2rp}{\sqrt{2r(P-p)}\sqrt{((H-h)^2+\beta^2)}} = \sqrt{\frac{2rp(\pi-\varrho)}{\varrho((H-h)^2+\beta^2)}}$ (§. 1.): ce qui donne, moyennant les valeurs (§. 4.), les résultats suivans. La moindre valeur de la durée de l'entrée et de la sortie est au mois de Mai $= \frac{16,9}{294,8} = o,0573$ heures $= 3$ min. 26 sec. et au mois de Novembre $= \frac{17,6}{767} = o,0229$ heures $= 1$ m. 22 s. La plus grande valeur au mois de Mai $= \frac{1}{294,8}\sqrt{\frac{16,9 \cdot 950 \cdot 0,557}{0,453}}$ $= o,4766$ heures $= 28$ min. 36 sec. et au mois de Novembre $= \frac{1}{767}\sqrt{\frac{17,6 \cdot 972 \cdot 0,676}{0,314}} = o,2502$ heures $= 15$ minutes. La durée de l'entrée ou de la sortie peut donc varier depuis 1 min. 22 sec. jusqu'à 28 min. 36 sec.

§. 13. De la même manière on trouve le moment où Mercure est en A et en C, en convertissant le segment MA $= MC = \sqrt{(r^2 - m'^2)}$ vu du soleil, c'est-à-dire, $\frac{\pi-\varrho}{\varrho}\sqrt{(r^2-m'^2)}$, en tems, à raison du mouvement horaire G, d'où il resulte $\frac{\pi-\varrho}{\varrho G}\sqrt{(r^2 - m'^2)}$ heures, ce qu'il faut ôter du tems du milieu t, ou y ajouter, pour avoir le *tems du milieu de l'entrée ou de la sortie* en A ou en C, qui est $= t \mp \frac{\pi-\varrho}{\varrho}\sqrt{\frac{r^2-m'^2}{(H-h)^2+\beta^2}}$ heures.

§. 14. Soit donc $t' = t - \frac{\pi - \varrho}{\varrho G} \sqrt{(r^2 - m'^2)}$ le tems du méridien A des tables (§. 1.), où le lieu B, dont la latitude boréale soit $= \Phi'$, la longitude orientale comptée du meridien $A = \lambda'$, verra le premier l'entrée en A : alors on aura dans le triangle sphérique S P B, $SB = 90°$, $SP = 90° - D'$ (§. 10.), $PB = 90° - \Phi'$, et $PSB = MSA + LSM - PSL$, ou bien $PSB = \alpha + \omega - \varkappa'$, en nommant α l'angle M S A, dont le cosinus $= \frac{m'}{r}$. De là il suit

$$\cos PB = \cos SB \cos SP + \sin SB \sin SP \cos PSB,$$

et tang $SPB = \frac{\sin PSB}{\cos SB \sin SP - \cos SP \cos PSB} = \text{tang } \varepsilon'$, c'est-à-dire,

$$\sin \Phi' = + \cos D' \cos (\alpha + \omega - \varkappa'), \text{ et tang } \varepsilon' = - \frac{\tang (\alpha + \omega - \varkappa')}{\sin D'}.$$

Or, si P H est le méridien A des tables, l'angle H P G est $= 15\,t'$, et par conséquent $HPB = \lambda' = \varepsilon' - 15\,t'$.

En nommant Φ'' la latitude boréale, et λ'' la longitude orientale, du point d qui verra le dernier la sortie en C, on a

$PS = 90° - D''$, $PSL = \varkappa''$, $PSd = MSd - LSM + PSL$
$= \alpha - \omega + \varkappa''$, donc

$$\sin \Phi'' = + \cos D'' \cos (\alpha - \omega + \varkappa''),$$

$$\text{tang } SPd = \text{tang } \varepsilon'' = - \frac{\tang (\alpha - \omega + \varkappa'')}{\sin D''},$$

et $HPd = - \lambda''$, ou $\lambda'' = - \varepsilon'' - 15\,t''$,

t'' étant $= t + \frac{\pi - \varrho}{\varrho G} \sqrt{(r^2 - m'^2)}$.

La latitude du point S qui aura le soleil au zénith dans le tems du milieu du passage, est $= D$, sa longitude $= - 15\,t$.

Pour le point N qui, de tous les lieux de la terre, verra la plus courte distance des centres N M, on a P S $=$ 90° $-$ D, P S L $=$ $\varkappa$, P S N $=$ $\varkappa - \omega$: par conséquent, sa latitude Φ et longitude λ, se détermineront au moyen des équations :

$$\sin \Phi = + \cos D \cos (\varkappa - \omega), \text{ tang SPN} = \text{tang } \varepsilon = - \frac{\text{tang } (\varkappa - \omega)}{\sin D},$$

et $\lambda = - \varepsilon - 15\, t$.

La plus courte distance apparente est

$$\text{N M} = m' - (\text{P} - p) = \frac{\varrho\, (b \cos \omega - p)}{\pi - \varrho}.$$

Les points b, D, qui verront la fin de l'entrée et le commencement de la sortie, étant diamétralement opposés aux points B, d, la latitude de b sera $= - \Phi'$, sa longitude orientale comptée du méridien A $=$ 180° $+ \lambda'$, la latitude du point D $= - \Phi''$, et sa longitude $=$ 180° $+ \lambda''$.

Au reste, il est evident (§. 11.) que les points B, D, verront le commencement de l'entrée et de la sortie, au coucher du soleil, tandis que les lieux b, d, verront la fin de l'entrée et de la sortie au lever du soleil.

§. 15. Parmi les pays qui, situés dans l'hémisphère supérieur ou illuminé par le soleil au moment de l'entrée, auront le soleil sur l'horizon, il y en aura qui, étant trop près de l'horizon oriental G D B F, perdront le soleil de vue, avant d'avoir vu la sortie. Ces pays seront donc séparés les uns des autres, par un Demi-cercle passant par tous les lieux qui verront la sortie au coucher du soleil, c'est-à-dire, par l'horizon oriental G D B F du globe disposé pour l'instant de la sortie. Les pays qui sont à l'occident de ce cercle, verront tout le passage, tandis que ceux à l'orient n'en verront que le commencement. Par la même raison, les pays situés dans l'hémisphère inférieur,

et à l'orient de l'horizon occidental du globe disposé pour le moment de la sortie, ne verront que la fin du passage, mais ceux à l'occident n'en verront rien du tout. La surface de la terre sera donc coupée en quatre parties, par deux cercles dont les poles sont les lieux du soleil à l'instant de l'entrée et de la sortie, que je marquerai E et S, dans les mappemondes que j'aurai l'honneur de présenter à l'Académie. Ces quatre parties seront designées dans mes cartes par les mots, *Entrée*, *Sortie*, *Tout* et *Rien*.

§. 16. Il y a, tant pour l'entrée que pour la sortie, deux points remarquables F, G, dont l'un va se coucher et lever, et l'autre va se lever et coucher en même tems, au moment de l'entrée ou de la sortie, de sorte que celui-là voit tout le passage, et celui-ci seulement le moment de l'entrée ou de la sortie. La latitude du premier point F est $90° - D'$ ou $90° - D''$, sa longitude $180° - HPG = 180° - 15t'$ (§. 14.) ou $180° - 15t''$. La latitude du point G est $-(90° - D')$ ou $-(90° - D'')$, sa longitude est $-15t'$ ou $-15t''$.

§. 17. Comme l'entrée aussi bien que la sortie peut duler une demi-heure (§. 12.), il sera interéssant de connaitre res lieux de la terre, qui de minute en minute ou de deux en deux minutes, verront le centre de Mercure entrer ou sortir du soleil. Soit (*Fig.* 3.) IM l'orbite relative de Mercure, I le premier point de l'entrée, L le point où Mercure se trouve ν minutes après, et LS une ligne menée au centre S de la terre, coupant sa surface en N. L'intersection d'un cone droit $nL\nu$ dont l'axe est LS, les côtés $Ln = L\nu = r$, sera le parallele $nl\nu$ qui renferme tous les lieux qui verront l'entrée, au moment où Mercure se trouve en L. Il s'agit donc de déterminer la position du pole N, et sa distance au parallele. Les segmens Tab. XIV. Fig. 3.

$$IM = \sqrt{((r + P - p)^2 - m'^2)}, \text{ et } IL = \frac{\nu \varrho G}{60\,(\pi - \varrho)},$$

étant connus, on a tang M S L $= \frac{\text{I M} - \text{I L}}{m'}$, ou bien

$$\text{tang } \gamma = \frac{\sqrt{((\frac{\pi - \varrho}{\varrho} r + p)^2 - m^2)} - \frac{\nu G}{60}}{m}.$$

En substituant cet angle γ dans les formules précédentes (§. 14.) à la place de α, on trouve

$$\sin \psi' = + \cos D' \cos (\gamma + \omega - \varkappa'), \text{ tang } \xi' = - \frac{tang(\gamma + \omega - \varkappa')}{sin\ L'},$$
$$\text{et } \xi' = \zeta' = 15\,\tau',$$

ψ' étant la latitude, ξ' la longitude du pole N ; D' $\varkappa'$, les valeurs de D, $\varkappa$ (§. 10.), et τ' le tems compté au méridien des tables, au moment où Mercure se trouve en L, c'est-à-dire (§. 3.), $\tau' = t - \frac{\sqrt{(u^2 - m^2)}}{G} + \nu$ minutes. De la même manière, on trouve pour le lieu qui, ν minutes avant la derniere sortie, verra Mercure sortir du soleil,

$$\sin \psi'' = \cos D'' \cos (\gamma - \omega + \varkappa''), \text{ tang } \xi'' = - \frac{tang(\gamma - \omega + \varkappa'')}{sin\ D''},$$
$$\text{et } \xi'' = - \zeta'' - 15\,\tau''.$$

L'arc N ν, ou la distance du parallele à son pole N, est égal à l'angle N S ν qu'on trouve au moyen des trois côtés du triangle L S ν, savoir

$$\text{L S} = m' \sec \gamma = \frac{\varrho\, m \sec \gamma}{\pi - \varrho}, \text{ S } \nu = \text{P} - p = \frac{\varrho\, p}{\pi - \varrho}, \text{ et L } \nu = r,$$

par la formule

$$\cos \text{N S } \nu = \frac{\text{LS}^2 + \text{S}\nu^2 - \text{L}\nu^2}{2\,\text{LS} \cdot \text{S}\nu} = \frac{m^2 \sec^2 \gamma + p^2 - \frac{(\pi - \varrho)^2 r^2}{\varrho^2}}{2\,m\,p \sec \gamma}.$$

Il est surtout nécessaire, de connaître ces cercles $n\,l\,\nu$ dans les passages de Venus.

§. 18. Quand on veut faire usage des formules (§. 14 suiv.) pour calculer la position des lieux les plus importans par rapport à ces phénomenes, il faut observer que les angles D, $\varkappa$, b, β, m, ω, et α ou γ, sont tantôt positifs tantôt négatifs. Comme les passages de Mercure ne sauraient arriver qu'aux mois de May ou de Novembre, il y aura en tout quatre cas différens, que voici.

Le passage arrive

I. au mois de *May*. Le soleil est dans les signes ascendans, Mercure dans le noeud descendant: donc D, $\varkappa$, positifs (§. 10.), β et ω négatifs (§. 5.), et il y a deux cas à considérer.

1) Si la conjonction est *avant* le passage par le noeud, b et m sont positifs (§. 2.), le milieu arrive après la conjonction (§. 5.); et dans toutes les formules précédentes il n'y a d'autre changement à faire, que de substituer $-\omega$ au lieu de ω.

2) Si la conjonction a lieu *après* le passage par le noeud, b et m sont négatifs; d'où il suit que le milieu arrive avant la conjonction, et que cos α (§. 14.) et tang γ (§. 17.) sont négatifs. Il faut donc substituer $-\omega$, $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \gamma$, à la place de ω, α, γ.

II. Au mois de *Novembre*. Le soleil est dans les signes descendans, Mercure vers le noeud ascendant: par conséquent D, $\varkappa$, négatifs, β, ω positifs.

1) Si la conjonction est *avant* le passage par le noeud, b, m, cos α, tang γ, sont négatifs, le milieu arrive après la conjonction, et il faut mettre — D, — $\varkappa$ 180° — α, 180° — γ, à la place de D, $\varkappa$, α, γ.

2) Si la conjonction arrive *après* le passage par le noeud, b, m, sont positifs, le milieu a lieu avant la conjonc, tion, et il n'y a qu'à substituer — D, — $\varkappa$, — sin D- au lieu de D, $\varkappa$, sin D.

SECTION III.

Calcul pour un lieu déterminé.

§. 19. Tout ce calcul se réduisant au problème, *étant donnée la distance vraie ou géocentrique de deux astres, trouver leur distance apparente ou changée par les parallaxes*, j'en donnerai une solution que je crois être la plus simple, la plus directe, et la plus commode pour ce calcul. Soit (*Fig.* 4.) E le pole boréal de l'écliptique ♈ L ♎, P celui de l'équateur, Z le zénith, Z S, Z M, les verticals menés par les lieux géocentriques ☉, ☿, du soleil et de Mercure, et τ le tems donné pour lequel on cherche la distance, réduit au méridien P Z, de sorte que l'angle Z P ☉ $= 15\tau = u$. Au moyen des mouvemens horaires et des formules données cy-dessus, l'on calculera pour le même tems τ, la longitude f, et la latitude g de Mercure, vues du centre de la terre, la longitude du soleil $=$ A, sa déclinaison $=$ D, et son angle de position $= \varkappa$. En nommant donc $f - A = ☉L = a$, l'angle P ☉ Z $= \delta$, la latitude du lieu Z $= \Phi$, l'obliquité de l'écliptique P E $= e$, les distances vraies du soleil et de Mercure au zénith, Z☉ $= k$, Z☿ $=$ K, l'angle parallactique E ☉ Z $= v$, la distance géocentrique des centres ☉☿ $= s$: on a dans le triangle P ☉ Z, Tab. XIV. Fig. 4.

$$\cos k = \sin \Phi \sin D + \cos \Phi \cos D \cos u,$$

$$\text{tang } \delta = \frac{\sin u}{\text{tang } \Phi \cos D - \sin D \cos u}, \text{ et } v = \delta + \varkappa.$$

§. 20. Dans le triangle ☉ L ☿ on a

$$\cos s = \cos a \cos g, \text{ tg L☉☿} = \frac{\text{tg } g}{\sin a}, \sin \text{L☉☿} = \frac{\sin g}{\sin s},$$

$$\cos \text{L☉☿} = \frac{\text{tg } a}{\text{tg } s} = \frac{\text{tg } a \cos s}{\sin s} = \frac{\sin a \cos g}{\sin s},$$

Z☉L $= 90^\circ - v$, et Z☉☿ $= 90^\circ - v -$ L☉☿:

d'où l'on tire dans le triangle Z ⊙ ☿,

$$\cos K = \cos k \cos s + \sin k \sin s \sin (v + L \odot ☿) =$$
$$\cos k \cos a \cos g + \sin k \sin v \sin a \cos g + \sin k \cos v \sin g,$$

ou bien, en faisant pour abreger, $\cos a \cos g = l$, $\sin a \cos g = m$, $\sin g = n$, $\cos k = \lambda$, $\sin k \sin v = \mu$, $\sin k \cos v = \nu$,

$$\cos K = l\lambda + m\mu + n\nu.$$

Les verticals Z⊙, Z☿, étant prolongés en S, M, de maniere que $\odot S = q$, $☿M = Q$, soient les parallaxes qui répondent aux distances au zénith, k, K, la distance apparente des centres du soleil et de Mercure sera $SM = s'$. Mais, si (*Fig.* 5.) C est le centre de la terre, Z le zénith d'un lieu A, S un astre quelconque dont la parallaxe horizontale $\frac{CA}{CS} = p$, on a rigoureusement, $\text{tg } ASC = \frac{CA \sin ZCS}{CS - CA \cos ZCS}$, c'est-à-dire,

Tab. XIV. Fig. 5.

$$\text{tg } q = \frac{p \sin k}{1 - p \cos k}, \text{ et par la même raison } \text{tg } Q = \frac{P \sin K}{1 - P \cos K},$$

d'où il suit,

$$\sin q = \frac{p \sin k}{\sqrt{(1 - 2p \cos k + p^2)}}, \quad \cos q = \frac{1 - p \cos k}{\sqrt{(1 - 2p \cos k + p^2)}},$$
$$\sin Q = \frac{P \sin K}{\sqrt{(1 - 2P \cos K + P^2)}}, \quad \cos Q = \frac{1 - P \cos K}{\sqrt{(1 - 2P \cos K + P^2)}},$$

partant, $\cos q + \cot k \sin q = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2p \cos k + p^2)}}$, et

$$\cos Q + \cot K \sin Q = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2P \cos K + P^2)}}.$$

§. 21. Dans le triangle ⊙ Z ☿ (*Fig.* 3.) on a

$\cos \odot Z ☿ = \frac{\cos s - \cos k \cos K}{\sin k \sin K}$, et dans le triangle S Z M,

$$\cos s' = \cos ZS \cos ZM + \sin ZS \sin ZM \cos \odot Z ☿ =$$
$$\cos (k + q) \cos (K + Q) + \frac{\sin (k + q) \sin (K + Q)}{\sin k \sin K} (\cos s - \cos k \cos K),$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}\cos s &= (\cos k \cos q - \sin k \sin q)\ (\cos \mathrm{K} \cos \mathrm{Q} - \sin \mathrm{K} \sin \mathrm{Q})\\ &+ (\cos q + \cot k \sin q)\ (\cos \mathrm{Q} + \cot \mathrm{K} \sin \mathrm{Q})\ (\cos s - \cos k \cos \mathrm{K})\\ &= \cos k \cos \mathrm{K} \cos q \cos \mathrm{Q} - \cos k \sin \mathrm{K} \cos q \sin \mathrm{Q}\\ &- \sin k \cos \mathrm{K} \sin q \cos \mathrm{Q} + \sin k \sin \mathrm{K} \sin q \sin \mathrm{Q}\\ &+ \cos s\ (\cos q + \cot k \sin q)\ (\cos \mathrm{Q} + \cot \mathrm{K} \sin \mathrm{Q})\\ &- \cos k \cos \mathrm{K} \cos q \cos \mathrm{Q} - \frac{\cos k \cos^2 \mathrm{K}}{\sin \mathrm{K}} \cos q \sin \mathrm{Q}\\ &- \frac{\cos^2 k \cos \mathrm{K}}{\sin k} \sin q \cos \mathrm{Q} - \frac{\cos^2 k \cos^2 \mathrm{K}}{\sin k \sin \mathrm{K}} \sin q \sin \mathrm{Q} =\\ &\cos s\ (\cos q + \cot k \sin q)\ (\cos \mathrm{Q} + \cot \mathrm{K} \sin \mathrm{Q})\\ &- \frac{\cos k}{\sin \mathrm{K}} \cos q \sin \mathrm{Q} - \frac{\cos \mathrm{K}}{\sin k} \sin q \cos \mathrm{Q} + \frac{(\sin^2 k \sin^2 \mathrm{K} - \cos^2 k \cos^2 \mathrm{K}) \sin q \sin \mathrm{Q}}{\sin k \sin \mathrm{K}},\end{aligned}$$

d'où en substituant les valeurs de sin q, cos q, etc. (§. 20.) et en réduisant les termes, on obtient

$$\cos s' = \frac{\cos a \cos g - \mathrm{P} \cos k\,(1 - p \cos k) - p \cos \mathrm{K}\,(1 - \mathrm{P} \cos \mathrm{K}) + \mathrm{P} p\,(\sin^2 k - \cos^2 \mathrm{K})}{\sqrt{(1 - 2p \cos k + p^2)\,(1 - 2\,\mathrm{P} \cos \mathrm{K} + \mathrm{P}^2)}},$$

c'est-à-dire,

$$\cos s' = \frac{\cos a \cos g - \mathrm{P} \cos k - p \cos \mathrm{K} + \mathrm{P} p}{\sqrt{(1 - 2p \cos k + p^2)\,(1 - 2\mathrm{P} \cos \mathrm{K} + \mathrm{P}^2)}},$$

ou bien en substituant les valeurs (§. 20.) cos $k = \lambda$, cos $\mathrm{K} = l\lambda + m\mu + n\nu$, cos a cos $g = l$,

$$\cos s' = \frac{l - \mathrm{P}\lambda - p\,(l\lambda + m\mu + n\nu) + \mathrm{P} p}{\sqrt{(1 - 2p\lambda + p^2)\,(1 - 2\mathrm{P}\,(l\lambda + m\mu + n\nu) + \mathrm{P}^2)}}.$$

§. 22. Voilà une expression de l'effet des parallaxes, exacte et assès simple, sans qu'on ait négligé la moindre quantité. Elle peut donc être employée, quelque grandes que soient les distances et les parallaxes; mais pour les passages des planetes sur le soleil, où l'on peut négliger, sans commettre une erreur sensible, les carrés des parallaxes, on a, en faisant pour abreger, $l\lambda + m\mu + n\nu = c$,

$$\cos s' = \frac{1 - pc - P\lambda}{\sqrt{(1 - 2p\lambda - 2Pc)}} = \frac{1 - pc - P\lambda}{1 - p\lambda - Pc} =$$
$$(1 - pc - P\lambda)\ (1 + p\lambda + Pc) = 1 - p\ (c - l\lambda) + P(cl - \lambda) =$$
$$\cos s - p\ (m\mu + n\nu) + P\ (cl - \lambda).$$

Comme dans les passages, s et s' ne sont jamais plus grandes que 16′, on a, en négligeant leurs quatrièmes puissances, $\cos s = 1 - \frac{s^2}{2}$, et $\cos s' = 1 - \frac{s'^2}{2}$, d'où l'on tire

$$\frac{s'^2}{2} = \frac{s^2}{2} + p\ (m\mu + n\nu) - P\ (cl - \lambda), \text{ ou bien}$$
$$s' = \sqrt{(s^2 + 2p\ (m\mu + n\nu) - 2P\ (cl - \lambda))} =$$
$$s + \frac{p\ (m\mu + n\nu) - P\ (cl - \lambda)}{s} = s + \frac{(p - Pl)\ (m\mu + n\nu)}{s} + \frac{P\lambda\ (1 - l^2)}{s} =$$
$$s + \frac{(p - Pl)\ (m\mu + n\nu)}{s} + Ps\lambda,$$

c'est-à-dire,

$$s' = s\ (1 + P\cos k) + \frac{(p - P\cos s)\ (\sin a \cos g \sin v + \sin g \cos v)\ \sin k}{s},$$

où s se calcule aisément pour chaque instant, au moyen des mouvemens géocentriques, ou se trouve déjà calculé dans les sections précédentes, par les formules $s = \sqrt{(a^2 + g^2)}$ ou $\cos s = \cos a \cos g$.

§. 23. Au moment où le centre de Mercure se voit sur le bord du soleil, soit à l'entrée, soit à la sortie, on a $s' = r$, équation qu'on ne saurait résoudre que par approximation ou par tatonnemens, en faisant usage d'une interpolation assés connue, qui suppose qu'on ait déjà calculé trois distances apparentes peu éloignées du commencement, du milieu, et de la fin. Mais quand on a observé les instans τ', τ'', de l'immersion et de l'émersion, et qu'on en veut conclure la longitude du méridien B, sous lequel l'observation a été faite, on ne peut calculer exactement les angles géocentriques a, g, etc. (§. 19.), pour l'instant de l'observation, la différence entre les tems τ', τ'', du

méridien B, et les tems répondans du méridien A des tables, n'étant pas encore connue. Cependant on connait exactement leurs changemens dans l'intervalle $\tau'' - \tau$, par les mouvemens horaires des élémens A, f, a, g, (§. 19.), savoir

$$h = h\ (\S.\ 1.),\ H' = \frac{\pi h - \varrho H}{\pi - \varrho},\ G' = -\frac{\varrho\,(H - h)}{\pi - \varrho},\ \text{et}\ \beta' = \frac{\varrho\beta}{\pi - \varrho}\ (\S.\ 7.).$$

En nommant donc les valeurs de a et g, répondans au tems τ', $a = x$, $g = y$, et $\tau'' - \tau' = \vartheta$, on aura pour le tems τ'', $a = x + G'\vartheta$, $g = y + \beta'\vartheta$. Pour ce qui regarde les quantités λ, μ, ν, (§. 20.) qui changent très-lentement, et n'ont pas la même influence sur la valeur de s (§. 22.), étant multipliées par p ou P; on peut supposer la longitude du méridien B assés connue, pour calculer leurs valeurs pour les instans τ' et τ'', que j'appellerai λ, μ, ν, et λ', μ', ν'.

§. 24. Au moyen des formules (§. 22.)

$$s'^2 = s^2 + 2p\,(m\mu + n\nu) - 2P\,(\lambda\,(l^2 - 1) + l\,(m\mu + n\nu)),$$

et $s^2 = a^2 + g^2$,

on obtient les deux équations suivantes:

I. $$r^2 = x^2 + y^2 + 2p\,(\mu \sin x \cos y + \nu \sin y) - 2P\,[\lambda(\cos^2 x \cos^2 y - 1) + \cos x \cos y\,(\mu \sin x \cos y + \nu \sin y)],$$

II. $$r^2 = (x + G'\vartheta)^2 + (y + \beta'\vartheta)^2 + 2p\,(\mu' \sin(x + G'\vartheta)\cos(y + \beta'\vartheta) + \nu' \sin(y + \beta'\vartheta)) - 2P\,[\lambda'\,(\cos^2(x + G'\vartheta)\cos^2(y + \beta'\vartheta) - 1) + \cos(x + G'\vartheta)\cos(y + \beta'\vartheta)\,(\mu' \sin(x + G'\vartheta)\cos(y + \beta'\vartheta) + \nu' \sin(y + \beta'\vartheta))],$$

ou en substituant $\sin x = x$, $\sin y = y$, $\cos x = 1$, $\cos y = 1$,

I. $$r^2 = x^2 + y^2 - 2\,(P - p)\,(\mu x + \nu y);$$

II. $$r^2 = x^2 + y^2 + 2\vartheta\,(G'x + \beta' y) + \vartheta^2\,(G'^2 + \beta'^2) - 2\,(P - p)\,(\mu' x + \nu' y + \vartheta\,(\mu' G' + \nu' \beta')),$$

d'où, en ôtant la seconde équation de la premiere, et en faisant pour abreger,

$$\mu' - \mu = \mathfrak{M},\ \nu' - \nu = \mathfrak{N},\ P - p = \mathfrak{P},$$

l'on tire

$$o = 2\mathfrak{P}(\mathfrak{M}x + \mathfrak{N}y + \vartheta(\mu'G' + \nu'\beta')) - 2\vartheta(G'x + \beta'y) - \vartheta^2(G'^2 + \beta'^2),$$

ou bien

$$y = \frac{2x(\mathfrak{M}\mathfrak{P} - \vartheta G') + 2\mathfrak{P}\vartheta(\mu'G' + \nu'\beta') - \vartheta(G'^2 + \beta'^2)}{2(\vartheta\beta' - \mathfrak{N}\mathfrak{P})}.$$

Ayant donc calculé les quantités données

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{P} - \vartheta G'}{\vartheta\beta' - \mathfrak{N}\mathfrak{P}} = B,\ \frac{\frac{1}{2}\vartheta^2(G'^2 + \beta'^2) - \mathfrak{P}\vartheta(\mu'G' + \nu'\beta')}{\vartheta\beta' - \mathfrak{N}\mathfrak{P}} = C,$$

on a $y = Bx - C$; ce qui substitué dans l'équation I, donne

$$r^2 = x^2(1 + B^2) - 2x(BC + \mu\mathfrak{P} + B\nu\mathfrak{P}) + C(C + 2\nu\mathfrak{P}),$$

d'où, ayant calculé

$$\frac{BC + \mathfrak{P}(\mu + B\nu)}{1 + B^2} = E,\ \text{et}\ \frac{C(C + 2\nu\mathfrak{P}) - r^2}{1 + B^2} = F,$$

l'on tire

$$x = E \pm \sqrt{(E^2 - F)},\ \text{et}\ y = BE - C \pm B\sqrt{(E^2 - F)}.$$

Comme la latitude géocentrique y, pendant toute la durée du passage, change si peu, que sa valeur ne peut pas être fort différente de la valeur b' (§. 7.) qu'elle a au moment de la conjonction vraie, il sera facile de connaitre, laquelle des deux valeurs de y convient au tems de l'immersion, c'est-à-dire, s'il faut employer le signe + ou —.

§. 25. Ayant trouvé par cette méthode, les valeurs x, y, ou a, g, à l'instant de l'immersion apparente, on en dé-

duira aisément le tems T′ de la conjonction géocentrique, compté au méridien B, puisque c'est le moment où $a = o$. L'angle a est donc diminué de x, depuis l'immersion τ' jusqu'à la conjonction vraie T′; or il lui faut $-\frac{x}{G'}$ heures pour cela (§. 23.): on a donc

le *tems de la conjonction vraie*, $T' = \tau' - \frac{x}{G'} = \tau' + \frac{(\pi-\varrho)x}{\varrho(H-h)}$ heures (§. 7.),

la *latitude géocentrique de Mercure dans la conjonction* $=$

$$y + \frac{(\pi-\varrho)\beta' x}{\varrho(H-h)} = y + \frac{\beta x}{H-h},$$

et sa *longitude* égale à celle du soleil.

Ces formules suffisent, tant pour déterminer les longitudes de tous les lieux, où l'immersion et l'émersion a été observée, que pour corriger les élémens de Mercure.

§. 26. Après avoir calculé l'instant de l'immersion et de l'émersion pour un lieu déterminé, on prend le milieu entre ces deux instans, pour le moment de la plus grande phase. Ayant donc calculé, au moyen d'une des formules (§. 22.), la distance apparente pour ce moment, elle sera la plus courte distance ou *la plus grande phase* pour ce lieu.

§. 27. Il ne reste maintenant, que de déterminer la position des points de l'immersion, de l'émersion, et du milieu, pour un lieu donné. Soit (*Fig.* 6.) S le centre du soleil, IE la route apparente de Mercure sur le soleil, I, E, les points de l'immersion et de l'émersion, M le milieu, $SM = s''$ la plus courte distance apparente, AB l'écliptique, SC le cercle de latitude, SV le vertical, IK, MN, EF, perpendiculaires à l'écliptique. Ayant calculé pour les momens où Mercure apparait en I, E, M, ses latitudes géocentriques g, g', g'', les distances du soleil au zénith, k, k', k'', les angles parallactiques v, v', v'' (§. 19.), et l'éffet rélatif des parallaxes $(P - p)$ sin k (§. 20.), on trouve les latitudes apparentes de Mercure, au moyen des

formules, $IK = g - (P - p) \sin k \cos v$, $EF = g' - (P - p) \sin k' \cos v'$, et $MN = g'' - (P - p) \sin k'' \cos v''$. On a donc pour l'immersion

$$\sin BSI = \cos CSI = \frac{IK}{IS} = \frac{g - (P - p) \sin k \cos v}{r + R}, \quad VSC = v,$$

et l'élongation du point de l'immersion depuis la partie boréale du vertical vers l'orient, ou l'angle

$$VSI = w = \text{Ang. cos.} \frac{g - (P - p) \sin k \cos v}{r + R} - v.$$

De la même manière, on trouve l'élongation du point de l'émersion depuis la partie boréale du vertical vers l'occident,

$$VSE = w' = \text{Ang. cos.} \frac{g' - (P - p) \sin k' \cos v'}{r + R} + v',$$

et l'élongation du point de la plus grande phase vers l'orient,

$$VSM = w'' = \text{Ang. cos.} \frac{g'' - (P - p) \sin k'' \cos v''}{s''} - v''.$$

Il faut observer, 1) que l'angle v devient négatif, quand le cercle de latitude tombe du côté oriental (§. 19.), 2) qu'il faut substituer la partie méridionale du vertical au lieu de SV, quand les latitudes apparentes sont australes, 3) qu'il faut changer les élongations orientales en occidentales, et réciproquement, quand les angles w, w', w'', sont négatifs.

DE
RELATIVA NONNULLORUM LOCORUM ELEVATIONE,
IN QUIBUS OBSERVATIONES BAROMETRICAE AC THERMOMETRICAE SUNT INSTITUTAE.

Auctore
P. INOCHODZOW.

Conventui exhibita d. 4. Junii 1800.

Cum nuper observationes meteorologicas Petropoli et Mosquae a celeberrimis viris Eulero et Strittero solerter institutas pervolutarem, atque medias altitudines barometricas invicem comparārem, non sine admiratione notabilem illarum differentiam animadverti; unde nactus sum occasionem inquirere in discrimen soli harum duarum metropolium, quod multum superat ac discrepat a calculo D. Christiani Mayer ex observationibus Lerchianis deducto. His adnexi elevationem Rigae ex observationibus meis per integrum annum 1798 in hac urbe factis. Opportune venerunt ad illustrissimam Academiam observationes meteorologicae in urbe Nertschinsk anno superiori habitae, e qui-

bus elevatio hujus loci respectu Petropolis et Mosquae in computum etiam est tracta.

Ante quam ad ipsos calculos accedam, sequentia primum generaliter praemonenda de hac methodo existimavi:

a) E sola observata mercurii altitudine in tubo barometrico pondus et pressio atmosphaerae accurate cognosci nequit, nisi ad calorem aëris et dilatationem mercurii simul attenderetur, ut olim Amontonsius et Delilius recte notarunt, ideoque semper observandum est thermometrum una cum barometro.

b) Respiciendum insuper est ad vim et directiones ventorum, per quaenam loca, humida an sicca, calida aut frigida spirant: primariam enim illi caussam mutationum in atmosphaera et diversarum altitudinum mercurii in barometro constituere videantur. In zona torrida ventus orientalis ejusdem fere vigoris perpetuo spirat, mercurius in barometro exiguam subit mutationem teste Halleio; Condamine in ora maritima regni Peruani notavit altitudinem mercurii $28''\ 0'''$ et mutationem vix esse $2\frac{1}{2}$ vel 3 linearum; in editissimorum ibi montium cacuminibus ab aëris puritatem adhuc minorem variationem fieri credibile est; ita in urbe Quitto, jacente sub ipso fere aequatore in excelso monte, aliquot annorum spatio maxima differentia altitudinis vix excessit sesquilineam, et altitudo mercurii tantum est 20 pollicum et $\frac{1}{4}$ lineae. At in regionibus boreis, ob atmosphaeram magis vaporosam et ponderosam, mutationes mercurii sunt maximae et limites variationum ad 3 fere pollices assurgunt *), majores que fiunt hieme

*) Petropoli hucusque observata est altitudo barometri maxima 29", 37 pollic. Parisin. anno 1798 d. 13 Decembr. st. veter. et minima 26, 41; bis, an. 1729 d. 12 Octobr. et 1758 d. 30 Decembr. unde variatio 2, 96.

quam aestate: nam in his locis venti spirant vagi, nunc debiles nunc fortes et adversis quibuscunque directionibus, interdum cum differenti impetu, ideo saeviente procella nonnunquam ad duos pollices mercurius in tubo sidit, et decrescente illa rursus ascendit. Hinc excludendae forent e computu altitudines barometri vento procelloso observatae. In locis valde remotis possunt venti eodem tempore prorsus a contrariis plagis spirare et diversam atmosphaerae constitutionem aëris que temperiem producere; praesertim si loca multum inter se relativa differunt etiam elevatione. In Ephemeridibus Geographicis celeberr. Zach. Tom. IV. parte 5 seu Novembri 1799 D. consiliarius Wildt dissertat. de efficacia et influxu ventorum in altitudines barometricas et affert sequens exemplum: ex 31 observationibus correspondentibus Bernae et Mühlheimi factis, erant 15 tribus diversis diebus et flantibus ventis ex 3io horizontis quadrante, hoc est e plaga inter austrum et occasum, quae praebebant minimam elevationem 880 et maximam 908, 6 pedum ideoque differentiam 28′, 6 et mediam 894′, 3; 16 aliae observationes quinque aliis diebus, spirantibus ventis ex primo quadrante, seu e plaga inter septentrionem et ortum, dabant minimam elevationem 947 pedum et maximam 983′ 6, unde differentia 36′, 6 et medium 965′, 3, consequenter diversitas ventorum caussa fuit discrepantiae 71 pedum, at inter maximam ultimarum et minimam priorum evadit differentia 103, 6 pedum. Medium ex omnibus observationibus forte fortuna congruit cum medio e consideratione ventorum concluso, hoc est 929′, 8 quibus Berna elevatior Mühlheimo. Ob eandem fortassis caussam, inter octo observationes in monte Bructero a D. prof. Zimmermann et correspondentes Ilsenburgi mense Julio 1775 factas, prodit differentia altitudinum 86 pedum ac media Bructeri altitudo reperta est 2643 pedum Parisinorum (Journ. des Scav. T. I. N. 1. an. 1776).

c) Magna copia vaporum in atmosphaera semper haerentium minuit elasticitatem reddit que columnam aëris superincumbentis leviorem et barometrum sidit: hinc nonnulli suadent observationibus barometricis associandas esse hygrometricas. Dubitandum omnino non est aëris humiditatem prope superficiem terrae per longum atmosphaerae tractum aequabiliter distribui non posse, ut vidimus hoc saepissime in nubibus per coelum sparsis. D. Dr. Kramp putat refractiones astronomicas et terrestres, (adeoque altitudines etiam barometricas), dependere a specifica aëris elasticitate, quae ipsa est functio caloris atque humiditatis simul; idem ait novum se invenisse manometrum ad mensurandam aëris densitatem, cujus instrumenti divulgatio propediem est exoptabilis. (Monatl. Correspondenz Apr. 1800.)

d) Ad obtinendas altitudines barometri ac thermometri medias exiguuntur observationes plurium annorum, forsan 19, quo temporis intervallo juxta nonnullorum opinionem tempestates redire creduntur, eaeque instrumentis exactis et harmonicis magna cura instituendae sunt; atque loci altitudo, ubi barometrum erat suspensum, respectu fluvii praetercurrentis, vel alius aquae stagnantis notetur. Quamvis prima fronte viderentur ad hoc praestandum sufficientes esse observationes unius integri anni, qno decurso vicissitudines atmosphaerae omnes respectu calor s, frigoris, ventorum, siccitatis, humiditatis ac elasticitatis aër s invicem compensantur. His addi meritissime debent etiam electricitatis phaenomena, quae magnum habent influxum in temperiem aëris mutandam; sed conferenti nonnullorum annorum observationes statim patebit mediam altitudinem barometri, sicut et thermometri, non eandem esse quotannis, ideoque discrepantem prodire elevationem locorum in quibus observationes factae sunt; ita discrimen

soli Petropolitani et Kamyschensis ex 46 mensibus inveni 26 perticarum, at singillatim ex observationibus

anni 1771 prodit idem perticarum 22, 5

1772 — — — 32, 3

1773 — — — 25, 8.

Mirandum igitur non est, a diversis observatoribus, diverso tempore, diversam ejusdem montis altitudinem ope barometri saepe inventam fuisse.

e) Antehac jam monui discrimen elevationis locorum valde dissitorum ope barometri tuto determinari non posse, nisi praeter propter et in illis casibus, ubi magna praecisio non desideratur: diversa enim, juxta Muschenbroekium, puritas mercurii, diversa durities vitrei tubi, qua plus minusve ab eodem calore ampliatur, diversa vis repellens vitri et interioris superficiei asperitas, aliaeque circumstantiae, inter quas rarissime ac difficulter obtinentur tubi ejusdem ubivis per totam suam longitudinem calibrae seu diametri, efficiunt ut ultimum accurationis terminum attingere non valeamus: maxime dum vel unius saltem lineae differentia in vitiosam barometri structuram cadere possit. Praeterea barometri altitudo vix ad $\frac{1}{10}$ lineae partem assignari tutissime potest; at prope superficiem terrae mutatio unius lineae pro vario atmosphaerae statu constituit jam 72 usque ad 78 pedes parisinos, unde dubium in ipsa observatione plusquam unius perticae nostrae ad minimum superest. Hinc in libellatione locorum, ubi magna requiritur exactitudo, praxis haec non est adhibenda.

His praefixis monitis venio nunc ad ipsos calculos, quos feci juxta regulam D. de Luc in notitia motuum coelestium ad

annum 1765 a celeberrimo Lalandio expositam et multum laudatam, quae sequenti formula exprimi potest.

Sit altitudo mercurii in barometro ad radicem montis, seu in loco humiliori in lineis pedis parisini $=$ B eadem in vertice montis, seu in loco altiore $= b$, erit altitudo quaesita $= \frac{log\ B - log\ b}{1000}$ in hexapedis parisinis, si adhibeantur logarithmi vulgares octo cyphris una cum characteristica constantes, nulla adhuc habita ratione correctionis a calore; hanc que incorrectam altitudinem vocemus $= a$; ponamus porro gradum thermometri Reaumuriani medium inter observatos in utraque statione $= t$ habebitur altitudo montis vel alicujus loci $=$

$$a - \tfrac{1}{215}\,(16^{\circ},\,75 - t)\,a.$$

Si loco thermometri Reaumuriani, quod confusionem aliquando parit, an mercurio aut spiritu vini repletum, et scala ipsius in 80 aut 90 gradus inter fixos ebullientis et congelationis aquae terminos divisa sit, adhibeatur termometrum Delilianum nobis Petropoli et alibi saltem in Russia magis usitatum, potest illud cum hoc commutari: est enim, denotantibus R et D gradus Reaumurianos et Delilianos,

$$R = 80 - \tfrac{8}{15}D = 80 - \tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{30}D, \text{ et}$$

$$D = 150 - \tfrac{15}{8}R = 150 - 2R + \tfrac{1}{8}R.$$

Substituto nunc D pro R obtinebitur altitudo desiderata $=$

$$a - \tfrac{8}{15}\,\frac{(D - 118,\,6)}{215}\,a,$$

et facta reductione erit illa

$$= \tfrac{8}{15\,.\,215}\,(521,\,7 - D)\,a \text{ in hexapedis parisinis,}$$

$$\text{et } \tfrac{2\,.\,8}{5\,.\,215}\,(521,\,7 - D)\,a \text{ in pedibus parisinis.}$$

Eadem in pedibus londinensibus $= \frac{2 \cdot 8 \cdot 864}{5 \cdot 215 \cdot 811} (521, 7 - D)\ a$,

denique in perticis Russicis $= \frac{2 \cdot 8 \cdot 864}{5 \cdot 7 \cdot 215 \cdot 811} (521, 7 - D)\ a$

$= \frac{2^8 \cdot 3^3}{5^2 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 811} (521, 7 - D)\ a.$

Primus coëfficiens $=$ 0, 0022652.

et logarithm. ipsius $=$ 7, 3551065.

Ultima formula est constans et semper ea uti possumus: nam frigus naturale nunquam ad 521, 7 gradus Delilianos intenditur; at in priori t non raro aestivis fervoribus superat $16\frac{3}{4}$ gradus Reaumurianos, et tunc formula ista mutanda erit in sequentem

$$a + \frac{1}{215} (t - 16\tfrac{3}{4})\ a.$$

Ut appareat quanta prodit differentia elevationis locorum inter altitudines barometri medias ex extremis maximis, scil. et minimis quolibet mense conclusas, et inter medias ex omnibus sumtas, quae ultimae ob majorem numerum praeferendae sunt; e singulis annis primum seorsim computavi elevationes, et ut uno obtutu conspici possint, tanquam in tabula succincte repraesentabo.

Media ex menstruis extremis

Anni	Altitud. Barom. Petropoli	Altitud. Barom. Mosquae	Termom. med. inter. P. et M.	Elevat.
1797	28″ . 1‴, 416	27″ . 2‴, 850	144°	118, 24 pert. russ.
98	28 . 2 , 376	27 . 2 , 760	144, 95	129, 18
99	28 . 2 , 352	27 . 2 , 844	148, 38	127, 08
				124, 80.

Altitudines mediae ex omnibus

Anni	Barom. Petropoli	Barom. Mosquae	Thermom. med. inter. P. et M.	Elevat.
1797	28″ . 2‴, 100	27″ . 3‴, 144	142°, 20	122, 48
98	28 . 2 , 668	27 . 2 , 904	142, 76	131, 79
99	28 . 2 , 832	27 . 3 , 180	146, 78	129, 08
				127, 80.

Deinde sumtis mediis ex tribus annis calculum iteravi.

ex extremis	28″. 2‴, 048	27″. 2‴, 878	145°, 58	125.
ex omnibus	28 . 2 , 533	27 . 3 , 076	143, 90	128.

Liceat hic unicum ex ultimis apponere paradigma calculi, quod idem de reliquis omnibus tenendum est.

log. 338‴, 533 . . . . . 2, 5296010
log. 327, 076 . . . . . 2, 5146486
a = 149, 524
log. coëfficientis 7, 3551065
log. (521, 7 — 143, 9) 377, 8 . 2, 5772620
log. a 2, 1747109
log. elevationis 2, 1070, 794
cui respondent 127, 96 vel rotunde 128 Pert. Russ.

Christianus Mayer conclusit ex observationibus Lerchianis a Martio 1750 ad Octobrim 1751 ex 19 mensibus mediam altitudinem barometri Mosquae 27″. 5‴, 4; Petropoli ex 17 annis ab Octobri 1752 ad 1769, adeoque diversis temporibus, 27″. 10‴, quae altitudines nimis dissentiunt ab Euleiianis et Stritterianis supra relatis, et inventa ab ipso elevatio Mosquae, applicata correctione a thermometro, 325 pedum Parisinorum vel 49⅕ perticarum Russicarum enormiter discrepat a nostra. Hinc effuse a

Mayero laudatae observationes Lerchianae redduntur minus certae, et quamvis de solertia longo usu periti observatoris nullum, attamen de requisita structura barometri ejus magnum adest dubium.

Obstupesceret ipse Mayer, cui mirum jam videbatur ingens discrimen altitudinis inter Petropolin et Mosquam a se repertum, idque ampliori examini plurium annorum observatione confirmandum relinquebat. Observationes thermometricae indicant etiam Mosquam elevatiorem esse Petropoli, nam frigus ibi tempestivius et acrius sentitur, licet ea plus quam quatuor gradibus australior est Petropoli.

Altitudo barometri media Rigae e menstruis extremis anni 1798 est $28''.\ 0'''$, 636 et thermometri Deliliani 139°, 8 collata cum correspondentibus Petropolitana et Mosquensi praebet Rigam elevatiorem esse Petropoli 19, 2 et depressiorem Mosqua 111 perticarum. Eadem altitudo media ex omnibus $28''.\ 1'''$, 09 et thermometri 139°, 2 comparata cum similibus Petropolitana et Mosquensi exhibet Rigam elevatiorem Petropoli . . . . . 17, 5 perticarum
et depressiorem Mosqua . . 115 . ——

Altitudo, in qua suspensum erat barometrum Rigae, supra libellam Dünae eadem proxime assumi potest, quae Petropoli supra Newam. Nunc subtrahenda foret ab altitudine Rigae, distantis ab ostio Dünae 14 Werstis seu duobus milliaribus germanicis, declivitas hujus fluvii, quae debet esse exigua, cum nullae jam amplius a Riga ad ostium exstant cataractae. Ex his iterum licebit refellere dictum ac opinionem antehac jam citati a me candidati Rigensis Ehrlich, qui absque ullo testimonio ac observatione refert ostium Dünae 3000 pedum geometricorum seu $\frac{3}{70}$ milliaris germanici, hoc est plus quam unius Werstae depressius esse ostio Newae. (*Büsching's wöchentl. Nachr.* 1780. 22. *Stück.*)

Summa observationum meteorologicarum in urbe Nertschinsk anno 1799 institutarum est haec:

Calor maximus ad thermometrum Reaumurianum ibi observatus + 30° diebus 14 et 26 Julii, et frigus maximum — 36 die 5to Januarii. Unde variatio 66 graduum.

Maxima barometri altitudo erat die 5to Januarii 26″. 2‴
et minima d. 19 Decembris . . 24 . 3
adeoque differentia . . . . . 1 . 11.

Media altitudo ex menstruis maximis et minimis prodit 25″. 5‴, 552 et gradus thermometri medius — 4°, 885 respondens gradibus Delilianis 159, comparata cum correspondentibus praebet elevationem urbis Nertschinsk supra Petropolin 368, 7 et supra Mosquam 244 perticarum.

Mirum sane videtur nullam in diario harum observationum adesse mentionem de tonitru, fulgure ac grandine per totam aestatem.

Hic locus est obiter annotare de elevatione Kolae, quam *b.* Mayer, commisso errore calami, reperit 400 pedum Parisinorum altiorem esse Petropoli, eandem e meo calculo inveni 234 pedum vel 35 ½ perticarum tantum.

EXTRAIT
DES
OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES
FAITES À SAINT PÉTERSBOURG
EN L'ANNEÉ MDCCXCV.

D'APRÈS LE NOUVEAU STILE.

PAR
J. A. EULER.

Présenté à l'Académie le 11 *Janvier* 1796.

I. Baromètre.

1) Les hauteurs extrèmes, la variation totale, le milieu et la hauteur moyenne du Baromètre, pour chaque mois de l'année 1795.

Mois.	Au plus haut			Au plus bas			Variation	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour,	heure.	P. cent.	jour,	heure.		P. cent.	P. cent.
Janvier	28.84	le 15	à 4 h. s.	27.07	le 5	à 7 h. s.	1.77	27.95	28.103
Février	28.92	le 17	à 6 h. s.	27.24	le 11	à 6 h. s.	1.68	28.08	28.135
Mars	28.74	le 13	à 9 h. m.	27.68	le 24	à 9 h. m.	1.06	28.21	28.128
Avril	28.75	le 9	à 12 h. m.	27.81	le 18	à 4 h. s	0.94	28 28	28.339
May	28.57	le 18	après-m.	27.29	le 25	à 3 h. m.	1.28	37.93	28.039
Juin	28.67	le 5	à 8 h. m.	27.63	le 27	à 3 h. s.	1.04	28.15	28.120
Juillet	28.32	le 25	à 12 h. m.	27.74	le 13	à 3 h. m.	0.58	28 03	28.020
Août	28.77	le 31	à 12 h. s.	27.73	le 22	à 6 h m.	1.04	28.25	28.152
Septembr.	28.79	le 1	à 9 h. m.	27.71	le 27	à 9 h m.	1.08	28.25	28.312
Octobre	28.62	le 5	à 12 h. m.	27.37	le 25	à 12 h. s.	1 25	27.99	28.138
Novembre	28.72	le 10	à 12 h.m	27.11	le 13	à 7 h. s.	1.61	27.91	27.893
Décembre	28.74	le 8	à 12 h. m.	27.18	le 30	à 12 h.m.	1.56	27.96	28.127

m. signifie *matin* ou *avant-midi*, et s. *soir* ou *après-midi.*

2) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a surpassé quelques points principaux de l'échelle, avec la hauteur qui répond à chaque demi-mois.

Mois.	Au dessus de 27. 80 jours h.	27. 90 jours h.	28. 00 jours h.	28. 10 jours h.	28. 20 jours h.	un demi-mois au dessus de Pouces. milliem.
Janvier	25. 23	22. 3	18. 11	17. 4	12. 11	28. 126
Février	22. 1	19. 18	17. 5	15. 10	11. 18	28. 135
Mars	27. 12	24. 12	20. 11	16. 8	12. 7	28. 128
Avril	30. 0	28. 17	27. 12	24. 18	20. 15	28. 340
May	25. 12	22. 14	17. 5	14. 11	9. 10	28. 038
Juin	25. 8	21. 7	19. 6	16. 4	11. 2	28. 117
Juillet	29. 2	23. 20	17. 14	10. 16	6. 5	28. 028
Août	29. 17	28. 15	24. 10	16. 5	9. 3	28. 120
Septembre	29. 2	28. 8	26. 2	24. 8	21. 9	28. 360
Octobre	27. 8	25. 14	23. 4	17. 10	13. 10	28. 143
Novembre	17. 11	12. 16	10. 6	8. 4	5. 9	27. 853
Décembre	26. 2	23. 23	20. 22	17. 23	15. 1	28. 178

3) Variations subites et extraordinaires.

Mois.	Temps. jours.	heure.	Diff. heure.	Barom. P. cent.	Variat. centie.	Therm. degrés.	Vents.	Atmosphère.
	3	6 m.		27.76		155	Calme	Brouillard, neige, c. couvert ensv., serein
	4	2 m.	20	28.26	+ 50	163	Ou.	humide, c. couv. ens. neige
	5	7 s.	41	27.07	— 119	149	SOu. fort	neige, c couvert, pluie
	5	12 s.		27.10		151	NOu.	c. couvert, humide
Janv.	7	12 s.	48	28.14	+104	169	N. calme	c. couvert, brouillard, ensuite c. serein
	11	7 m.	37	27.86	+ 69	166	NOu.	c. couvert ensuite neige
	12	8 s.		28.55		177	NOu.	nuages
	15	6 s.	37	28.85	— 71	167	Est	c. serein, ens. couv. et neige
	17	7 m.		28.14		169	NE	c. serein
	9	2 s.	24	28.18	— 55	157	S. fort	ciel couvert
	10	2 s.		27.63		152	S.	ciel couvert
	11	6 s.	30	27.24	+ 69	145	S.	ciel couvert, pluie
	12	12 s.		27 93		157	NOu.	ciel couvert
	14	12 m.		27.50		148	SOu.	ciel couvert, neige
Févr.	15	12 m.	36	28.29	+ 79	161	NOu.	c. serein, ensuite brouillard et c. couv.
	16	12 m.	24	28.32	+ 58	157	SE. calme	nuages ensuite c. serein
	17	12 m.		28.90		165	NE. fort	ciel serein
	21	12 m.	30	28.63	— 86	160	NOu.	c. serein, ens. couv. et neige
	22	6 s.		27.77		154	NOu.	c. couvert ensuite serein
	14	6 m.	46	27.72	+ 60	194	NOu.	c. serein
	16	4 m.		28 32		185	S. fort	c. ser., ens. c. couv brouillard
Mars	23	2 m.	17	28.17	— 44	171	S. fort	c. ser., ens. couv. et beauc. de neige
	23	7 s.		27.73		152	S.	c. couvert, neige
	24	9 m.	45	27.68	+ 70	148	S.	c. couv., pluie ens c. serein
	26	9 m.		28.38		154	SOu.	c. couvert
	21	12 s.	51	28.22	— 90	137	calme	c. couvert ens. pluie et vent
	24	3 m.		27.32		141	S.	c. couvert ensuite pluie
May	29	6 m.	24	28.26	— 56	141	SE. fort	c. serein, ens. couv. et pluie
	30	6 m.	26	27.70	+ 57	142	SOu. fort	c. couv. pluie, ens. c. serein
	31	8 m.		28.27		136	E.	c. serein

Mois.	Temps jours	heure.	Diff. heure.	Barom. P. cent.	Variat. cent.	Therm. degrés.	Vents.	Atmosphère.
	13	3 s.	24	28.29	— 46	126	NOu. fort	ciel serein
	14	3 s.		27.83		132	SOu. fort	c. couv. beaucoup de pluie
Sept.	23	12 s.	81	28.62	— 91	139	SE fort	c. couv. ens. serein, nuages, pluie à verse
	27	9 m.	87	27.71	+ 88	136	S ff.	pluie à verse, c. couv. nuages
	30	12 s.		28.59		141	SOu. fort	ciel serein
Oct.	24	12 s.	9	17.79	— 32	139	calme	brouillard, pluie, c. couvert
	25	9 m.		27.47		138	SOu.	beauc. de pluie c. couvert
	10	12 m.	79	28.72	— 161	154	SOu.	c. serein, ens. couvert, pluie
	13	7 s.		27.11		155	E.	neige, c. couvert
	13	7 s.	53	27.11	+ 87	155	E.	ciel couvert, neige
	15	12 s.	24	27.98	— 71	157	NOu. ff.	c. serein ensuite couvert
	16	12 s.		27.27		145	SOu. fort	nuages ensuite, c. couvert
	17	11 s.	23 21	28.10	+ 83 — 38	157	NOu.	c. serein. La rivière charia des glaces
Nov.	18	8 s.		27.72		148	S fort	c. couvert
	23	6 m.	30	28.19	— 65	156	SE	c. ser., brouillard, c. couvert
	24	12 m.		27.54		148	SE	c. couvert, neige
	25	8 m.	20	27.98	+ 44	153	SOu.	c. serein ensuite couvert
	27	6 m.		27.75		143	S fort	c. ensuite pluie
	28	9 s.	39	27.18	— 57	150	SOu. ff.	c. couvert, neige
	30	1 m	28	28.15	+ 97	154	E	c. couvert, ensuite neige
	8	12 m.	51	28.74	— 87	152	calme	c. couvert, neige
	10	3 s.		27.87		150	NOu.	nuages, ensuite c. serein
	17	12 s.	46	28.59	— 126	175	calme	c. serein
	19	10 s.		27.33		148	SOu. fort	pluie et ciel couvert
	20	9 s.	39	27.46	+ 93	159	NOu ff.	c. couv. et beaucoup de neige
	22	12 m.		28.39		170	calme	c. serein, brouillard
Déc.	24	10 s.	40	28.57	— 86	177	NE. E	c. serein, brouillard
	26	2 s.	34	27.71	+ 67	168	SE	c. couvert, neige
	27	12 s.		28.38		172	E	c. couvert
	28	6 m.		28.39		173	SE	c. couvert
	30	12 m.	54	27.18	— 121	148	calme	c. couvert brouillard, pluie et neige
	30	12 m.	36	27.18	+ 95	148	calme	c. couv. brouil., pluie et neige
	31	11 s.		28.13		158	NOu.	nuages.

+ marque les montées et — les descentes du Baromètre ; ff designe un vent très fort.

Je marquerai, comme je l'ai déjà fait dans un des mes extraits précédens, par la lettre *A* l'année entière ou bien l'intervalle de temps enrre le 1 Janvier et le 31 Décembre incl. comprenant 365 jours: par *H* les six mois d'hyver depuis le 1 Novembre 1794 jusqu'au 1 Mai 1795, comprenant un intervalle de 181 jours: enfin par *E* les six mois de l'été suivant, depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1795, comprenant un intervalle de 184 jours. Et je representerai les resultats de mes observations baromètrique, comme il suit.

1) La plus grande hauteur du Baromètre.

A . . . 28 . 92 le 17 Février. Thermomètre 166° vent fort du NOu, ciel couvert.

H . . . 29 . 23 le 22 Décembre 1794. Therm. 164° vent fort de l'Est, ciel couvert.

E . . . 28 . 79 le 1 Septembre. Therm. 133°, calme, ciel couvert.

2) La plus petite hauteur du Baromètre.

A . . . 27 . 07 le 5 Janvier. Therm. 149°, vent fort du SOu, ciel couvert neige.

H . . . 27 . 07 le 5 Janvier.

E . . . 27 . 29 le 25 May. Therm. 144°, vent du Sud, ciel couvert, pluie.

3) Variation totale. A . . 1, 85. H . . 2, 16. E . . 1, 50 parties centiemes d'un pouce.

4) Milieu arithmétique, A . . 27 . 99. H . . 28 . 15. E . . 28 . 04.

5) Hauteur moyenne, A . . 28, 125. H . . 28, 253. E . . 28, 121 . . Elle a donc été de 0, 132 moindre en été qu'en hyver, et de 0, 073 plus grande qu'à l'ordinaire.

6) La variation totale a été la plus grande en Janvier, et la plus petite en Juillet. La hauteur moyenne a été la plus grande en Avril, et la plus petite en Novembre. La différence en est = 0, 446, ou près que d'un demi pouce.

7) La hauteur du Baromètre a été au dessus de

28 . 80	en	A	315	jours	en	H . .	164	jours	en	E . .	166	jours
29 . 90	—	—	281	—	—	—	152	—	—	—	150	—
28 . 00	—	—	242	—	—	—	136	—	—	—	128	—
28 . 10	—	—	199	—	—	—	121	—	—	—	99	—
28 . 20	—	—	148	—	—	—	97	—	—	—	71	—

8) La hauteur du Baromètre a été

en A . . 182 $\frac{1}{2}$ jours au dessus de 28 . 132,

en H . . 90 $\frac{1}{2}$ jours au dessus de 28 . 250,

en E . . 92 jours au dessus de 28 . 124.

9) Les variations les plus subites et les plus considérables se trouvent dans les mois de Janvier, de Novembre et de Décembre : Les descentes les plus fortes sont de 1, 61 pouces ou de 19 $\frac{1}{3}$ lignes en 79 heures, le 10 Novembre, de 1, 26 pouces, ou de 15 $\frac{1}{10}$ lignes en 46 heures le 17 Décembre, de 1, 21 pouces ou de 14 $\frac{1}{2}$ lignes en 54 heures le 28 Décembre, de 1, 19 pouces ou de 14 $\frac{1}{3}$ lignes en 41 heures le 4 Janvier. Les montées du Baromètre n'ont pas été aussi considérables, celles qui méritent le plus d'être remarquées sont de 1, 04 pouces, ou de 12 $\frac{1}{2}$ lignes en 48 heures le 5 Janvier, de 0, 97 pouces ou de 11 $\frac{2}{3}$ lignes en 28 heures le 2 Novembre, de 0, 95 pouces ou de 11 $\frac{2}{3}$ lignes en 36 heures le 30 Décembre et de 0, 93 pouces ou de 11 $\frac{1}{10}$ lignes en 39 heures le 20 Décembre.

II. Thermomètre.

1) **Hauteurs extrèmes, leur différence, et l'état moyen du froid et de la chaleur pour chaque mois de l'année 1795.**

Mois.	Hauteurs extrèmes.				Différence.	Etat moyen.	
	Au plus bas.		Au plus haut.			Froid moyen.	Chaleur moyenne.
	Degré.	Jour et heure.	Degré.	Jour et heure.	Degré	Degré.	Degré.
Janvier	182	le 10 à 6 h. m.	148	le 4 et 5 apr. m.	34	169,1	163,8
Février	185	le 27 à 6 h. m.	145	le 11 apr. midi	40	167,3	159,8
Mars	194	le 14 à 6 h. m.	136	le 31 à 2 h. s.	48	164,8	153,1
Avril	164	le 13 à 6 h. m	119	le 24 à 2 h. s.	45	149,3	137,9
May	151	le 16 à 5 h. m.	117	le 20 à 2 h. s.	34	142,4	133,0
Juin	141	le 13 à 6 h. m.	107	le 8 à 3 h. s.	34	131,3	122,0
Juillet	133	le 20 à 5 h. m	111	le 28 à 2 h. s.	22	128,1	118,2
Août	140	le 31 à 10 h s.	117	le 3 à 2 h. s.	23	132,7	124,2
Septembre	148	le 29 à 6 h. m.	119	le 11 à 2 h. s.	29	137,5	129,6
Octobre	163	le 19 à 6 h. m.	132	le 8 à 2 h. s.	31	147,3	142,2
Novembre	161	le 10 à 7 h. m. le 14 à 7 h. m.	138	le 1 à 2 h. s. le 2 à 9 h. m.	23	152,9	147,6
Décembre	183	le 25 avant m.	148	le 5. 19. 29 et 30	35	165,2	158,7

2) Nombre des jours, auxquels le froid et la chaleur on surpassé quelques divisions principales du Thermomètre de Délisle, pour chaque mois de l'année 1795.

Mois.	Le froid a été plus grand que							La chaleur a été plus grande que						
	190 Jours	180 Jours	170 Jours	160 Jours	150 Jours	140 Jours.	130 Jours.	110 Jours.	120 Jours	130 Jours.	140 Jours.	150 Jours.	160 Jours	170 Jours.
Janvier		2	15	26	31	31	31					2	9	23
Février		1	12	22	28	28	28					4	15	25
Mars	2	3	10	19	28	31	31				2	13	24	28
Avril				3	11	29	30		1	2	21	27	30	30
May					2	23	31		2	7	28	31	31	31
Juin						1	19	2	10	26	30	30	30	30
Juillet							7		22	31	31	31	31	31
Août						1	25		4	29	31	31	31	31
Septbr.						13	27		2	15	29	30	30	30
Octbr.				2	13	24	31				13	27	31	31
Novbr.				2	19	29	30				3	20	30	30
Décbr.		1	14	20	28	31	31					8	15	27

Resumé.

1) Le plus grand froid, ou la plus petite hauteur du Thermomètre

en A . . . 194° ou d'après Réaumur 23½ degrés, le 14 Mars matin. Baromètre 27, 72, vent du NOu, ciel serein,

en H . . . 194° d'après Réaumur 23½ degrés, le 14 Mars matin.

en E . . . 163° d'après Réaumur 7 degrés, le 19 Octobre matin. Baromètre 28 . 44, vent fort du NOu, ciel serein.

2) La plus grande chaleur, ou la plus grande hauteur du Thermomètre

en A . . . 107°, d'après Réaumur 23 degrés, le 8 Juin après midi. Baromètre 28 . 40, vent de l'Ouest, ciel à demi serein, ensuite couvert, orage et pluie.

en H . . . 119°, d'après Réaumur 16 ½ degrés, le 24 Avril après midi. Baromètre 27 . 90, vent du Sud très fort, nuages, ensuite pluie à verse, grèle et tonnère.

en E . . . 107°, d'après Réaumur 23 degrés, le 8 Juin après midi.

3) La différence entre ces deux températures extrèmes:

en A . . 87 degrés de Délisle qui font 46½ dégres du Réaumur
en H . . 75 — — — — — 40 — — —
en E . . 56 — — — — — 30 — — —

Cette différence a été la plus grande au mois de Mars, et la plus petite au mois de Juillet.

4) Le froid moyen, ou la somme de toutes les hauteurs thermomètriques, observées à 6 heures du matin et à 10 heures du soir, divisée par leur nombre, a été le plus grand en Janvier et le plus petit en Juillet. Sa valeur est

en A . . 154°, 4 d'après Réaumur 2$^{d.}$ 3 de froid
en H . . 160°, 9 — — 5$^{d.}$ 8 de froid et
en E . . 136°, 2 — — 7$^{d.}$ 2 de chaleur.

5) La chaleur moyenne, ou la somme de toutes les hauteurs thermomètriques, observées à 2 heures après midi, divisée par leur nombre, a été la plus grande en Juillet, et la plus petite en Janvier. Sa valeur est

en A . . 140°, 8 d'après Réaumur $4^{d.}$ 9 de chaleur
en H . . 153°, 7 — — $2^{d.}$ 0 de froid et
en E . . 128°, 2 — — $11^{d.}$ 6 de chaleur.

6) Le froid a été

plus grand que								
190	en A . .	2	jours	en H . .	2	jours	en E . .	0 jours
— 180	en A . .	7	—	en H . .	7	—	en E . .	0 —
— 170	en A . .	51	—	en H . .	46	—	en E . .	0 —
— 160	en A . .	94	—	en H . .	93	—	en E . .	2 —
— 150	en A . .	160	—	en H . .	139	—	en E . .	15 —
— 140	en A . .	241	—	en H . .	179	—	en E . .	62 —
— 130	en A . .	321	—	en H . .	181	—	en E . .	140 —
— 120	en A . .	365	—	en H . .	181	—	en E . .	184 —

7) La chaleur a été

plus grande que								
110	en A	2	jours	en H	0	jours	en E	2 jours
— 120	en A	41	—	en H	1	—	en E	40 —
— 130	en A	110	—	en H	2	—	en E	108 —
— 140	en A	188	—	en H	25	—	en E	162 —
— 150	en A	254	—	en H	70	—	en E	180 —
— 160	en A	307	—	en H	122	—	en E	184 —
— 170	en A	347	—	en H	163	—		
— 180	en A	364	—	en H	180	—		
— 190	en A	365	—	en H	181	—		

8) Il a gélé continuellement en A pendant 58 jours, et en H pendant 59 jours. Il n'a gélé point du tout en A pen-

dant 124 jours, en H pendant 42 jours, et en E pendant 122 jours.

9) Il y a eu déjà en Avril des chaleurs plus grandes que 120 et 130°, le 24 et 26; et en Octobre des froids plus grands que 160°, le 18 et 19.

3) Enumération détaillée des froids en H, c'est-à-dire, pendant l'hyver de 1794 à 1795, ou depuis le 1 Novembre 1794 jusqu'au 1 May 1795, ce qui fait un intervalle de 181 jours.

Le froid surpassé 190° en 2 jours le 14 et 15 Mars.

Le froid a été entre

		Jours
180 et 190	Le 16 Déc., le 10. 26 Janv., le 27 Févr. et le 16 Mars.	5
170 et 180	Le 15. 17. 18. 24 — 26. 30. 31 Déc., le 1. 2. 8. 9. 12 — 14. 17 — 21. 24 Janv., le 2 — 7. 18. 19. 23. 26. 28 Févr., le 10 — 13. 17. 18. 22 Mars.	39
160 et 170	Le 20. 27. 28 Nov., le 12. 13. 14. 19 — 23. 27 — 29 Déc., le 3. 4. 6. 7. 11. 15. 16. 22. 23. 25. 27 Janv., le 1. 8. 14 — 17. 20. 21. 24. 25 Févr., le 3 — 6. 8. 9. 19. 20. 23 Mars et le 12. 13. 14 Avril	47
150 et 160 degrés	Le 1. 15 — 19. 21 — 26. 29. 30 Nov., le 6. 7. 8. 11 Déc., le 5. 28 — 31 Janv., le 9 — 13. 22 Févr., le 1. 2. 7. 21. 24 — 26. 29. 31 Mars et le 3. 9. 10. 11. 15. 16. 19. 20 Avril . .	46
	Somme des jours où il a gelé	139

L'intervalle entre la premier gelée du 1 Octobre 1794 et la dernière du 16 May est de 227 jours.

4) Enumération détaillée des chaleurs en E, c'est-à-dire pendant l'été de 1795 depuis le 1 May jusqu'au 1 Novembre, comprenant un intervalle de 184 jours.

La chaleur a été plus grande que 110 degrés en 2 jours le 8 et 21 Juin.

La chaleur a été entre

		Jours
120 et 110	Le 1. 20 May, le 4 — 7. 17 — 20 Juin, le 1. 2 4. 5. 6. 8 — 12. 15 — 17. 23 — 31 Juillet, le 1. 3. 28. 29 Août et le 11. 12 Sept. . . .	38
130 et 120	Le 2. 4. 19. 22. 23 May, le 2. 3. 9 — 12. 15. 16. 22 — 24. 26 — 30 Juin, le 3. 7. 13. 14 18 — 22 Juillet, le 2. 4 — 13. 15 — 27. 30 Août et le 2 — 10. 13. 24 — 26 Sept.	68
140 et 130	Le 3. 5 — 9. 11. 12. 13. 16 — 18. 21. 24 — 31 May, le 1. 13. 14. 25 Juin, le 14. 31 Août, le 1. 14 — 23. 27. 28. 30 Sept. et le 1 — 8. 24 — 27. 31 Octobre	54
150 et 140 degrés	Le 10. 14. 15 May, le 29 Sept. et le 9 — 16. 20. 21. 23. 28 — 30 Octobre.	18
	Somme des jours où il n'a point gelé	180

L'intervalle entre la dernière gelée du 16 May et le 11 Octobre où il a recommencé à géler est 148 jours.

III. Vent.

1) Tableau général de la force et de la direction des vents pour chaque mois de l'année 1795, et les trois intervalles désignés par A, H et E (pag. 574).

Mois.	Calme	Vent medi-ocre	Vent fort	Vent très-fort	Nord.	NE.	Est.	SE.	Sud.	SOu.	Ouest.	NOu.
	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janvier	7	14	10	0	7	5	2	1	2	4	2	8
Février	5	17	5	1	0	2	4	4	6	3	1	8
Mars	5	19	7	0	2	5	3	4	7	4	3	3
Avril	7	16	6	1	2	1	7	2	4	4	5	5
Mai	2	11	14	4	1	0	1	2	4	10	8	5
Juin	5	17	8	0	1	3	2	3	3	3	11	4
Juillet	7	16	8	0	1	5	9	3	1	4	7	1
Août	8	17	5	1	2	7	5	1	1	6	6	3
Septembre	7	14	7	2	2	5	2	0	3	3	13	2
Octobre	9	16	6	0	3	1	4	3	4	1	5	10
Novembre	3	12	9	6	2	1	1	2	4	14	3	3
Décembre	8	18	4	1	6	3	1	6	6	4	0	5
A	73	187	89	16	29	38	41	31	45	64	64	57
H	36	98	43	4	13	15	26	26	32	27	15	27
E	38	91	48	7	10	21	23	12	16	27	50	25

2) Rapport de la force des vents et des quatre plages tiré du Tableau, précédent, pour chaque mois de l'année 1795 et les trois intervalles désignés par A, H et E.

Mois.	Degré de force	Rapport des quatre plages			
		Nord	Est	Sud	Ouest
Janvier	242	13	5	5	8
Février	239	5	7	9	7
Mars	229	6	8	11	6
Avril	237	5	8	7	10
May	361	4	2	10	15
Juin	237	4	5	6	15
Juillet	229	4	13	4	10
Août	226	7	9	5	10
Septembre	263	5	5	4	16
Octobre	210	9	6	6	10
Novembre	366	4	2	12	12
Décembre	220	16	6	11	4
A	244	77	75	91	122
H	241	34	46	59	52
E	254	33	39	36	76

Les mois de Novembre et de May ont été les plus venteux, et ceux d'Octobre et de Décembre les plus calmes. L'été de 1795 a été plus venteux que l'hyver de 1794 à 1795.

Le vent dominant a été celui de l'Ouest, il a surtout regné en été, et specialement aux mois de Septembre, de Juin et de Mai. En hyver de 1794 à 1795, ce fut le vent du Sud qui a été le plus frequent.

3) Direction des vents forts.

Direction.	Jours et Mois.	Nombre des Jours.
Nord	Le 7 Janv., le 28 Mai, le 24 Juin et le 14 Oct.	4
NE	Le 13. 14. 30 Janv., le 17. 18 Févr., le 9. 10. 11. 12. 13 Mars, le 31 Mai, le 23 Juin, le 5. 6. 7 Juillet, le 17. 18 Sept., le 9 Oct. . . .	18
Est	Le 28 Févr., le 6 Juin, le 29 Juillet, le 23 Août, le 21 Octobre	5
SE	Le 31 Janv., le 1. 29 Mai, le 28 Juillet . .	4
Sud	Le 28. 29 Janv., le 1 Févr., le 16. 23 Mars, le 24 Avril, le 16 Mai, le 19 Juin, le 25. 26 Sept., le 18. 19. 26. 27 Nov. et le 28. 29 Déc. . .	16
SOu.	Le 5. 22. 23 Janv., le 9. 14 Févr., le 27. 28 Avril, le 5. 6. 8. 9. 16. 17. 24. 30 Mai, le 26. 28 Juin, le 16 Juillet, le 5 Août, le 14. 28 Sept., le 25 Oct., le 4. 5. 11. 16. 18. 20. 24. 28. 29 Novbr. et le 9. 19 Déc. . . .	33
Ouest	Le 13 Avril, le 7. 11. 18. 16 Mai, le 15 Juin, le 20 Juillet, le 2. 6. 26 Août, le 5. 8 Sept., le 3 Novembre	13
NOu.	Le 11. 15 Avril, le 15 Mai, le 10 Juin, le 22 Juillet, le 16 Août, le 13 Sept., le 15. 19 Oct., le 15. 17 Nov. et le 20 Déc. . . .	12
	Somme des jours venteux	105

Parmi ces jours de vent fort se trouvoient être les plus violans ceux du

28 Février, Est	1 jour
24 Avril, 26 Sept., 18 Nov., Sud . .	3 —
5. 6. 10 Mai, 16. 18. 24. 29 Nov. SOu.	7 —
7 Mai, 2 Août, 3 Nov., Ouest . . .	3 —
17 Novembre, 20 Déc., NOu.	2 —
Somme des jours des vent très forts	16 jours.

IV. Atmosphère.

Mois.	Ciel			Brouillard.	Pluie			Neige	
	serein.	nuages.	couvert.		forte.	petite.	quantité.	forte.	petite.
	jours.	jours.	jours.		jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janvier	4	11	16	4		1		1	14
Février	7	6	15	3		3		1	10
Mars	9	16	6	2		4		2	10
Avril	11	16	3	4	1	7	0 . 54		5
Mai	4	22	5		9	12	3 . 33		2
Juin	8	16	6		5	11	2 . 40		
Juillet	15	15	1		3	7	1 . 60		
Août	5	19	7	2	9	9	2 . 36		
Septembre	9	18	3	3	5	7	2 . 29		
Octobre	2	12	17	9	2	12	1 . 09		4
Novembre	2	11	17	2	2	11	0 . 71		12
Décembre	7	9	15	4		2		1	10
A	85	171	111	33	36	86	14.32	5	67
H	85	66	80	21	2	29		4	59
E	43	102	39	14	33	58	11.47		6

1) Les jours de ciel entièrement couvert ont encore surpassé considérablement ceux de ciel entièremens serein, excepté dans les mois d'été où le nombre des jours entièrement sereins a été de 4 plus grand que celui des jours de ciel couvert. Les mois de Juillet n'a eu qu'un seul jour, où le ciel a été totalement couvert, et les mois d'Octobre et de Novembre n'ont eu que 2 jours de ciel entièrement serein. Les brouillards ont été les plus fréquens en Octobre, et en Mai, Juin et Juillet, on n'en a observé aucun.

2) Le mois le plus pluvieux a été celui de Mai, la hauteur de l'eau de pluie tombé ayant été de $3\frac{1}{5}$ pouces. Pendant tout l'été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre cette hauteur a été trouvée d' $11\frac{47}{100}$ pouces. Au mois de Mars il est tombé plus de neige que dans les autres mois. Il a neigé pour la dernière fois le 14 Mai et il a recommencé à neiger le 16 Octobre, après un intervalle de 155 jours.

3) La rivière Neva après avoir été gelée sans interruption pendant 127 jours, elle debacla le 20 Avril à midi pendant une temperature de 133 degrés de Délisle qui répondent à 9 degrés de chaleur d'après Reaumur. Baromètre 28 . 28, vent médiocre de l'Ouest, ciel serein. Le 30 Avril elle commença à charier les glaces du Ladoga, mais en petite quantité et pendant peu de jours.

4) La rivière recommença à former et à charier des glaces le 17 Novembre, et on en vit tantôt plus tantôt moins jusqu'au 11 Décembre après-midi où la Neva fut entièrement prise après avoir été ouverte pendant 235 jours. Thermomètre de Délisle 162 d'après Reaumur $6\frac{1}{3}$ degrés de froid. Baromètre 28 . 00, vent du Nord, ciel serein.

5) Il tomba de la grèle en 5 jours, le 24 Avril, le 14 et 19 Juin, le 28 Septembre et le 16 Octobre.

6) Le nombre des orages ne monte qu'à six : le 8. 19 et 21 Juin, le 9 Juillet, le 1 et 7 Août. Il tonnoit de loin le 24 Avril, le 9 Juin et le 6 Août.

Il n'y a eu que deux aurores boréales d'observées le 11 Mars et le 3 d'Octobre.

La déclinaison de l'aiguille magnétique a été observée le 24 Mai de 8° 13′ vers l'Ouest. Elle avoit été observée en 1782 de 7° 30′ vers l'Ouest : ainsi elle va en augmentant.

EXTRAIT
DES
OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES
FAITES À MOSCOU EN MDCCXCV.
D'APRÈS NOUVEAU STILE.

PAR
Mr. *le Conseiller d'Etat et Chevalier* STRITTER.

Présenté à l'Académie le 24 Août 1797.

I. Baromètre.

1) Les hauteurs extrèmes, la variation totale, le milieu et la hauteur moyenne du Baromètre, pour chaque mois de l'année 1795.

Mois.	Au plus haut		Au plus bas		Variation	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour, heure.	P. cent.	jour, heure.	cent.	P. cent.	P. mill.
Janvier	27.58	le 15 après m.	26.42	le 6 —	116	27.00	27.135
Février	27.67	le 19 à 6 h m.	26.79	le 11 à 10 h. s.	88	27.23	27.170
Mars	27.71	le 31 après-m.	26.63	le 13 à 10 h. s.	108	27.17	27.290
Avril	27.71	le 1 avant-m.	27.08	le 19 à 6 h m.	63	27 40	27.370
Mai	27.58	le 19 —	26.79	le 23 après-m. jusqu'au 25 m.	79	27.18	27.190
Juin	27.50	le 5 et 7 matin	26.71	le 24.25.26 m.	79	27.10	72.110
Juillet	27.21	le 22 avant-m. le 24 à 2 h.s et le 25 avant-m.	26.71	le 13 à 6 h. m.	50	26.96	62.991
Août	27.50	le 31 à 6 h. s.	26.92	le 20 à 10 h. s. le 21-22 av m.	58	27.21	27.119
Septembre	27.63	le 30 après-m.	26.67	le 17 après-m.	96	27.15	27.340
Octobre	27.67	le 1 à 6 h. m.	26 79	le 14 avant-m.	88	27.23	27.238
Novembre	27.50	le 9. 10 et 11	26.46	le 14 à 6 h. m.	104	26.98	27.202
Décembre	27.75	le 8 après-m.	26.75	le 30 et 31	100	27.25	27.335

m. signifie *matin* ou *avant-midi*, et s. *soir* ou *après-midi*.

Conclusions.

1) La plus grande hauteur du Baromètre

En A *). 27 . 75, le 8 Décembre après-midi, Thermomètre 155 à 163°. Vent du Sud, ciel à demi serein.

H . . 28 . 04, le 16 Décembre 1794 à 2 h. s. Therm. 172° Vent du NE.

E . . 27 . 67, le 1 Octobre 1795 à 6 h. m. Therm. 152°, Calme, ciel en partie serein.

2) La plus petite hauteur du Baromètre

En A . . 26 . 42, le 6 Janvier, toute la journée, Therm. 156 à 153°. Vent fort du SOu. Ciel en partie couvert et un peu de neige.

H . . 26 . 42, le 6 Janvier 1795 etc.

E . . 26 . 67, le 17 Septembre 1795 après-midi, Therm. 146 à 147°. Vent de l'Ouest. Ciel couvert et beaucoup de neige.

3) La variation totale . . . en A . . . 133; en H . . . 162, et en E . . . 100 parties centiemes d'un pouce.

4) Le milieu arithmetique en A . . 27 . 08, en H . . 27 . 23, et en E . . 27 . 17.

5) La hauteur moyenne, en A . . 27 . 20, en H . . 27 . 30, et en E . . 27 . 16. Elle a donc été de 0 . 14 moindre en été qu'en hyver, tout comme à St. Pétersbourg.

---

*) A. marque l'intervalle de l'année entiere, depuis le 1 Janvier jusqu'au 31 Décembre inclusivement.

H. marque l'intervalle de l'hyver, depuis le 1 Novembre 1794 jusqu'au 1 Mai 1795, qui contient 181 jours.

E. marque l'intervalle de l'été suivant depuis le 1 Mai 1795 jusqu'au 1 Novembre, qui comprend 184 jours.

6) La variation a été la plus grande en Janvier et la plus petite en Juillet, mais toujours considérablement moindre qu'à St. Pétersbourg. La hauteur moyenne a été la plus grande en Avril, et la plus petite en Juillet.

7) Pour calculer par les hauteurs moyennes l'élévation de Moscou au-dessus de St. Pétersbourg faisons les positions suivantes:

I. en A . . Baromètre 28, 125 ou 337, 45 lignes
27, 200 ou 326, 40 —
Thermomètre, hauteur moyenne + 1, 3 Réaumur
+ 3, 8 —

II. en H . . Baromètre 28, 253 ou 339, 03 lignes
27, 300 ou 327, 60 —
Thermomètre, hauteur moyenne — 3, 9 Réaumur
+ 2, 1 —

III. en E . . Baromètre 28, 121 ou 337, 41 lignes
27, 160 ou 325, 90 —
Thermomètre, hauteur moyenne + 9, 4 Réaumur
+ 10, 6 —

Et nous obtiendrons par la méthode de Mr. Deluc, l'élévation de Moscou au-dessus de St. Pétersbourg,

par la première position = 123 Sagenes ou toises de Russie
par la seconde — = 125 — — — — —
par la troisième — = 133 — — — — —

Et si nous négligeons les corrections que donnent les degrés du Thermomètre, ces élévations respectives seroient de 132, 136, 138 sagenes.

II. Thermomètre.

1) Hauteurs extrèmes, leur différence, et l'état moyen du froid et de la chaleur pour chaque mois de l'année 1795.

Mois.	Hauteurs extrèmes.				Différence.	Etat moyen.	
	Au plus bas.		Au plus haut.			Froid moyen.	Chaleur moyenne.
	Degré.	Jour et heure.	Degré.	Jour et heure.	Degré	Degré.	Degré.
Janvier	195	le 21 à 6 h. m.	153	le 5 à 2 h. s.	42	171,8	165,3
Février	182	le 8 à 6 h. m.	142	le 12 à 2 h. s.	40	164,2	156,4
Mars	182	le 16 à 6 h. m.	137	le 30 et 31 à 2 h. s	45	157,5	147,9
Avril	161	le 15 à 6 h. m.	118	le 27 à 2 h. s.	43	147,2	133,6
Mai	148	le 10 au 11	106	le 3 à 2 h. s.	42	137,6	124,1
Juin	139	le 15 à 6 h. m.	103	le 9 et 22 à 2 h. s.	36	129,6	115,8
Juillet	134	le 21 à 6 h. m.	112	le 4 à 2 h. s.	22	127,7	118,2
Août	141	le 31 à 10 h. s.	106	le 5 à 2 h. s.	35	131,5	119,6
Septembre	151	le 30 à 6 h. m.	114	le 7 et 8 à 2 h. s.	37	140,5	128,8
Octobre	161	le 20 à 6 h. m.	131	le 3 et 8 à 2 h. s.	30	148,9	141,5
Novembre	164	le 18 à 6 h. m.	134	le 2 à 2 h. s.	30	150,4	145,7
Décembre	182	le 26 à 6 h. m.	142	le 21 à 2 h. s.	40	165,1	159,1

2) Nombre des jours, auxquels le froid et la chaleur on surpassé quelques divisions principales du Thermomètre de Délisle, pour chaque mois de l'année 1795.

Mois.	Le froid a été plus grand que							La chaleur a été plus grande que						
	190 Jours	180 Jours.	170 Jours.	160 Jours.	150 Jours.	140 Jours.	130 Jours.	110 Jours.	120 Jours.	130 Jours.	140 Jours.	150 Jours.	160 Jours	170 Jours.
Janvier	1	9	16	20	31	31	31						10	21
Février		1	7	21	25	28	28					6	21	27
Mars		1	3	11	26	31	31				2	21	29	30
Avril				1	15	24	30		2	12	21	27	30	30
Mai						10	28	1	9	24	30	31	31	31
Juin							18	9	19	28	30	30	30	30
Juillet							6		17	31	31	31	31	31
Août						1	23	3	13	30	31	31	31	31
Septbr.					2	18	30		6	13	28	30	30	30
Octbr.				1	16	28	31				15	26	31	31
Novbr.				1	15	30	30				4	24	30	30
Décbr.		2	12	21	29	31	31					5	17	26

Resumé.

1) Le plus grand froid, ou la plus petite hauteur du Thermomètre

en A . . . 195° le 21 Janvier à 6 h. matin. Baromètre 27′, 25, vent du Nord, ciel serein.

en H . . . 195° le 21 Janvier 1795 etc.

en E . . . 161° le 20 Octobre à 6 h. matin. Baromètre 28 . 42, vent du NOu, nuages.

2) La plus grande chaleur, ou la plus grande hauteur du Thermomètre

en A . . . 103°, le 9 Juin à 2 h. après-midi. Baromètre 27 . 33, vent fort du SE, ciel en partie serein, et le 22 Juin à 2 h. après-midi. Baromètre 26 . 92, vent fort de l'Est, ciel en partie serein.

en H . . . 118°, le 27 Avril 1795 à 2 h. après-midi. Baromètre 27 . 25, vent fort du NOu, nuages.

en E . . . 103°, le 9 Juin etc.

3) La différence entre ces deux températures extrèmes:

en A . . 92 degrés de Délisle qui font 49 dégres du Réaumur
en H . . 77 — — — — — 41 — — —
en E . . 58 — — — — — 31 — — —

Cette différence a été la plus grande au mois de Mars, et la plus petite au mois de Juillet, tout comme à St. Pétersbourg.

4) Le froid moyen, ou la somme de toutes les hauteurs thermomètriques, observées à 6 heures du matin et à 10 heures du soir, divisée par leur nombre, a été le plus grand en Janvier et le plus petit en Juillet. Sa valeur à été

en A . . 147°, 6 d'après Réaumur 1$^{d.}$ 3 de chaleur
en H . . 159°, 5 — — 5$^{d.}$ 0 de froid
en E . . 135°, 9 — — 7$^{d.}$ 6 de chaleur.

5) La chaleur moyenne, ou la somme de toutes les hauteurs thermomètriques, observées à 2 heures après-midi, divisée par leur nombre, a été la plus grande en Juin et la plus petite en Janvier. Sa valeur a été

en A . .	137°, 9	d'après Réaumur	6d. 4	de chaleur
en H . .	151°, 7	— —	0d. 8	de froid
en E . .	124°, 6	— —	13d. 6	de chaleur.

6) Le froid a été plus grand

que 190	en A . .	1 jours	en H . .	1 jours	en E . .	0 jours
— 180	en A . .	13 —	en H . .	18 —	en E . .	0 —
— 170	en A . .	38 —	en H . .	46 —	en E . .	0 —
— 160	en A . .	82 —	en H . .	81 —	en E . .	1 —
— 150	en A . .	159 —	en H . .	136 —	en E . .	18 —
— 140	en A . .	232 —	en H . .	173 —	en E . .	57 —
— 130	en A . .	317 —	en H . .	181 —	en E . .	136 —
— 120	en A . .	365 —	en H . .	181 —	en E . .	184 —

7) La chaleur a été plus grande

que 110	en A	13 jours	en H	0 jours	en E	13 jours
— 120	en A	66 —	en H	2 —	en E	64 —
— 130	en A	138 —	en H	12 —	en E	126 —
— 140	en A	192 —	en H	27 —	en E	165 —
— 150	en A	262 —	en H	87 —	en E	179 —
— 160	en A	321 —	en H	131 —	en E	184 —
— 170	en A	348 —	en H	159 —	en E	184 —
— 180	en A	364 —	en H	181 —	en E	184 —

8) Il a gélé continuellement en A pendant 44 jours, et en H pendant 50 jours. Il n'a gélé point du tout en A pendant 133 jours, en H pendant 8 jours, et en E pendant 127 jours.

9) Il y a eu déjà en Avril des chaleurs plus grandes que 130°, savoir le 18, 20 — 30, et mêmes des chaleurs plus grandes que 120°, savoir le 27 et le 30. Mais en Septembre et en Octobre il a déjà gélé en 18 jours, et le froid a même surpassé 160°, le 20 Octobre.

10) En H il a gélé pour la première fois le 17 Octobre 1794 et pour la dernière fois le 17 Avril 1795, ce qui fait un intervalle de 182 jours d'hyver.

11) En E, il a gélé pour la dernière fois le 17 Avril, et il a recommencé à géler le 17 Septembre après un intervalle de 153 jours d'été.

III. Vent.

Mois.	Calme.	Vent médiocre	Vent fort	Vent très-fort	Degré de force	Rapport des quatre plages			
						Nord	Est	Sud	Ouest
	jours.	jours.	jours.	jours.	*	jours.	jours.	jours.	jours.
Janvier	3	10	16	2	306	8	5	10	8
Février	2	11	14	1	314	9	4	5	10
Mars	2	14	15	0	290	7	6	10	8
Avril	2	7	20	1	346	12	3	7	8
Mai	0	1	16	14	574	9	2	9	11
Juin	0	2	14	14	573	10	4	6	10
Juillet	0	8	16	7	439	11	5	3	12
Août	1	0	24	6	468	19	3	3	6
Septembre	1	3	21	5	436	10	4	8	8
Octobre	4	5	21	1	342	13	2	6	10
Novembre	0	7	15	8	460	6	1	12	11
Décembre	0	11	12	8	432	8	3	9	11
A	15	79	204	67	418	122	42	88	113
H	16	73	88	4	302	53	34	50	44
E	6	19	112	47	472	72	20	35	57

Les mois de Mai et de Juin ont été les plus venteux, et ceux de Mars et de Janvier les plus calme. L'hyver de 1795 a été considérablement plus calme que l'été de 1795.

Le vent dominant a été celui du Nord pour toute l'année; il a surtout le plus fréquent en été 1795, et spécialement au mois d'Août.

IV. Atmosphère.

Mois.	Ciel			Brouillard.	Pluie		Neige	
	serein.	nuages.	couvert.		forte.	médiocre.	copieuse.	petite.
	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janvier	2	5	24	0	0	0	4	17
Février	0	4	24	0	0	3	3	17
Mars	2	7	22	8	0	5	3	10
Avril	5	11	14	0	1	3	0	4
Mai	3	7	21	0	6	9	0	2
Juin	4	12	14	0	4	6	0	0
Juillet	0	8	23	3	5	14	0	0
Août	2	9	20	1	6	11	0	0
Septembre	5	9	16	1	2	6	1	0
Octobre	2	6	23	4	4	7	1	4
Novembre	0	8	22	2	1	9	0	5
Décembre	2	6	23	0	0	4	4	12
A	27	92	246	19	29	77	16	71
H	12	35	134	15	1	19	12	69
E	16	51	117	9	27	53	2	6

1) Les jours de ciel entièrement couvert ont considérablement surpassé en nombre ceux où le ciel a été serein où en

partie serein. Aux mois de Février, de Juillet et de Novembre, il n'y a pas eu un seul jour de ciel entièrement serein. Les brouillards ont été le plus fréquent en Mars.

2) Les mois les plus pluvieux ont été ceux de Juillet, d'Août et de Mai. Aux mois de Janvier et de Février il est tombé plus de neige que dans les autres mois.

Il neiga pour la premier fois en hyver le 20 Octobre 1794, et pour la dernière fois le 12 Mai 1795, ce qui fait un intervalle de 204 jours.

En été il neiga pour la dernière fois le 12 Mai 1795, et il récommença à neiger le 17 Septembre après un intervalle de 128 jours.

2. Grêle, le 15 et 27 Mai.
3. Parhélies, le 2 et 16 Janvier et le 25 Décembre.
3. Parasélene, le 25 et 26 Juillet, le 3 Août.
11. Orages, le 25 Avril, le 2. 3. 29 Mai, le 13. 23. 27 Juin, le 12. 20 Juillet, le 3. 26 Août.

EXTRAIT
DES
OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES
FAITES À ST. PÉTERSBOURG EN MDCCXCVI.
D'APRÈS LE NOUVEAU STILE.

PAR
J. A. EULER.

Présenté à l'Académie le 27 Janv. 1797.

I. Baromètre.

1) Les hauteurs extrêmes, la variation, le milieu et la hauteur moyenne pour chaque mois de l'année 1796.

Mois.	Au plus haut		Au plus bas		Variation	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour, heure.	P. cent.	jour, heure.	cent.	P. cent.	P. cent.
Janvier	28.57	le 17 à minuit	27.30	le 19 à 9 h. s.	127	27.93	27.897
Février	28.81	le 27 à midi	27.51	le 19 à 9 h. m.	130	28.16	28.268
Mars	28.99	le 11 à midi	27.30	le 21 à 8 h. m.	169	28.15	28.247
Avril	28.67	le 5 à midi	27.67	le 16 à minuit	100	28.17	28.234
Mai	28.61	le 19 et le 20	27.64	le 7 à 6 h. s.	97	28.12	28.086
Juin	28.41	le 30 à 10 h. m.	27.77	le 8 à 10 h. m.	64	28.09	28.124
Juillet	28.22	le 20 à 3 h. m.	27.73	le 25 à 3 h. m.	49	27.98	28.050
Août	28.48	le 31 à minuit	27.91	le 8 à 3 h. m.	57	28.19	28.249
Septembre	28.52	le 1 à 10 h. m.	27.31	le 9 à 5 h. m.	121	27.92	28.001
Octobre	28.54	le 19 à 9 h. s.	27 41	le 3 à 7 h. m.	113	27.97	28.045
Novembre	28.97	le 22 à 9 h. m.	27.15	le 28 à 2 h. s.	182	28.06	28.134
Décembre	28.93	le 29 à 10 h. s.	27.29	le 1 à 2 h. m.	164	28.11	27.982

h. m. signifie *heure* du *matin*, ou *avant-midi*,
h. s. — *heure* du *soir*, ou *après-midi*.

2) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a surpassé quelques divisions principales de l'échelle, avec la hauteur qui répond à la moitié de chaque mois.

Mois.	Au dessus de 27. 80	27. 90	28. 00	28. 10	28. 20	un demi-mois au dessus de
	jours h.	jours h.	jours h.	jours h.	jours h.	Pouces. milliem.
Janvier	18. 15	14. 19	10. 9	7. 0	5. 11	27. 916
Février	26. 8	25. 15	25. 4	23. 16	19. 3	28. 259
Mars	24. 15	23. 6	20. 4	17. 6	16. 1	28. 246
Avril	27. 15	26. 18	22. 14	19. 4	17. 17	28. 285
Mai	27. 15	24. 18	18. 19	13. 1	8. 13	28. 060
Juin	29. 12	28. 22	23. 20	18. 17	8. 8	28. 151
Juillet	29. 22	26. 16	22. 22	11. 8	1. 5	28. 075
Août	31. 0	31. 0	30. 3	28. 3	23. 16	28. 294
Septembre	23. 18	21. 3	15. 22	8. 22	7. 7	28. 012
Octobre	22. 22	19. 11	16. 22	13. 9	10. 20	28. 046
Novembre	23. 20	22. 19	19. 13	15. 16	11. 3	28. 109
Décembre	20. 1	15. 9	11. 14	8. 3	7. 1	27. 878

3) Variations considérables et subites.

Mois.	Temps. jours.	heure.	Diff. heure.	Barom. P. cent.	Variat. centie.	Therm. degrés.	Vents.	Atmosphère.
Janv.	1	6 m.	12	28.19	— 43	156	SOu.	nuages
	1	6 s.		27.76		149	SOu. ff.	neige et ciel couvert
	6	8 m.	24	27.99	— 61	161	SE	Brouillard, c. couvert
	7	8 m.	20	27.38	+ 64	148	SE	ciel couvert, neige
	8	4 m.		28.02		170	E	c. couvert, brouillard
	15	12 m.	15	27.88	— 47	159	NOu.	c. serein, ens. couv. et neige
	16	3 m.		27.41		164	E	c. couvert ensuite serein
	16	3 m.	45	27.41	+116	164	E	c. couvert ensuite serein
	17	12 s.	44	28.57	—127	183	NOu. fort	c. serein, ens. couv. et neige
	19	8 s.	19	27.30	+ 68	149	SOu. fort	beauc. de neige, c. couvert
	20	3 s.	17	27.98	— 37	169	Calme	c. serein
	21	8 m.	11	27.61	+ 32	162	NE	ciel couvert, neige
	21	7 s.	14	27.93	— 32	164	NE	ciel couvert
	22	9 m.		27 61		162	Calme	brouillard, c. couvert, neige
Févr.	22	3 s.	21	27.62	+ 77	154	SOu.	c. couvert, neige
	23	12 m.	20	28.39	— 76	187	Calme	c. serein, ensuite nuages
	24	8 m.		27.63		147	Ou. fort	c.couvert, pluie, ens. nuages
Mars	19	2 m.	28	28.36	— 57	151	Calme	nuages
	20	6 m.		27.79		151	N	neige, ensuite c. serein
	20	3 s.	17	27.88	— 58	151	N	ciel serein, nuages
	21	8 m.		27.30		160	N ff.	c. couvert, neige
Sept.	10	9 m.	38	27.50	+ 51	137	NE. ff.	ciel couvert, pluie
	11	11 s.		28.01		144	NE	nuages
	25	9 m.	42	28.51	— 64	143	NOu.	c. couvert, pluie
	27	3 m.		27.87		148	Ou.	c. serein
	28	3 m.	37	28.23	— 67	150	NOu. ff.	c. couvert, ensuite pluie
	29	4 s.		27.56		140	SOu. fort	pluie, ensuite nuages
Oct.	3	9 m.	30	27.41	+ 74	148	Calme	neige et pluie, c. couvert
	4	3 s.		28.15		143	Ou.	c. couvert
	23	4 m.	31	28.37	— 59	151	S.	nuages, brouillard, pluie
	24	9 m.		27.78		140	Ou. fort	c. couvert, brouillard, pluie

Mois.	Temps jours	Temps heure.	Diff. heure.	Barom. P. cent.	Variat. cent.	Therm. degrés.	Vents.	Atmosphère.
Nov.	30	3 s.	66	28.38	— 109	143	NOu.	pluie et ciel couvert
	2	9 m.	53	27.29	+ 104	147	Calme	brouil., c. couv. pluie et neige
	4	2 s.	40	28.33	— 55	152	N	c. couvert, ensuite serein
	6	6 m.		27.78		143	S	pluie, c. couvert brouillard
	24	6 s.	48	28.87		166	S	c. couvert
	26	6 s.		27.88	— 99	154	NOu. fort	ciel serein
	27	6 m.	18	27.95	— 77	156	Ou. fort	c. couvert, ensuite neige
	27	12 s		27.18		151	Ou. ff.	neige, c. couvert
Déc.	7	12 m.	68	27.46	+ 96	156	S. calme	neige, c. couvert, brouillard
	10	8 m.	38	28.42	— 70	162	SOu.	c. couvert, neige
	11	10 s.		27.72		164	SOu. fort	neige, c. couvert
	18	12 m.	24	28.07	— 67	174	NOu. fort	nuages, c. couvert, neige
	19	12 m.	33	27.40	+ 50	164	SOu. fort	c. couvert
	20	9 s.		27 90		169	SOu.	c. serein
	26	12 s.	48	27.96	+ 87	165	NOu. ff.	c. couvert, neige
	28	12 s.		28.83		167	Calme	brouillard

ff designe un vent très-fort. Le signe — marque les descentes, et le signe + les montées.

Résumé des observations Barométriques.

1) La plus grande hauteur du Baromètre a été

A. Pour toute l'année depuis le 1 Janvier jusqu'au 31 Décembre 1796 28 . 99, le 11 Mars à 12 h. midi. Thermomètre 158. Vent du Nord, ciel serein.

H. Pour les six mois d'hyver, depuis le 1 Novemb. 1795 jusqu'au 1 Mai 1796, 28 . 99, le 11 Mars etc.

E. Pour les six mois de l'été suivant depuis le 1 Mai, jusqu'au 1 Novembre 1796, 28 . 61, le 19 jusqu'au 20 Mai, Therm. 139 — 136. Vent NE — E. Ciel serein.

2) La plus petite hauteur du Baromètre

A. 27 . 15 le 28 Novembre à 2 h. après-midi. Therm. 154. Vent SOu, ciel couvert et neige.

H. 27 . 11 le 13 Novembre 1795 à 7 h. après-midi. Therm. 156. Vent Est, ciel couvert.

E. 27 . 31 le 9 Septembre à 5 h. matin. Therm. 136. Vent NE, ciel couvert et beaucoup de pluie.

3) La variation totale a été: en A = 184, en H = 188 et en E = 130 centiemes parties de pouce.

4) Le milieu arithmetique: en A = 28 . 07, en H = 28 . 05 et en E = 27 . 96.

5) La hauteur moyenne, ou la somme de toutes les hauteurs barométriques divisée par leur nombre; en A = 28 . 107, en H = 28 . 107 et en E = 28 . 093. Cette hauteur moyenne a été la plus grande en Février et la plus petite en Janvier. La variation totale a été la plus grande en Novembre et la plus petite en Juillet.

6) La hauteur du Baromètre a été au dessus de

27.80	en A 305 jours 6 h.	en H 140 jours 18 h.	en E 164 j. 17 h.
27.90	en A 280 jours 2 h.	en H 127 jours 1 h.	en E 151 j. 22 h.
28.00	en A 237 jours 4 h.	en H 109 jours 11 h.	en E 128 j. 12 h.
28.10	en A 184 jours 9 h.	en H 93 jours 5 h.	en E 93 j. 12 h.
28.20	en A 136 jours 9 h.	en H 78 jours 18 h.	en E 59 j. 21 h.

7) La hauteur du Baromètre a été

en A . . 183 jours au dessus de 28 . 102,
en H . . 91 jours au dessus de 28 . 140, et
en E . . 92 jours au dessus de 28 . 141.

7) Les variations considérables et subites ont été les plus fréquentes en Janvier et ensuite en Décembre. Les dé-

centes les plus considerables ont été observées de 127 centiemes de pouce, ou de 15 $\frac{1}{3}$ lignes en 44 heures le 17 Janvier, ensuite de 109 centiemes, ou de 13 $\frac{1}{10}$ lignes en 66 heures de tems le 30 Octobre et de 99 centiemes, ou de 11 $\frac{9}{10}$ lignes en 48 heures le 24 Novembre. Les montées les plus considerables ont été de 116 centiemes, ou de 13 $\frac{9}{10}$ lignes en 45 heures le 16 Janvier, ensuite de 104 centiemes ou de 12 $\frac{1}{2}$ lignes en 55 heures le 2 Novembre et de 97 centiemes, ou de 11 $\frac{3}{5}$ lignes en 48 heures, le 26 Décembre.

II. Thermomètre.

1) Hauteurs extrèmes, leur différence, et l'état moyen du froid et de la chaleur pour chaque mois de l'année 1796.

Mois.	Hauteurs extrèmes.				Différence.	Etat moyen.	
	Au plus bas.		Au plus haut.			Froid moyen.	Chaleur moyenne.
	Degré.	Jour et heure.	Degré.	Jour et heure.	Degré	Degré.	Degré.
Janvier	183	le 17 à 10 h. s.	144	le 26 et le 27	39	160.7	154.3
Février	184	le 13 à 7 h. m.	150	le 17 à 2 h. s.	34	164.5	157.8
Mars	183	le 4 à 6 h. m.	143	le 18 à 2 h. s.	40	165.5	154.0
Avril	163	le 14 à 6 h. m	126	le 27 à 2 h. s.	37	153.0	141.4
Mai	154	le 2 à 6 h. m.	115	le 22 à 2 h. s.	39	141.1	131.2
Juin	136	le 20 à 11 h. s.	108	le 4 à 2 h. s.	28	129.2	118.7
Juillet	129	le 30 à 5 h. m.	110	le 5 à 2 h. s. / le 20 à 12 h. m.	19	125.0	117.0
Août	135	le 31 à 6 h. m.	111	le 4 à 2 h. s.	24	129.1	119.7
Septembre	151	le 30 à 6 h. m. / à 10 h. s.	121	le 6 à 2 h. s.	30	140.9	133.1
Octobre	155	le 2 à 6 h m.	128	le 8 à 2 h. s.	27	145.6	140.2
Novembre	170	le 25 à 7 h. m.	149	le 12. 13. 19 à 2 h. s.	21	155.7	151.1
Décembre	181	le 18 à 7 h. m. / le 27 à 7 h. s.	148	le 4 à 7 h. m.	33	168.8	162.5

2) Nombre des jours, auxquels le froid et la chaleur ont surpassé quelques divisions principales du Thermomètre de Délisle.

Mois.	Le froid a été plus grand que						La chaleur a été plus grande que						
	180 Jours.	170 Jours.	160 Jours	150 Jours.	140 Jours.	130 Jours.	110 Jours.	120 Jours.	130 Jours.	140 Jours.	150 Jours.	160 Jours	170 Jours.
Janvier	2	8	17	22	31	31					16	22	29
Février	3	11	19	24	29	29					6	16	26
Mars	2	10	23	30	31	31					10	25	30
Avril			6	20	30	30			4	8	29	30	30
Mai				2	15	30		2	12	29	31	31	31
Juin						14	2	17	30	30	30	30	30
Juillet						0		24	31	31	31	31	31
Août						12		17	31	31	31	31	31
Septbr.				4	15	30			9	26	30	30	30
Octbr.				3	25	31			1	14	31	31	31
Novbr.		1	6	28	30	30					14	28	30
Décbr.	2	12	28	31	31	31					1	10	29

3) Enumeration detaillée des froids, observés pendant l'hyver de 1795 à 1796, ou depuis le 1 Novembre 1795, jusqu'au 1 Mai 1796, ce qui fait un intervalle de 182 jours.

Le froid a surpassé 180 degrés de Délisle en 8 jours, le 25 Décembre 1795, le 17. 23 Janvier, le 12. 13. 24 Février et le 3. 4 Mars.

La froid a été entre

		Jours
170 et 180	Le 12 — 18. 21 — 24. 26. 28 Décembre, le 8 — 10. 16. 18. 20 Janv., le 10. 11. 21 — 23. 25. 27. 29 Févr. et le 1. 2. 5. 6. 22 — 25 Mars . . .	35
160 et 170	Le 10. 14 Nov., le 3. 10. 11. 27. 30. 31. Décemb., le 4. 5. 6. 7. 11. 12. 15. 21. 22 Janv., le 7. 9. 14 — 16. 20. 26. 28 Févr., le 8 — 16. 21. 26. 27. 29 Mars et le 3. 5. 6. 14. 15. 20 Avril . .	44
150 et 160	Le 5 — 9. 11. 13. 15. 16 — 19. 22. 23. 25. 29. 30 Nov., le 1. 2. 4. 8. 9. 19. 20. 29 Déc., le 1. 3. 13. 19. 31 Janv., le 6. 8. 17. 19 Févr., le 7. 17. 19. 20. 28. 30. 31 Mars et le 1. 2. 4. 7. 9 — 13. 16. 18. 19. 21. 22 Avril	56
		143

4) Enumeration détaillée des chaleurs observées pendant l'été de 1796, c'est-à-dire depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1796, ce qui fait un intervalle de 184 jours.

La chaleur a surpassé 110 degrés de Délisle en 2 jours le 4 et 5 Juin.

La chaleur a été entre

		Jours
120 et 110	Le 20. 31 Mai, le 1. 2. 3. 6. 7. 9. 10. 15 — 17. 22. 25. 26. 28. 29 Juin, le 1 — 8. 10. 15 — 24. 27 — 29. 30. 31 Juillet et le 1 — 5. 9 — 16. 20. 25. 26. 27 Août	58
130 et 120	Le 13. 14. 15. 20. 21. 23. 26 — 28. 30 Mai, le 8. 11 — 14. 18 — 21. 23. 24. 27. 30 Juin, le 9. 11 — 14. 25. 26 Juillet, le 6 — 8. 17 — 19. 21 — 24. 28 — 31 Août, le 1 — 8. 21 Sept. et le 8 Oct.	54

		Jours
160 et 170	Le 1. 4 — 12. 16 — 19. 24. 25. 29 Mai, le 9 — 20. 22. 23. 25. 26. 29 Sept. et le 5 — 7. 9 — 12. 14. 15. 22 — 24. 29 Octobre	47
150 et 160	Le 2. 3 Mai, le 24. 27. 28. 30 Sept. et le 1 — 4. 13. 16 — 21. 25 — 28. 30. 31 Octobre . .	23
		184

Résumé des observations sur le froid et chaleur.

1) Le plus grand froid a été

en A . 184°, d'après Réaumur 18∂, 1, le 13 Février à 7 h. du matin, Baromètre 28 . 22, Vent du SE, brouillard, ensuite ciel à demi couvert.

en H . 184°, le 13 Février etc.

en E . 155°, d'après Réaumur 20∂, 7, le 2 Octobre à 6 h. du matin, Baromètre 27 . 73, Vent du NE, ciel serein.

2) La plus grande chaleur

en A . 108°, d'après Réaumur 22∂, 4, le 4 Juin à 2 heures après-midi, Baromètre 28 . 24, calme, ciel serein.

en H . 126°, d'après Réaumur 12∂, 8, le 27 Avril à 2 heures après-midi, Baromètre 28 . 41, calme, ciel serein.

en E . 108°, le 4 Juin etc.

3) Le froid moyen, c'est-à-dire la somme de toutes les observations thermomètriques annotées le matin et le soir divisée par leur nombre

en A . 148°, 2 d'après Réaumur 0∂, 9 de chaleur
en H . 160°, 3 — — 5∂, 5 de froid et
en E . 135°, 1 — — 8∂, 0 de chaleur.

4) La chaleur moyenne, c'est-à-dire, la somme de toutes les observations thermomètriques annotées à 2 heures après-midi, divisée par leur nombre

en A . 140°, 0 d'après Réaumur 5∂, 3 de chaleur
en H . 152°, 3 — — 1∂, 3 de froid et
en E . 126°, 6 — — 12∂, 5 de chaleur.

5) Le mois le plus froid a été celui de Décembre, et le mois plus chaud, celui de Juillet.

6) Le froid a été en A . . 9 jours entre 180 et 190
33 — — 170 et 180
57 — — 160 et 170
65 — — 150 et 160
73 — — 140 et 150
62 — — 130 et 140
65 — — 120 et 130 et
2 — — 110 et 120

en H . . 8 jours entre 180 et 190
35 — — 170 et 180
44 — — 160 et 170
56 — — 150 et 160
38 — — 140 et 150 et
1 — — 130 et 140

en E . . 9 jours entre 150 et 160
46 — — 140 et 150
62 — — 130 et 140
65 — — 120 et 130 et
2 — — 110 et 120

7) La chaleur a été en A . . 2 jours entre 110 et 100
58 — — 120 et 110
58 — — 130 et 120
51 — — 140 et 130
91 — — 150 et 140
55 — — 160 et 150
43 — — 170 et 160 et
8 — — 180 et 170

en H . . 4 jours entre 130 et 120
7 — — 140 et 130
78 — — 150 et 140
49 — — 160 et 150
34 — — 170 et 160 et
10 — — 180 et 170

en E . . 2 jours entre 110 et 100
58 — — 120 et 110
54 — — 130 et 120
47 — — 140 et 130
23 — — 150 et 140

8) Il a gélé en A . . 164 jours, en H . . 143 jours et en E . . 9 jours. Il a gélé continuellement

en A . . 106 jours, en H . . 93 jours et en E . . 0 jour. Il n'a gélé point du tout

en A . . 202 jours, en H . . 39 jours et en E . . 175 jours.

9) La première gélée en H a été observée le 11 Octobre 1795, et il a gélé pour la dernière fois le 2 Mai 1796, ce qui donne l'intervalle d'hyver de 205 jours.

10) La dernière gélée en E a été le 3 Mai, et il a recommencé a géler le 25 Septembre, ce qui donne pour l'intervalle de l'été 145 jours.

Où A marque comme ci-dessus l'année entière, ou l'intervalle du 1 Janvier 1796 jusqu'au 1 Janvier 1797. De même H marque l'hyver de 1795 à 1796, ou l'intervalle du temps depuis le 1 Novembre 1795 jusqu'au 1 Mai 1796. Enfin E marque l'été de 1796, ou bien l'intervalle depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1796. A comprend donc tous les 366 de l'année bissextile 1796, H comprend 182 et 184 jours.

III. Vent.

1) Tableau général de la force et de la direction des vents pour chaque mois de l'année 1796.

Mois.	Calme	Vent doux	Vent fort	Vent très-fort	Nord.	NE.	Est.	SE.	Sud.	SOu.	Ouest.	NOu.
	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janvier	6	12	10	3	2	1	2	4	4	11	4	3
Février	8	15	5	1	5	3	2	8	7	2	2	0
Mars	9	14	7	1	8	1	0	4	3	3	2	10
Avril	16	11	3	0	8	5	3	0	1	1	4	8
Mai	3	13	11	4	1	9	3	2	5	2	6	3
Juin	4	13	9	4	0	0	3	5	1	5	8	8
Juillet	11	10	10	0	0	1	2	6	2	7	8	5
Août	14	14	3	0	0	3	5	4	5	2	9	2
Septembre	5	17	5	3	3	4	4	4	2	3	6	4
Octobre	3	21	7	0	3	1	0	3	9	4	5	6
Novembre	8	13	8	1	2	0	4	4	11	4	3	2
Décembre	7	16	6	2	5	0	1	3	10	6	0	6
A	94	169	84	19	37	28	29	47	61	50	57	57
H	50	82	38	12	31	14	9	24	25	35	15	29
E	40	88	45	11	7	18	17	24	25	23	42	28

2) Rapport de la force des vents et des quatres plages ; tiré du tableau précédent, pour chaque mois de l'année 1796.

Mois.	Degré de force	Rapport des quatre plages			
		Nord	Est	Sud	Ouest
	*	jours	jours	jours	jours
Janvier	303	4	4	12	11
Février	228	6	8	12	3
Mars	238	14	2	7	8
Avril	166	14	6	1	9
Mai	339	7	9	7	8
Juin	327	4	5	6	15
Juillet	229	3	5	9	14
Août	174	3	8	9	11
Septembre	277	7	8	6	9
Octobre	235	7	2	12	10
Novembre	247	3	6	15	6
Décembre	255	8	3	14	6
A	251	80	66	110	110
H	254	53	28	54	47
E	265	30	38	49	67

Le mois de Mai se trouve être le plus venteux, après lui suivent les mois de Juin et de Janvier. Ceux d'Avril et d'Août ont été les plus calmes. La force des vents a été en été plus grand qu'en hyver.

Les vents du Sud et de l'Ouest ont été les plus fréquens ; le premier a dominé le plus en hyver, et celui de l'Ouest le plus en été.

Le vent du Nord a été le plus fréquens, aux mois d'Avril et de Mai, celui de l'Est en Mai, celui du Sud en Novembre et celui de l'Ouest en Juin.

3) Direction des vents forts.

Direction.	Jours et Mois.	Nombre des Jours.
Nord	Le 21. 22. 31 Mars, le 21 Avril, le 27. 30 Sept.	6
NE	Le 9. 11 Févr., le 18. 19 Avril, le 1. 2. 3. 4. 19. 24 Mai, le 12 Juillet, le 30 Août, le 10. 11 Sept.	14
Est	Le 10 Févr., le 17 Août, le 20. 30 Novembre .	4
SE	Le 1. 6 Juin, le 21 Nov., le 6 Mars et le 6 Décembre	5
Sud	Le 18. 27. 28 Janv., le 25 Mars, le 9. 12. 22. 23 Mai, le 5. 28 Juillet, le 23 Oct., le 22 Nov. . . .	12
SOu.	Le 1. 2. 3. 19. 25. 26 Janv., le 17. 18 Février, le 28 Mars, le 27. 31 Mai, le 9. 13. 14. 28 Juin, le 26. 29. 30. 31 Juillet, le 5 Août, le 20. 29 Sept., le 6. 9 Oct., le 8. 25. 28 Novbr. et le 4. 10. 11. 18. 19 Déc.	32
Ouest	Le 5. 24 Janv., le 28 Févr., le 7 Mars, le 14. 28. 30 Mai, le 8. 11. 12. 26 Juin, le 6. 25 Juillet, le 26 Sept., le 22. 24 Octobre, le 27 Novembre	17
NOu.	Le 4. 17 Janv., le 8 Mars, le 17. 19. 20 Juin, le 9 Juillet, le 28 Sept., le 16. 26 Oct., le 26 Nov. et le 26. 27 Déc.	13
		103

Direction	Parmi ces 103 jours de vent fort, ont été les plus orageux ceux du	Jours.
Nord	21 Mars	1
NE	2. 3 Mai, 10 Septembre	3
Est	10 Février	1
SE	1 Juin	1
Sud	27 Janvier, 9 Mai	2
SOu.	1 Janvier, 14 Juin, 20 Sept., 4 Déc. . . .	4
Ouest	28 Mai, 8 Juin, 27 Novembre	3
NOu.	4 Janvier, 20 Juin, 28 Sept., 26 Déc. . . .	4
		19

IV. Atmosphère.

Mois.	Ciel			Brouillard.	Pluie		Haut. de l'eau de pluie.	Neige	
	serein.	nuages.	couvert.		forte.	petite.		forte.	petite.
	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	Pouces.	jours.	jours.
Janvier	4	13	14	6	2	8	1 . 02	4	6
Février	6	7	16	7		2	0 . 12	2	12
Mars	16	11	4	7		1	0 . 04	1	4
Avril	8	18	4	8		5	0 . 28	2	8
Mai	9	18	4	1	6	12	1 . 46		
Juin	7	20	3	0	5	10	1 . 26		
Juillet	10	17	4	0	4	12	1 . 70		
Août	13	16	2	5	3	10	1 . 84		
Septembre	5	17	8	1	5	9	2 . 03		3
Octobre	2	12	17	7	3	17	1 . 19		6
Novembre	2	11	17	4		6	0 . 39	1	12
Décembre	2	13	16	11		0	0 . 0	2	13
A	84	173	109	57	28 | 92 = 120		9 . 63	12 | 64 = 76	
H	43	69	70	34	4 | 29 = 33		2 . 29	10 | 52 = 62	
E	46	100	38	14	26 | 70 = 96		7 . 78	0 | 9 = 9	

La dernière neige tomba le 18 Avril, et il recommença à neiger le 23 Septembre, après un intervalle de 159 jours.

Il gréla en 5 jours, le 28 Mai, le 1 et 20 Juin, le 20 Juillet et le 20 Septembre.

Le nombre des orages monte à 12. Il y en eut le 1. 5. 6. 7. 25 Juin, le 3. 4. 20. 21 Juillet et le 8 Août, le 20 Septembre et le 9 Octobre.

Le 6 Février, il y eut une foible lumiere boréale, et le 20 du même mois un paraselene.

La Néva debacla le 23 Avril, après avoir été couverte de glace pendant 134 jours. Baromètre au moment de la débacle 28 . 50. Thermomètre 147 à 142. Calme, brouillard, pluie, ensuite ciel à demi couvert. La rivière charia des glaces le 30 Avril, le 4 jusqu'au 11 Mai.

Les glaces réparurent le 21 Novembre avant-midi avec un vent du SE très-fort, le ciel étant serein. La Néva les charia ensuite en abondance, et en fût prise le 25 matin par un froid de 170°, Baromètre 28 . 77, ciel couvert et vent du Sud. L'intervalle de tems depuis la debacle en printemps et la prise a donc été cette année de 216 jours.

EXTRAIT
DES
OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES
FAITES À MOSCOU EN MDCCXCVI
D'APRÈS LE NOUVEAU STILE.

PAR

Mr. *le Conseiller d'Etat et Chevalier* STRITTER.

Présenté à l'Académie le 24 Août 1797.

I. Baromètre.

Les hauteurs extrêmes, la variation, le milieu et la hauteur moyenne du Baromètre, pour chaque mois de l'année 1796.

Mois.	Au plus haut		Au plus bas		Variation	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour, heure.	P. cent.	jour, heure.	cent.	P. cent.	P. cent.
Janvier	27.67	le 12 —	26.63	le 16 à 10 h. s.	104	27.15	27.13
Février	27.58	le 27 à 10 h. s. le 28 à 6 h. m.	26.75	le 18 à 10 h. s. le 20 à 6 h. m.	83	27.17	27.30
Mars	27.88	le 7 à 6 h. m.	26.25	le 21 à 10 h. s. le 22 à 6 h. m.	163	27.07	26.24
Avril	27.54	le 1. 2. 6 et 25	26.67	le 16 à 2 h. s.	87	27.10	27.20
Mai	27.42	le 20 à 2 h s.	26.75	le 11 —	67	27.09	27.10
Juin	27.34	le 1 —	27.00	le 19 — et le 22 à 10 h. s.	34	27.17	27.13
Juillet	27.29	le 27 à 2 h. s.	26.75	le 5 à 10 h. s. et le 6 —	54	27.02	27.06
Août	27.34	le 11. 12. 15. 19 et 20	27.08	le 8 après-m.	26	27.21	27.24
Septembre	27.42	le 1. 2. 20. 25 et 26	26.67	le 10 et 11	75	27.04	27.08
Octobre	27.50	le 29 et 30	26.54	le 1 à 6 h. m.	96	27.02	27.18
Novembre	28.08	le 22. 23 et 24	26.75	le 2 et 28	133	27.42	27.34
Décembre	27.84	le 29 et 30	26.67	le 1 —	117	27.25	27.14

1) La hauteur la plus grande du Baromètre a été

A. dans toute l'année depuis le 1 Janvier jusqu'au 31 Décembre 1796 = 28 , 08 en Novembre le 22 depuis 2 h. après-midi jusqu'à 10 h. du soir, le 23 toute la journée et le 24 6 h. du matin. Therm. 161 à 176°, vent du SE, nuages et ciel pour la plus part serein.

H. Pendant les six mois d'hyver, depuis le 1 Novembre 1795 jusqu'au 1 Mai 1796, ce qui fait un intervalle de 182 jours = 27 , 88 le 7 Mars 1796, à 6 h. du matin. Therm. 181°, vent fort du NOu, ciel serein.

E. Pendant les six mois de l'été suivant, depuis le 1 Mai, jusqu'au 1 Novembre 1796, ce qui fait un intervalle de 184 jours = 27 , 50 le 29 Octobre à 10 h. du soir jusqu'au 30 Octobre après-midi. Therm. 145 à 141°, vent du NOu, ciel parsémé de nuages.

2) La plus petite hauteur du Baromètre

A. 26 , 25 du 21 à 10 h. du soir jusqu'au 22 matin, du mois de Mars. Therm. 160 à 167°, vent très fort du NOu, nuages.

H. 26 , 25. Au mois de Mars, voyez ci-dessus.

E. 26 , 54. Le 1 Octobre à 6 h. du matin. Therm. 141°, vent très fort du NE, ciel demi couvert, pluie.

3) La variation totale en A = 1 , 83, en H = 1 , 63 , en E = 0 , 96.

4) Le milieu arithmetique en A = 27, 16 , en H = 27, 06, en E = 27 , 02.

5) La hauteur moyenne, ou la somme de toutes les hauteurs observées du Baromètre divisée par leur nombre : en A = 27 , 18 , en H = 27, 23 , en E = 27 , 135.

6) La variation totale a été la plus grande en Mars, savoir de 1, 63 et la plus petite en Août = 0, 26.

7) La hauteur moyenne a été la plus grande en Novembre = 27, 34, et la plus petite en Juillet = 27, 06.

II. Thermomètre.

1) Hauteurs extrêmes, leur différence, et l'état moyen du froid et de la chaleur pour chaque mois de l'année 1796.

Mois.	Hauteurs extrêmes.				Différence.	Etat moyen.	
	Au plus bas.		Au plus haut.			Froid moyen.	Chaleur moyenne.
	Degré.	Jour et heure.	Degré.	Jour et heure.	Degré	Degré.	Degré.
Janvier	175	le 18 à 6 h. s.	141	le 27 à 2 h. s.	34	159.2	152.1
Février	183	le 16 à 6 h. m.	146	le 2 à 2 h s.	37	165.4	157.8
Mars	181	le 7 à 6 h m.	141	le 29 à 2 h. s.	40	162.3	150.9
Avril	156	le 6 et 7 à 6 h. s.	126	le 30 à 2 h. s.	30	147.1	138.2
Mai	148	le 11 à 2 h. s.	112	le 23 à 2 h. s.	28	136.3	124.2
Juin	132	le 20 à 6 h. m.	105	le 4 à 2 h. s.	27	125.7	114.5
Juillet	131	le 12 à 10 h. s. et le 29 matin	106	le 28 à 2 h. s.	25	125.8	115.1
Août	135	le 28 à 10 h. m. et le 13 matin	106	le 5 à 2 h. s.	29	126.9	116.8
Septembre	154	le 28 à 6 h. s.	120	le 7 et 22 à 2 h. s.	34	140.4	130.7
Octobre	150	le 2. 21. 22. 27 à 6 h. m.	126	le 9 et 11 à 2 h. s.	24	144.5	139.2
Novembre	176	le 24. 26 à 6 h. m	142	le 1 à 10 h. s.	34	155.8	151.5
Décembre	178	le 28 et 29 à 6 h. m.	146	le 25 et 26 à 2 h. s.	32	164.4	159.0

2) Nombre des jours, auxquels le froid et la chaleur ont surpassé quelques divisions principales du Thermomètre de Délisle.

Mois.	Le froid a été plus grand que						La chaleur a été plus grande que						
	180 Jours.	170 Jours.	160 Jours	150 Jours.	140 Jours.	130 Jours.	110 Jours.	120 Jours.	130 Jours.	140 Jours.	150 Jours	160 Jours	170 Jours.
Janvier		5	16	25	31	31					15	25	30
Février	4	10	19	28	29	29					2	18	27
Mars	3	4	19	28	31	31					13	27	31
Avril				8	30	31			4	14	30	30	30
Mai					6	28		9	25	30	31	31	31
Juin						4	3	26	30	30	30	30	30
Juillet						2	2	27	31	31	31	31	31
Août						8	5	18	31	31	31	31	31
Septbr.				2	15	29		2	13	27	30	30	30
Octbr.				4	25	31			4	15	31	31	31
Novbr.		4	8	23	30	30					16	25	28
Décbr.		6	22	30	31	31					4	16	30

Résumé des observations sur le froid et la chaleur.

1) Le plus grand froid a été

en A . 183°, d'après Réaumur — 17∂, 6, le 16 Février à 6 h. matin, Baromètre 27 . 46, Vent NE, ciel en partie serein.

en H . 183°, d'après Réaumur — 17∂, 6, le 16 Février etc.

en E . 154°, d'après Réaumur — 2∂, 1, le 28 Sept. à 6 h. matin, Baromètre 27 . 25, Vent du NOu, ciel serein, ensuite parsémé de nuages.

2) La plus grande chaleur:
en A et en E . 105°, d'après Réaumur + 24∂, le 4 Juin à 2 heures après-midi, Baromètre 27 . 09, vent fort du SE, ciel parsémé de nuages, ensuite couvert.
en H . 134°, d'après Réaumur + 8∂, 5, le 2 Nov. 1795 à 2 heures après-midi, Baromètre 27 . 29, vent fort de l'Ouest, ciel en partie serein.

3) Le froid moyen, ou la somme de toutes les observations thermomètriques annotées le matin et le soir, divisée par leur nombre

en A . 146°, 1	d'après	Réaumur	2∂, 9	de chaleur
en H . 158°, 3	—	—	4∂, 4	de froid et
en E . 133°, 3	—	—	8∂, 9	de chaleur.

4) La chaleur moyenne, ou la somme de toutes les observations thermomètriques, faites à 2 heures après-midi, divisée par leur nombre

en A . 137°, 0	d'après	Réaumur	6∂, 7	de chaleur
en H . 150°, 7	—	—	0∂, 2	de froid et
en E . 123°, 4	—	—	14∂, 2	de chaleur.

5) Le mois le plus froid a été celui de Février, et le mois le plus chaud, celui de Juin.

6) Le froid a été (ou le Thermomètre à 6 heures du matin et à 10 heures soir)

en A .				en H .			
7	jours	entre	180 et 190	9	jours	entre	180 et 190
22	—	—	170 et 180	22	—	—	170 et 180
55	—	—	160 et 170	45	—	—	160 et 170
64	—	—	150 et 160	57	—	—	150 et 160
79	—	—	140 et 150	48	—	—	140 et 150
57	—	—	130 et 140	1	—	—	130 et 140
82	—	—	120 et 130				
			degrés.				degrés.

en E . 6 jours entre 150 et 160
40 — — 140 et 150
56 — — 130 et 140
82 — — 120 et 130

7) La chaleur, ou le Therm. à 2 h. après-midi, a été

en A .				en H .			
10	jours	entre	110 et 100	4	jours	entre	130 et 120
72	—	—	120 et 110	14	—	—	140 et 130
56	—	—	130 et 120	71	—	—	150 et 140
40	—	—	140 et 130	58	—	—	160 et 150
36	—	—	150 et 140	27	—	—	170 et 160
51	—	—	160 et 150	8	—	—	180 et 170
35	—	—	170 et 160				degrés
6	—	—	180 et 170				
			degrés				

en E . 10 jours entre 110 et 100
72 — — 120 et 110
52 — — 130 et 120
30 — — 140 et 130
20 — — 150 et 140
degrés.

8) Il a gélé en A . . 148 jours, en H . . 133 jours, en E . . 6 jours. Il a gélé continuellement

en A . . 102 jours, en H . . 93 jours, en E . . 0 jour. Il n'a gélé point du tout

en A . . 218 jours, en H . . 49 jours, en E . . 178 jours.

9) La première gélée en H a été observée le 30 Sept. 1795, et il a gélé pour la dernière fois le 21 Avril, ce qui donne la durée d'hyver de 204 jours.

10) La dernière gélée en E ayant été le 21 Avril, il a recommencé a géler le 13 Septembre et la duré de l'été est de 145 jours.

III. Vent.

Rapport de la force des vents et des quatre plages.

Mois.	Calme.	Vent mediocre	Vent fort	Vent très-fort	Degré de force	Rapport des quatre plages			
						Nord	Est	Sud	Ouest
	jours.	jours.	jours.	jours.		jours.	jours.	jours.	jours.
Janvier	2	4	20	6	442	12	1	3	15
Février	2	15	9	3	317	6	8	9	6
Mars	1	9	16	5	397	13	3	7	8
Avril	5	13	11	1	277	13	4	9	4
Mai	0	0	23	8	500	9	6	9	7
Juin	0	0	23	7	493	16	4	6	4
Juillet	0	2	24	5	451	13	2	3	13
Août	0	1	26	4	445	13	3	8	7
Septembre	0	2	14	14	573	13	3	4	10
Octobre	1	1	26	3	422	14	2	6	9
Novembre	0	4	23	3	414	5	10	9	6
Décembre	0	10	12	9	451	11	4	7	9
A	10	61	227	68	433	138	50	80	98
H	10	58	83	31	388	58	21	48	55
E	1	6	136	41	481	78	20	36	50

Le mois le plus venteux a été celui de Septembre, après lui succedent les mois de Mai et de Juin : celui d'Avril a été le plus calme et ensuite les mois de Février et de Mars.

Le vent le plus fréquent a été dans toute l'année celui du Nord, il a surtout dominé en Juin. Le vent de l'Est s'est fait sentir le plus au mois de Novembre, celui du Sud en Avril et en Mai et celui de l'Ouest en Janvier.

IV. Atmosphère.

Mois.	Ciel			Brouillard.	Pluie		Neige	
	serein.	nuages.	couvert.		copieuse.	médiocre.	copieuse.	médiocre.
	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janvier	1	6	24	2		5	1	14
Février	2	7	20	5		0	2	13
Mars	5	10	16	1		2	2	12
Avril	0	5	25			8	3	5
Mai	4	9	18		8	5	1	0
Juin	1	15	14		8	9		
Juillet	0	10	21	3	3	14		
Août	1	10	20	0	7	15		
Septembre	1	7	22	1	7	9		
Octobre	0	3	28	5	2	22		6
Novembre	0	5	25	4		5	5	15
Décembre	1	4	26	1		3	5	14
A	16	91	259	22	35 | 97 = 132		19 | 79 = 98	
H	11	42	129	10	1 | 28 = 29		12 | 61 = 73	
E	7	54	123	9	35 | 74 = 109		1 | 6 = 7	

La dernière neige tomba le 11 Mai, et il recommença à neiger le 1 Octobre, après un intervalle de 143 jours.

Il gréla en 2 jours, le 19 et 24 Mai. Le nombre des orages monte à 14: le 7. 19 Mai, le 4. 10. 19. 25 Juin, le 6. 7. 22. 29 Juillet, le 14. 21. 28 Août. Il fit des éclairs, le 6 Mai, le 3. 9 Juin, le 22 Août et le 22 Septembre.

Il y eut 5 parhélies, le 17. 18 Janvier, le 12 Février, le 23 Novembre et le 15 Décembre. Enfin 2 parasélenes, le 18 Janvier et le 12 Avril.

Si l'on compare ces observations avec celles qui dans la même année ont été faites à St. Pétersbourg, on en tire les conclusions suivantes.

I. La hauteur du Baromètre est environ, tantôt plus tantôt moins petite d'un pouce, à Moscou qu'elle ne l'est à St. Pétersbourg. Cette différence est pour les plus grandes hauteurs presque toujours plus grande qu'un pouce et sa valeur moyenne $1\frac{7}{100}$ ou $12\frac{8}{10}$ lignes. Pour les plus petites hauteurs elle est communement moindre qu'un pouce et sa valeur moyenne $\frac{79}{100}$ ou $9\frac{1}{2}$ lignes. Mais les milieux arithmétiques, ainsi que les hauteurs moyennes, différent, en prenant un milieu entr'eux, de $\frac{33}{100}$ ou de $11\frac{1}{10}$ lignes, dont ces hauteurs sont à Moscou plus petites qu'à St. Pétersbourg. Si sur une hauteur de 27 pouces du Baromètre, on voudra employer cette dernière différence, pour en calculer l'élévation de Moscou au-dessus du niveau de St. Pétersbourg, on trouvera d'après la regle de Mr. Deluc $145\frac{4}{5}$ toises de France ou $133\frac{1}{3}$ sagènes de Russie; et en y apportant une correction négative qui répond au milieu des

hauteurs moyennes du Thermomètre, observées dans ces deux villes capitales, cette élévation se reduit à 121 sagènes de Russie. Cette détermination, quoiqu'elle soit fondée sur des suppositions dont on ne sauroit attester la précision mathématique, n'implique aucune contradiction, n'étant point incompatible avec le cours des fleuves qui, sur une distance de plus de 700 verstes, pourroit très-bien subsister avec une élévation totale du terrein de cent toises et plus.

II. Il a fait presqu'aussi froid, et même quelques fois plus froid à Moscou qu'à St. Pétersbourg; mais le froid moyen au premier endroit a été moindre de plus d'un degré de Réaumur, et le nombre des jours où il a gelé plus ou moins fort, considérablement plus petit qu'à St. Pétersbourg; l'intervalle entre la première gelée en automne 1795 et la dernière au printemps 1796, ayant été presque de même durée.

III. La chaleur moyenne et la plus grande chaleur a été de 2 degrés de Réaumur plus grande à Moscou qu'elle ne l'a été à St. Pétersbourg. Le nombre des jours chauds, ainsi que celui des jours où il n'a gelé point du tout, a été considérablement plus grand, quoique dans l'un et l'autre endroit l'intervalle entre la dernière gelée en printemps et la première en automne se trouve être d'une égale durée.

IV. Il a fait beaucoup plus de vent à Moscou qu'à St. Pétersbourg. Le nombre des jours entièrement calmes a été considérablement plus petit, et celui des vents très forts au delà de trois fois plus grand au premier endroit qu'il ne l'a été à St. Pétersbourg.

V. Enfin il y a eu en cette année beaucoup moins de jours de ciel entièrement serein, et au delà de deux fois plus de jours de ciel entièrement couvert à Moscou qu'à St. Pétersbourg. Les brouillards ont été moins fréquens, et le nombre des jours de pluie et de neige ne diffère prèsque pas dans l'un et dans l'autre endroit, n'ayant été que de peu de jours plus grand à Moscou qu'il l'a été à St. Pétersbourg.

NATURAL HIST

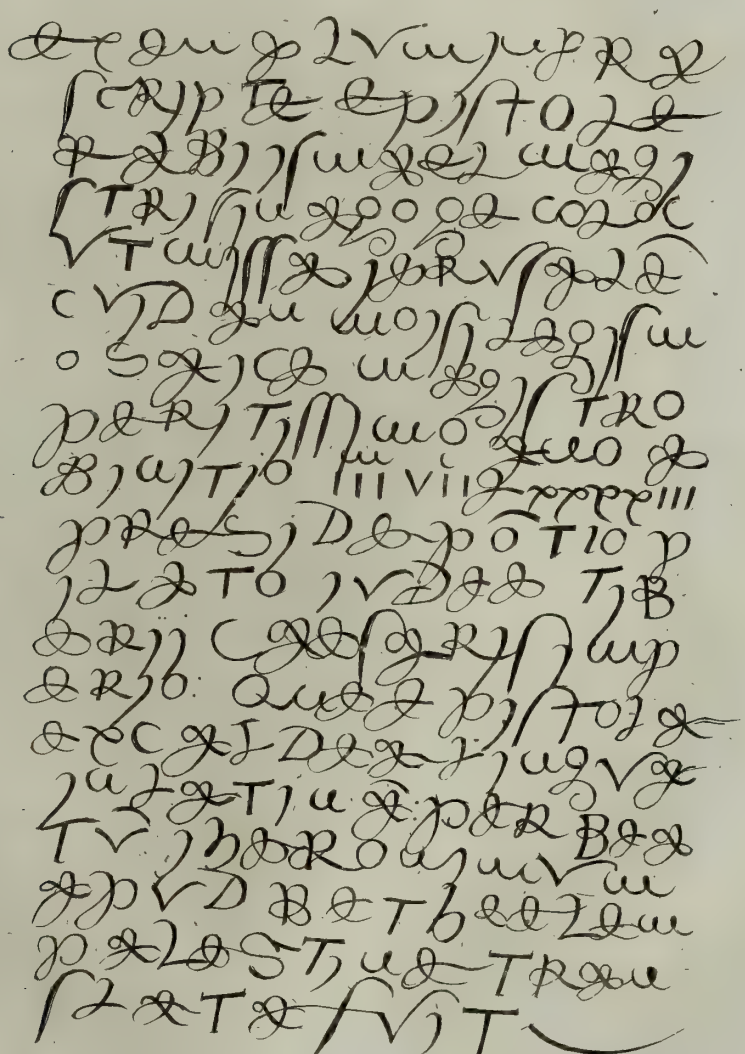
FAUTES À CORRIGER:

Dans le Tome XII.

Dans l'Histoire de l'année 1794, à la page 39, entre les lignes 17 et 18 il faut intercaler une ligne, savoir :

dans de l'acide muriateux, et en précipita le cuivre et l'étain.

NATURAL HISTORY.



NATURAL HISTORY

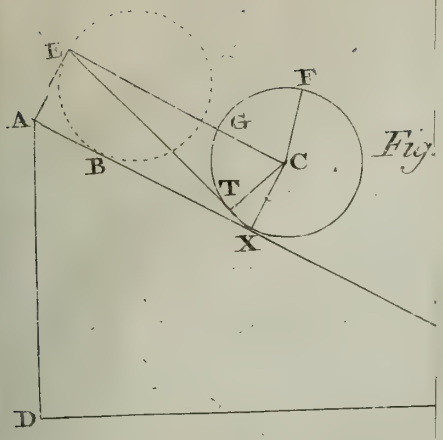


Fig.

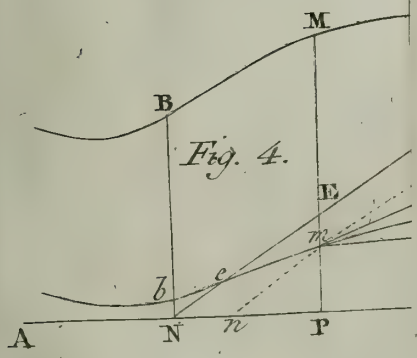
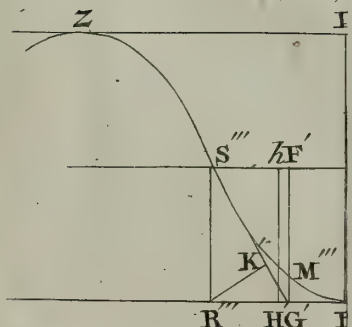


Fig. 4.



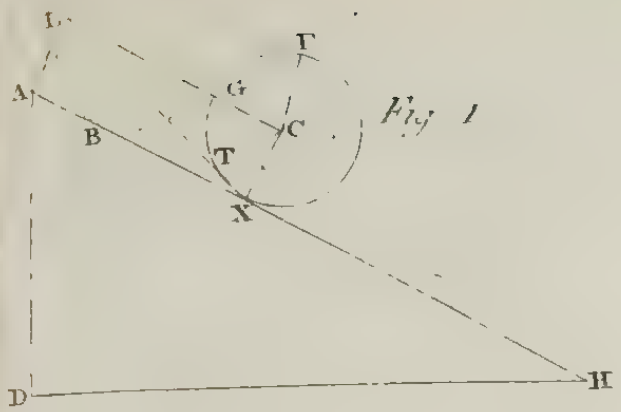


Fig. 1

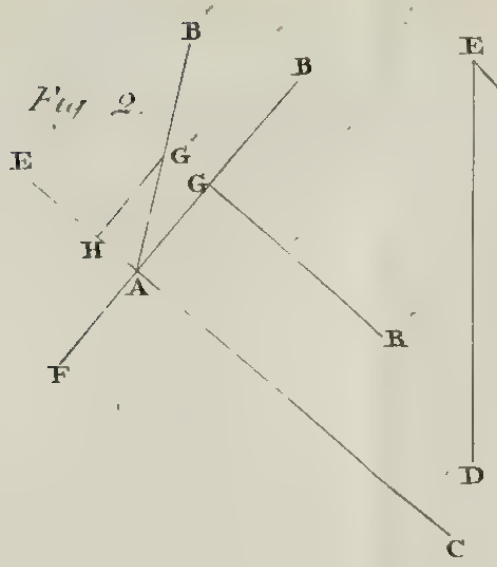
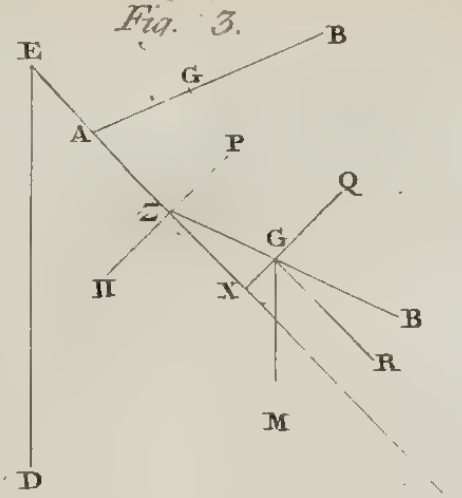


Fig. 2.

Fig. 3.



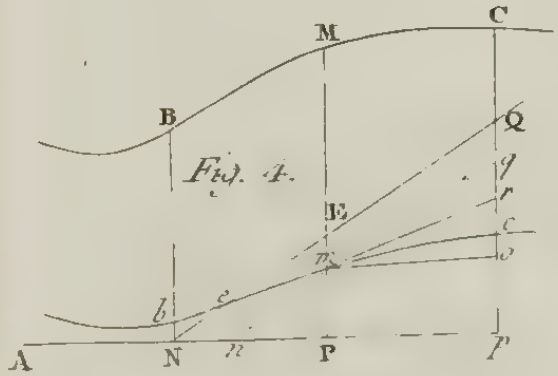


Fig. 4.

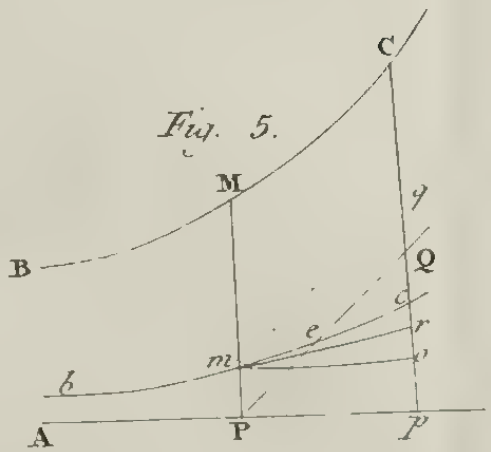


Fig. 5.

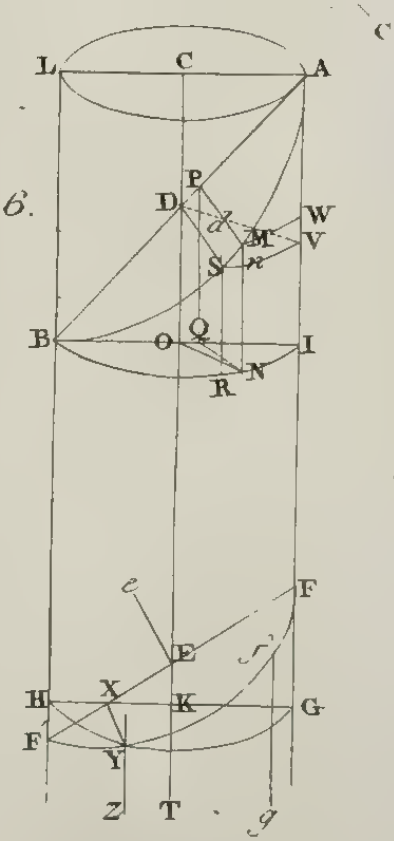


Fig. 6.

Fig. 7.

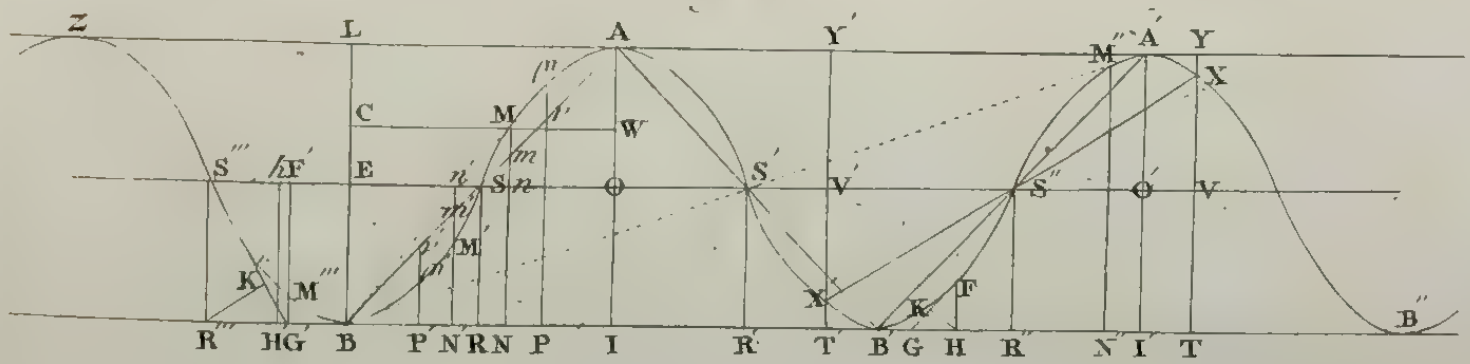


Fig. 1.

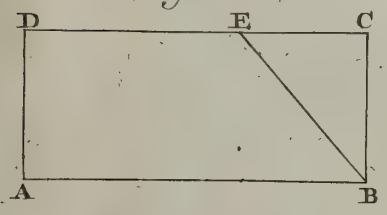


Fig. 2.

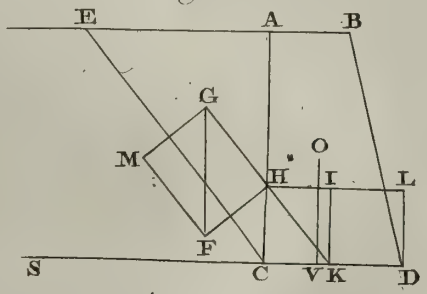
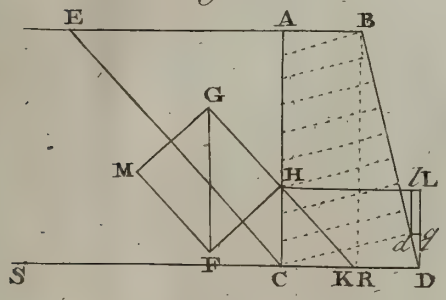


Fig. 3.



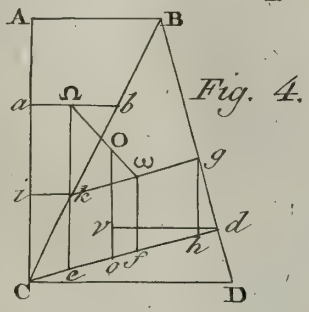
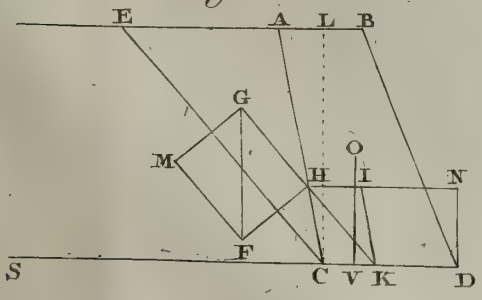


Fig. 4.

Fig. 5.



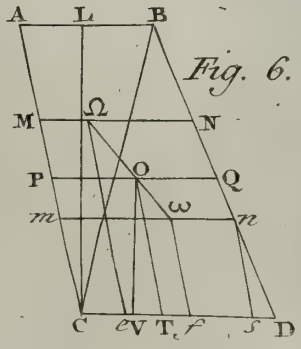


Fig. 6.

NATURAL HISTORY.

Fig. 1.

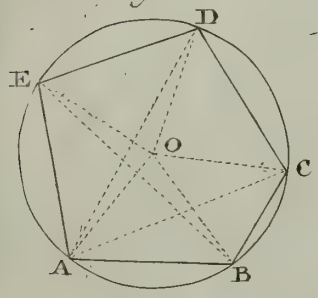


Fig. 2.

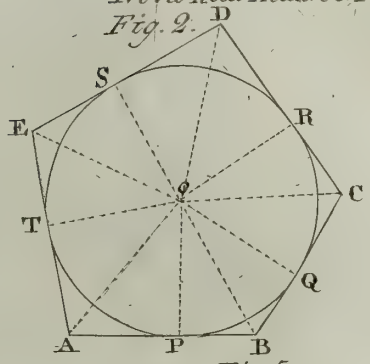


Fig. 6.

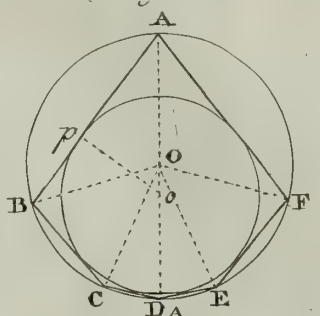


Fig. 4.

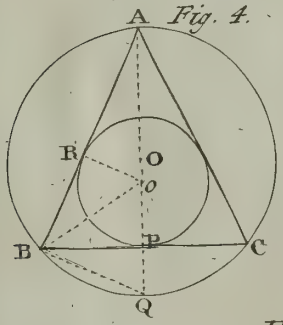


Fig. 5.

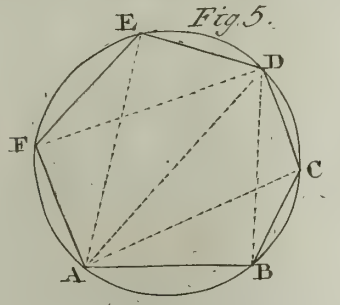


Fig. 3.

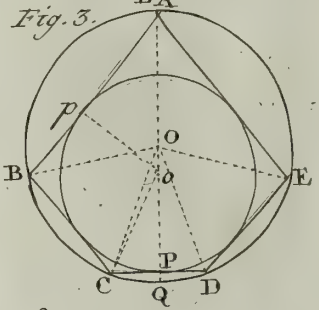


Fig. 7.

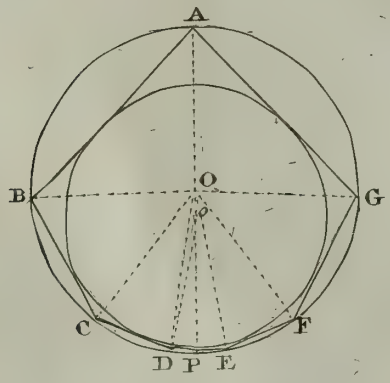
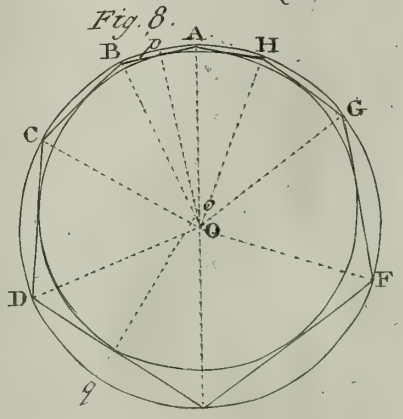


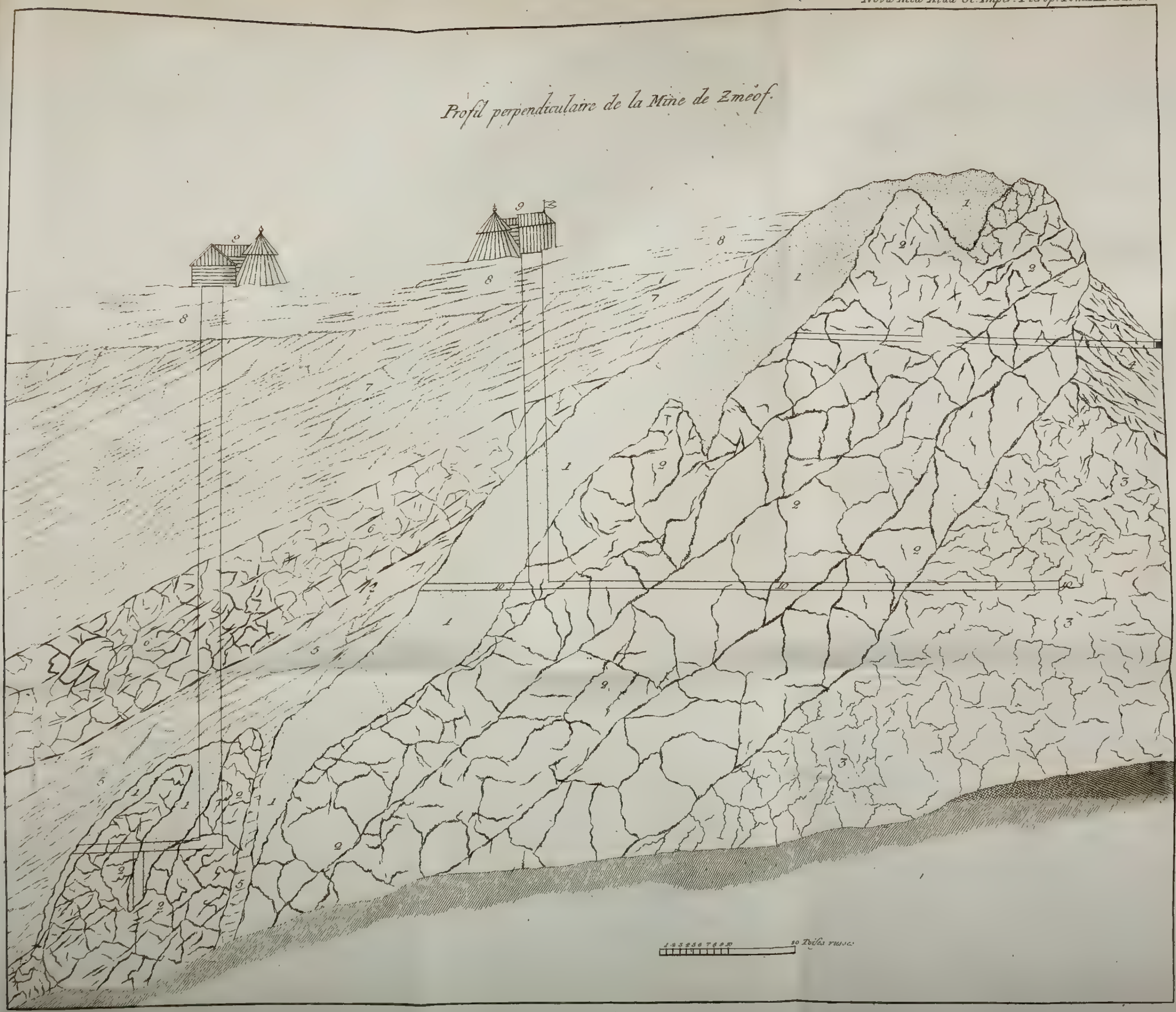
Fig. 8.

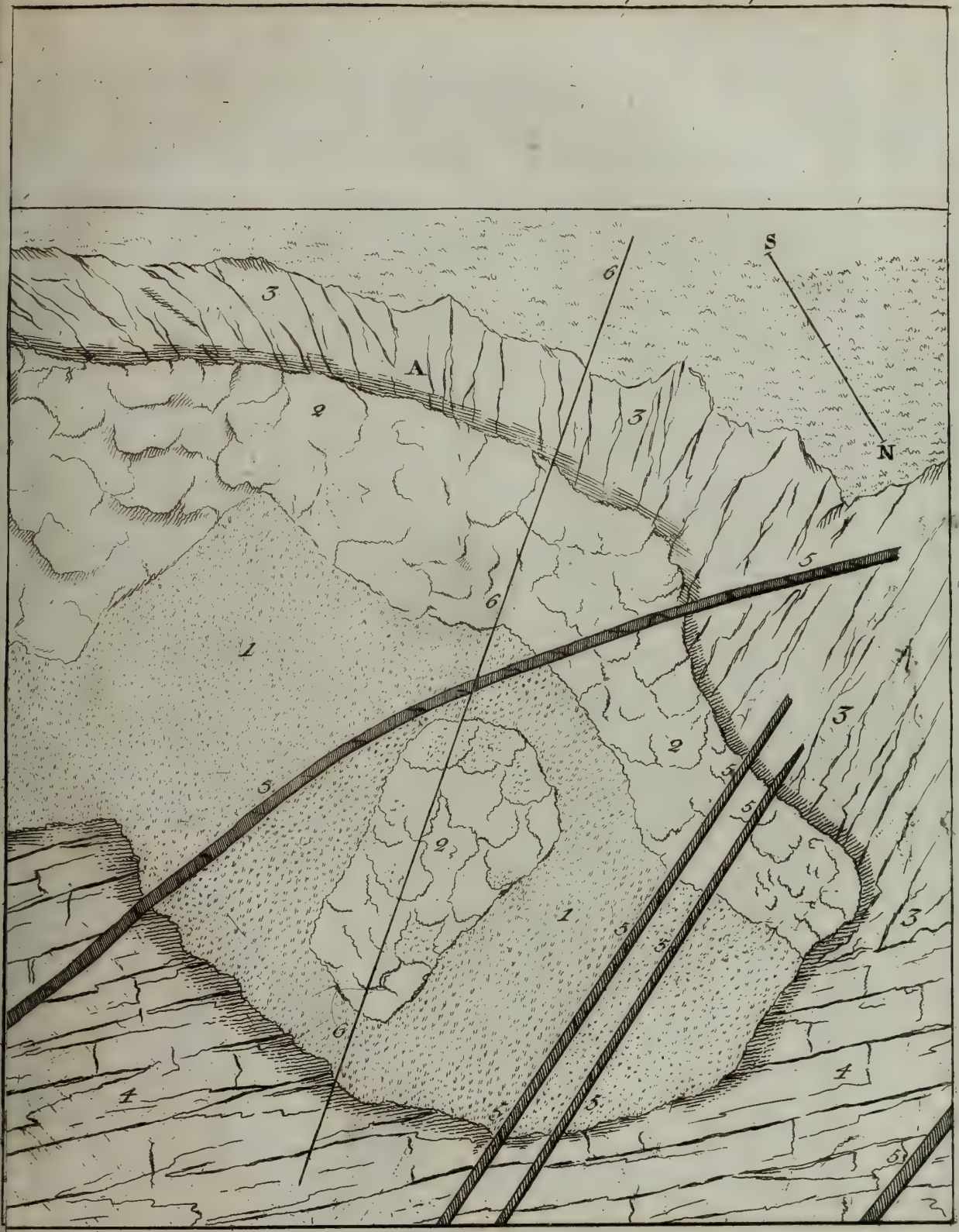


NATURAL HISTORY

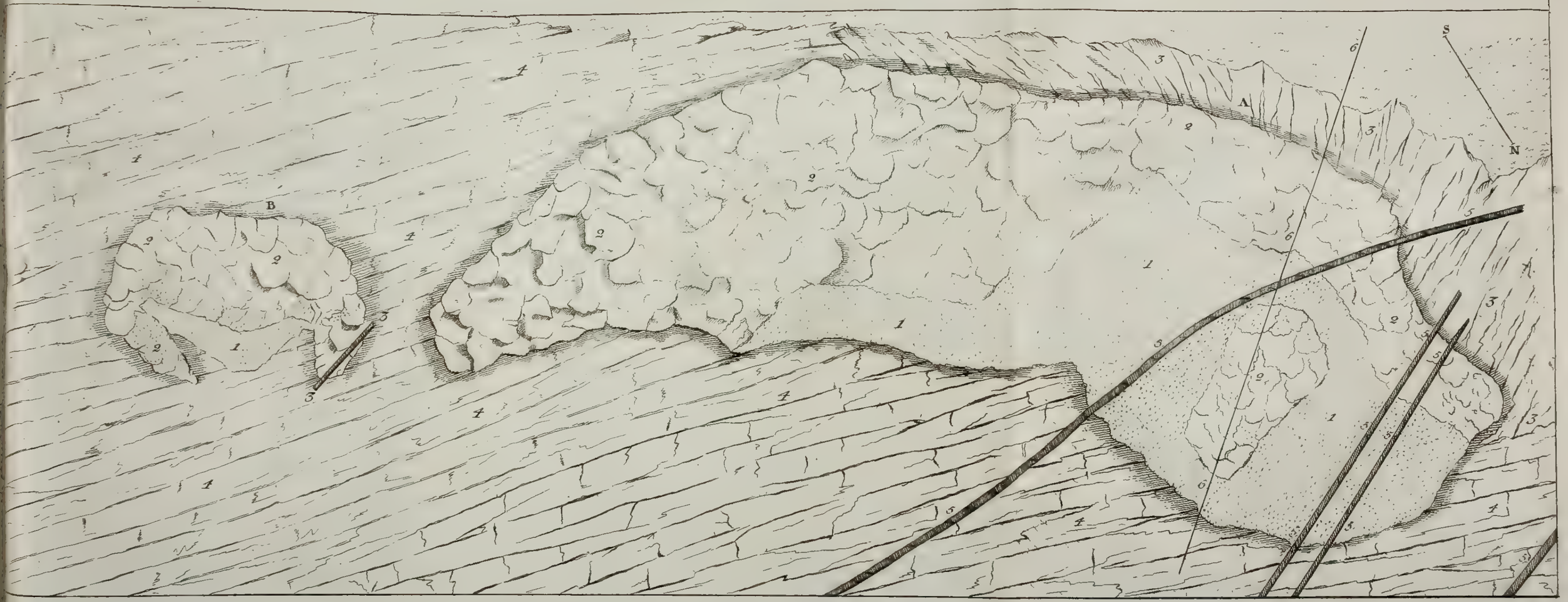
1
ol

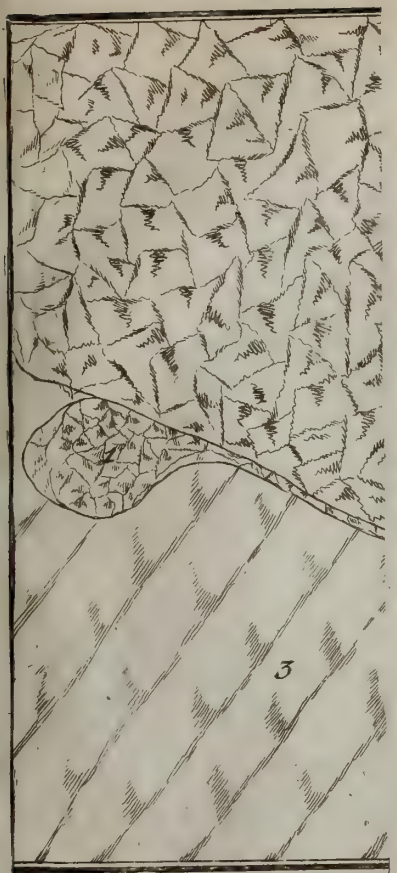
Profil perpendiculaire de la Mine de Zmeof.



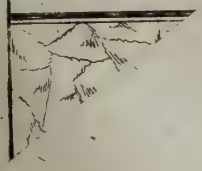

S
N
A
1
2
3
4
5
6

Profil horizontal de la Mine de Zmeof de la surface de la montagne.

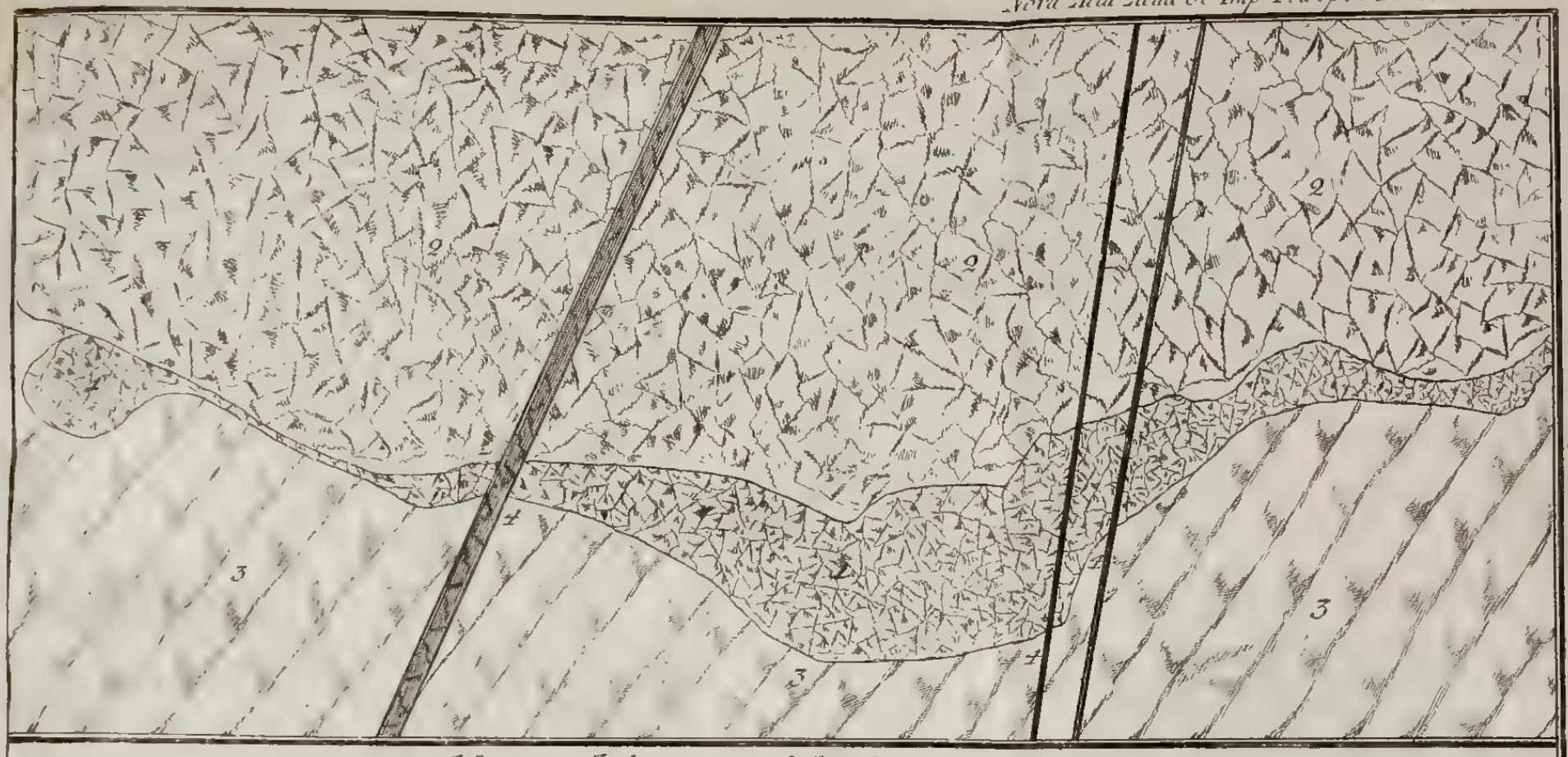




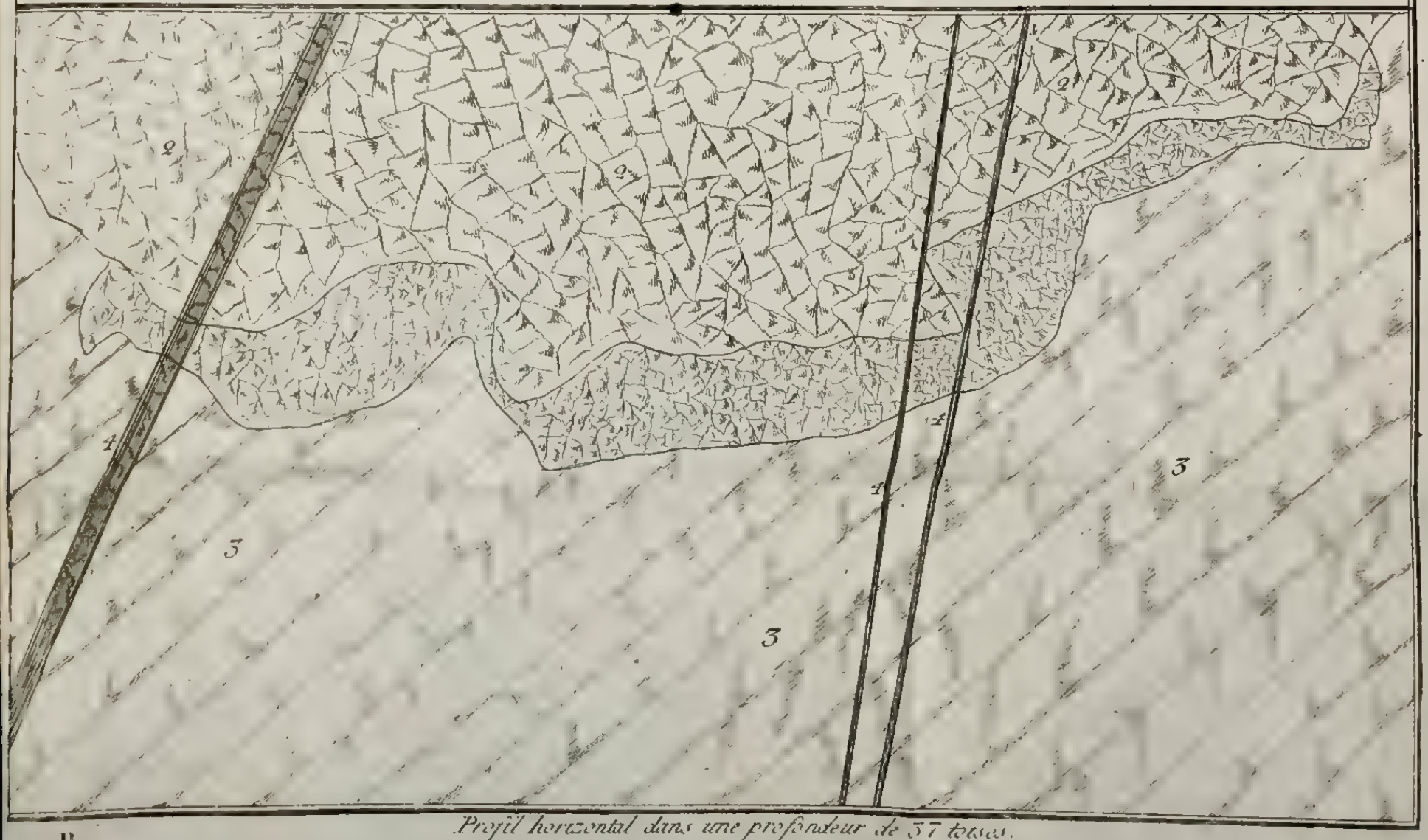
A.



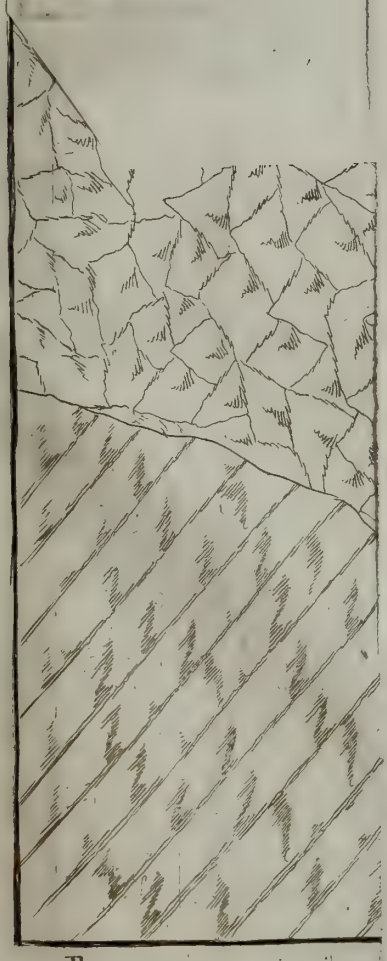
B



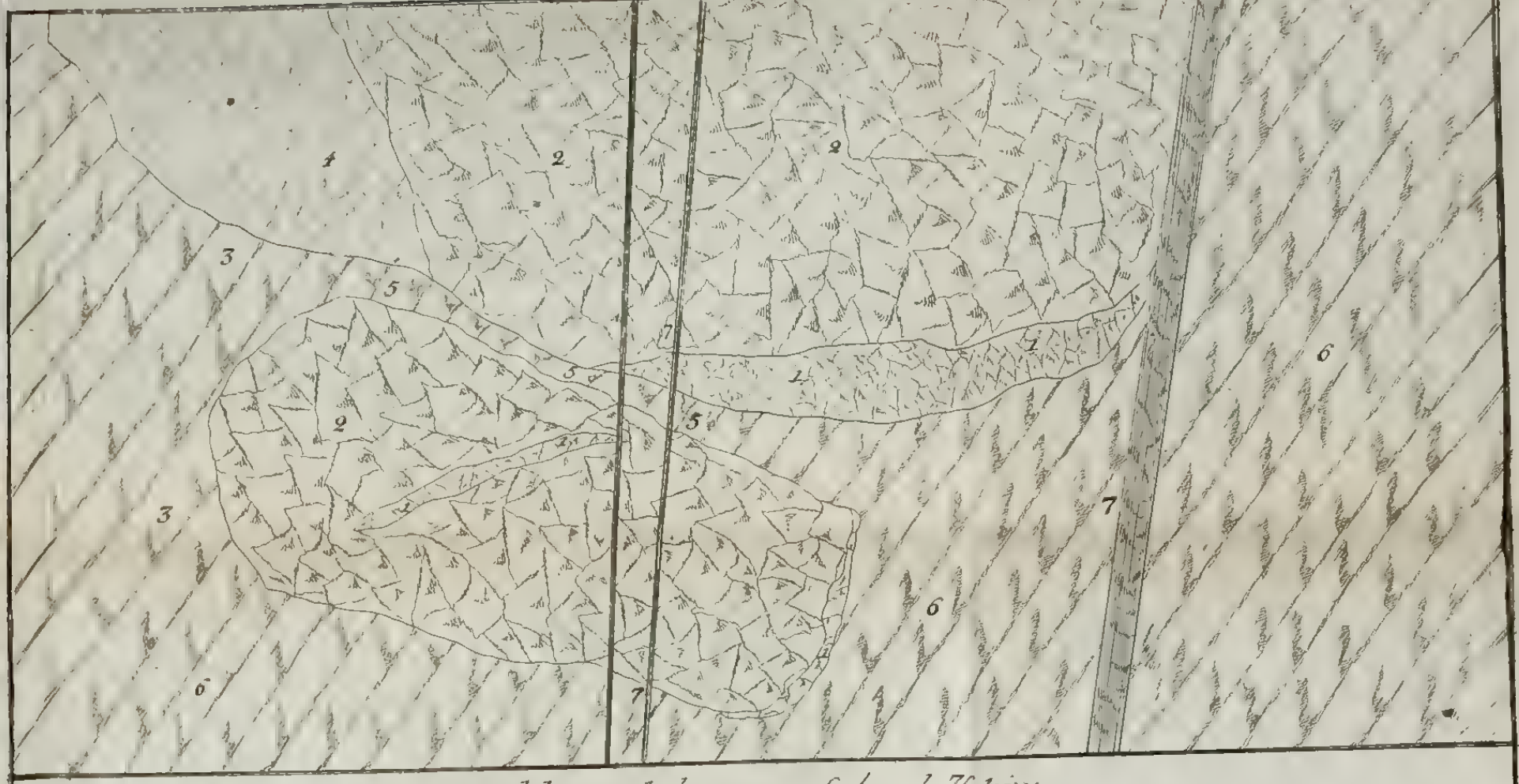
A. *Profil horizontal dans une profondeur de 29 toises*



B. *Profil horizontal dans une profondeur de 57 toises.*

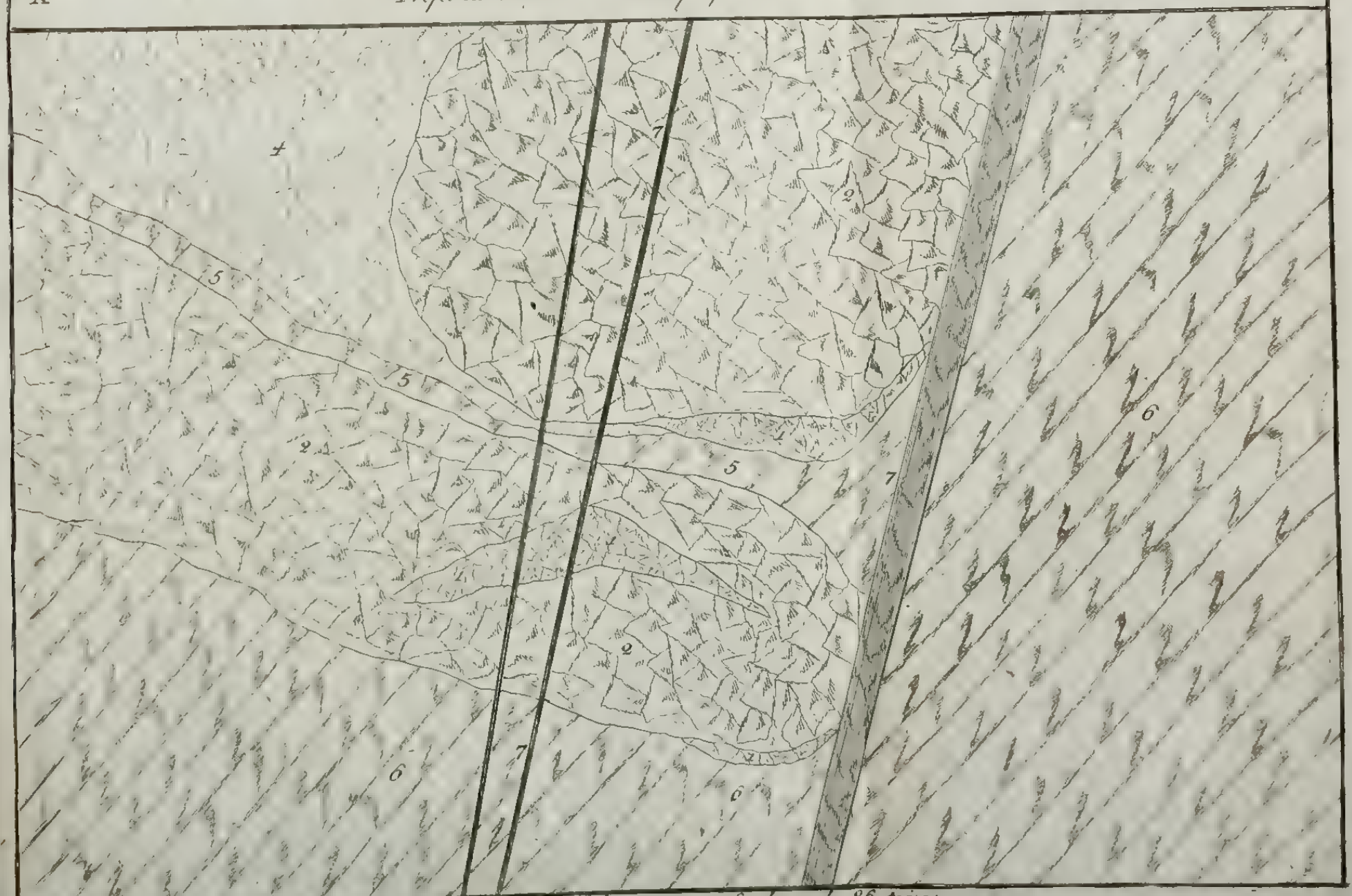


B



A

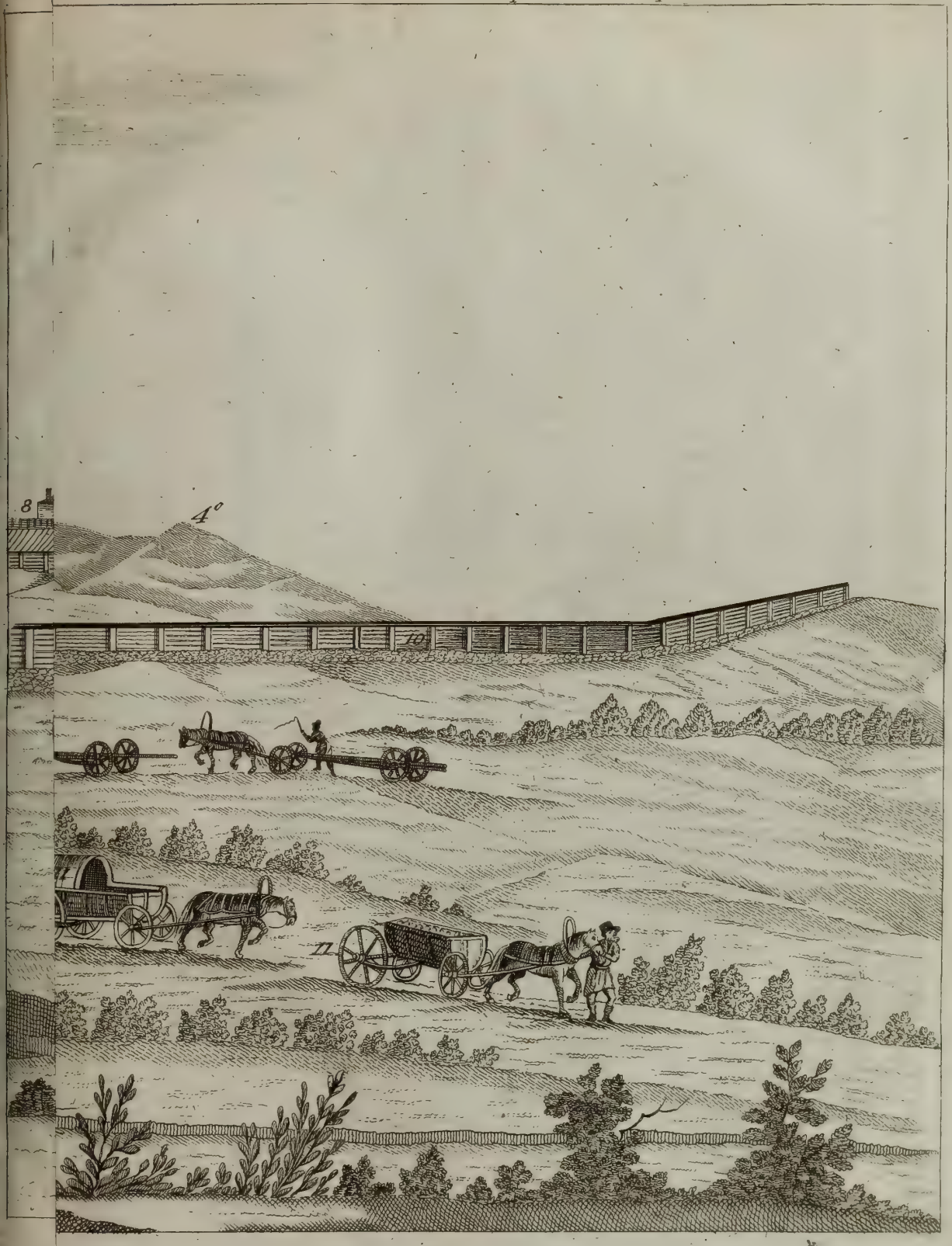
Profil horizontal dans une profondeur de 76 toises.



Profil horizontal dans une profondeur de 86 toises.

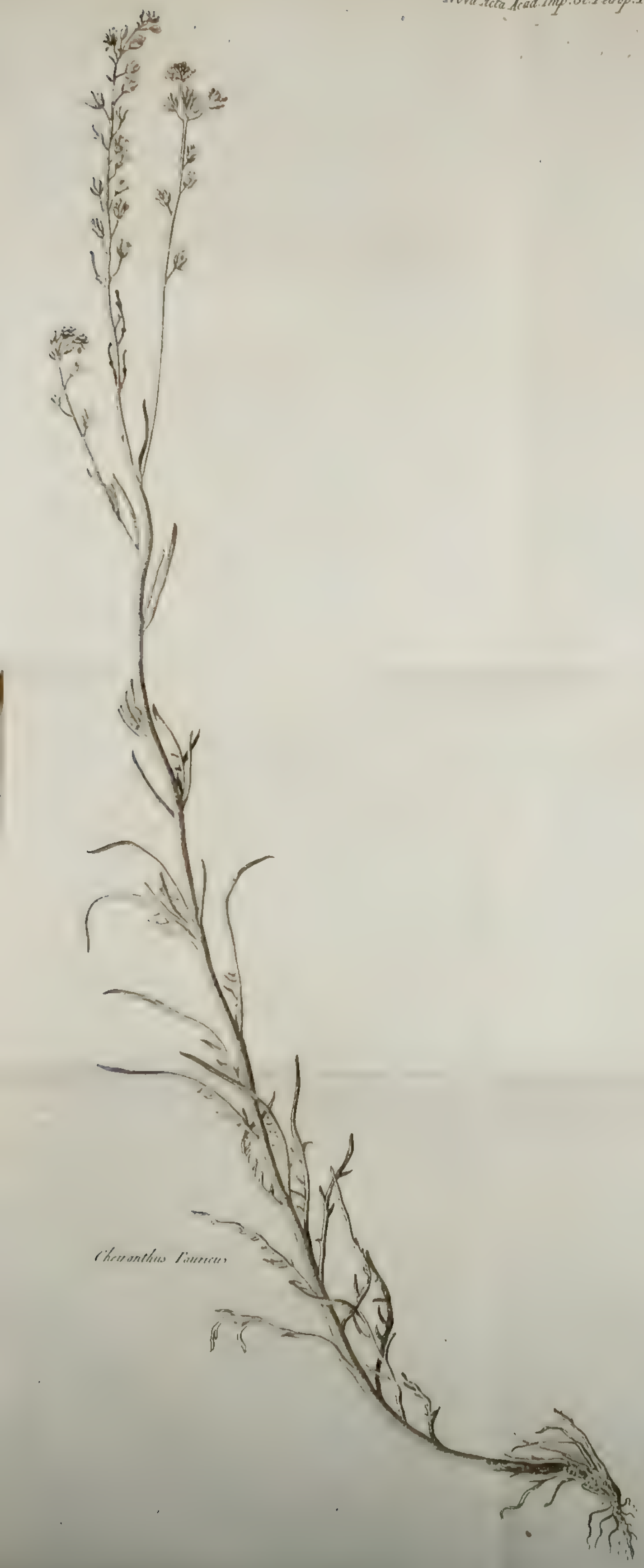
B

toises rufses.

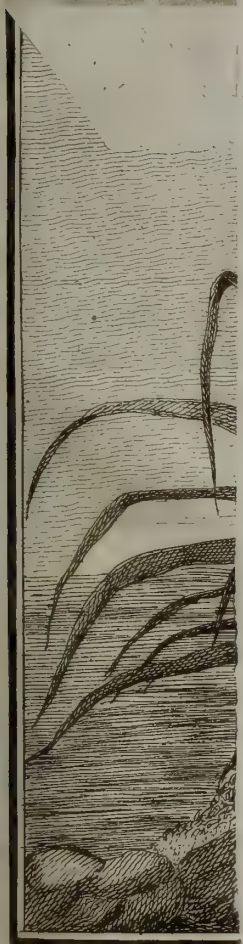

8
4°
10
11

Vue de la Mine de Zmeof.

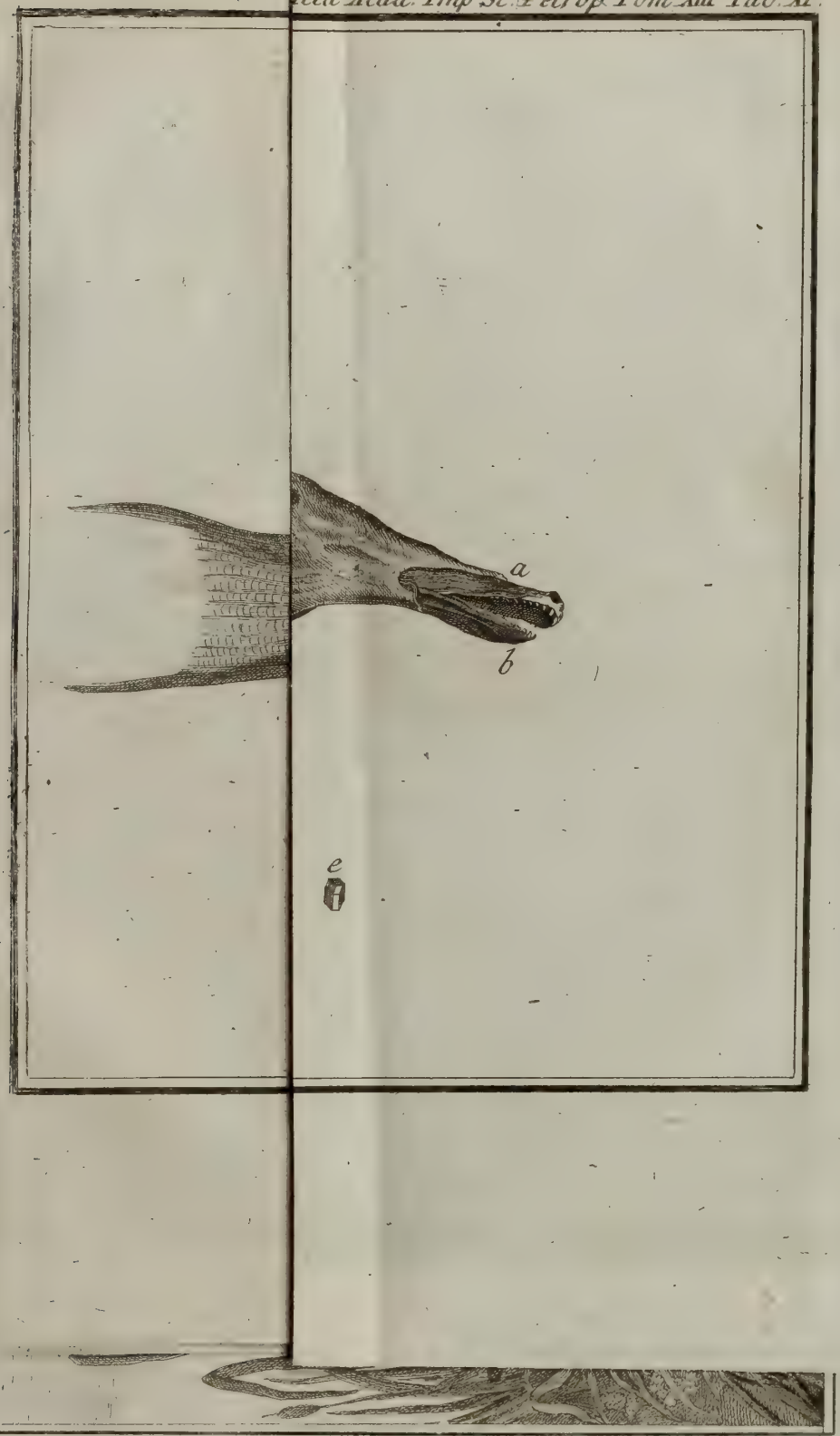
BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY



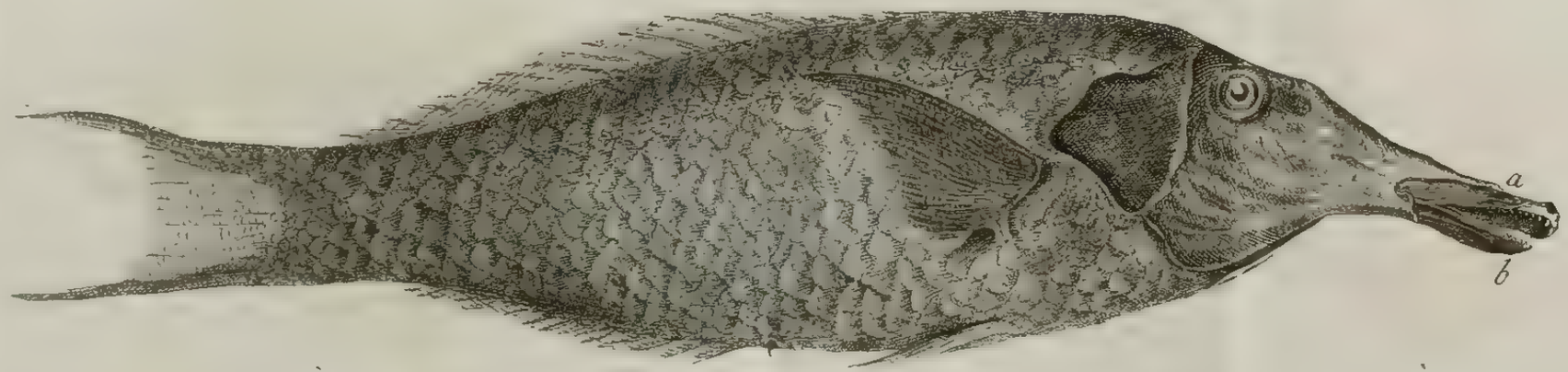
Cheiranthus Tauricus



Anas. Canagica


a
b
e

Sterna longirostris.



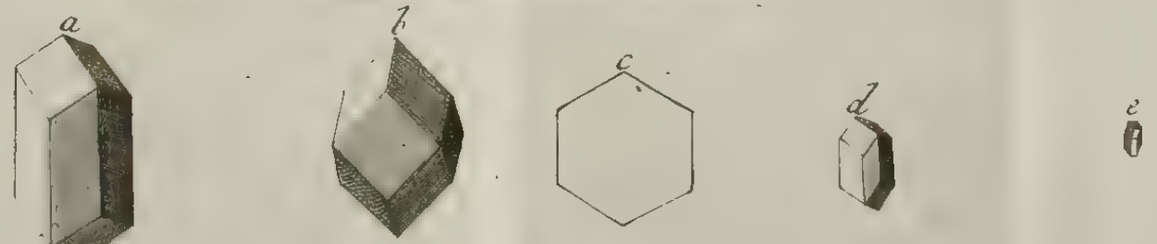


Fig. 2.
Morceau qui
couvre les Os

Fig 1. le

Fig 1. le morceau entier

Fig. 3.
le grand morceau où
les os traversent le bois

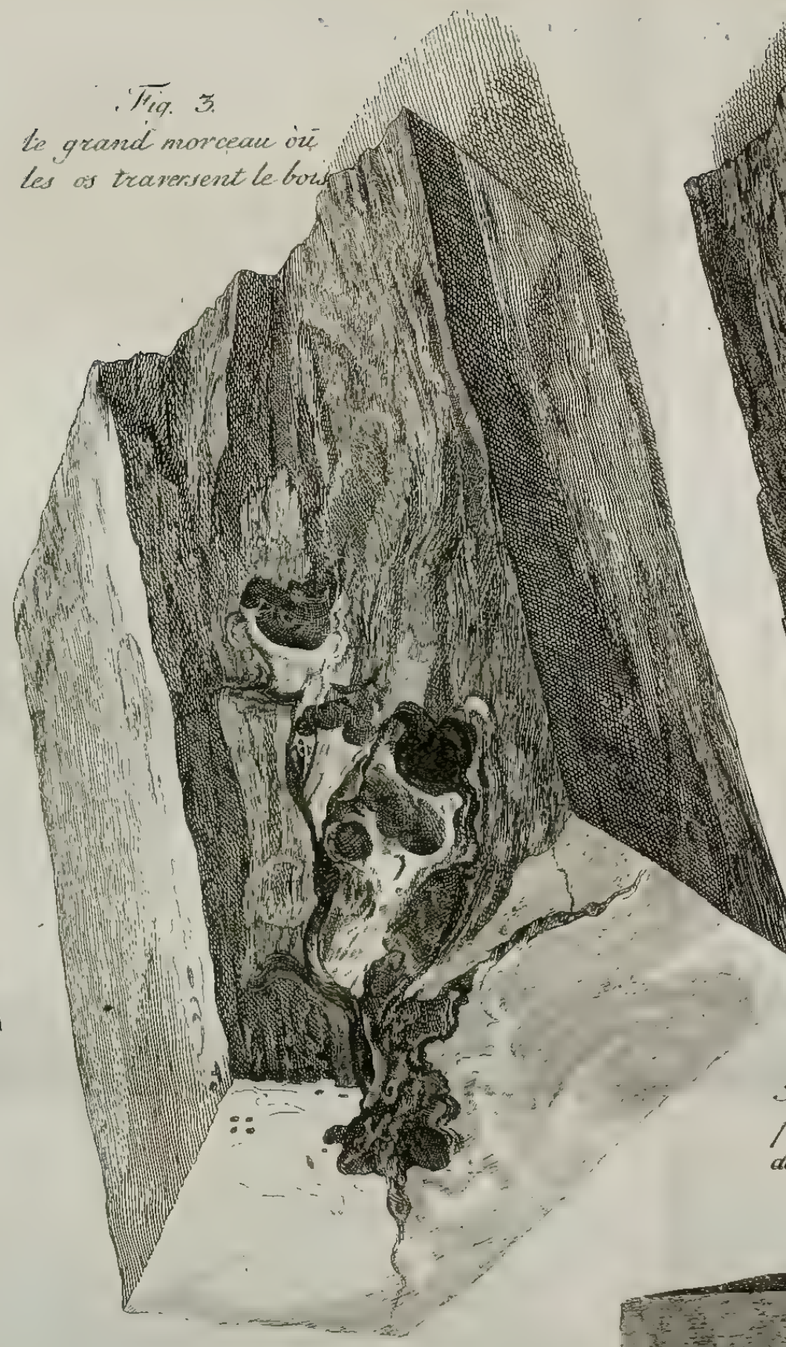


Fig. 2.
Morceau qui
couvre les Os

Fig. 4. Morceau tranché de la
fig. 3. dans le quel les bouts
des Os tranchés y restent.

1. Foetus Manati

2. Embrio Manati

BRITISH
MUSEUM
NATURAL HISTORY

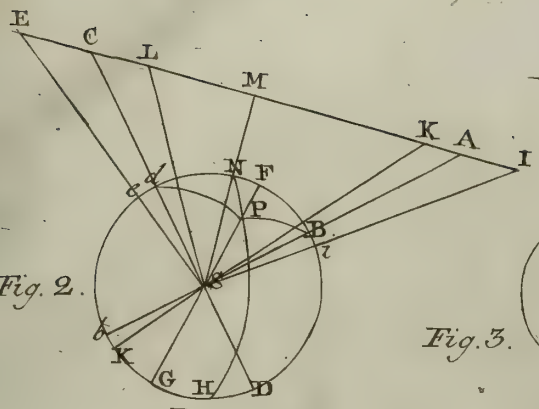


Fig. 2.

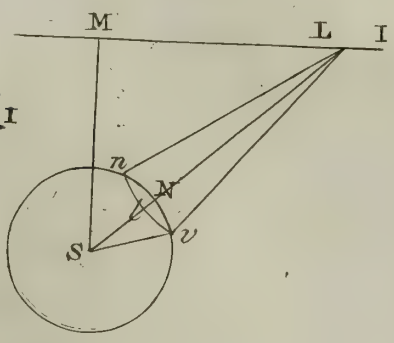


Fig. 3.

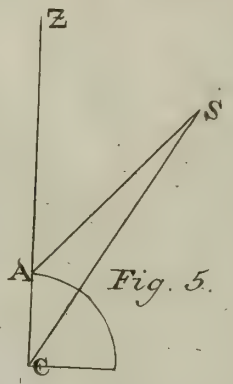


Fig. 5.

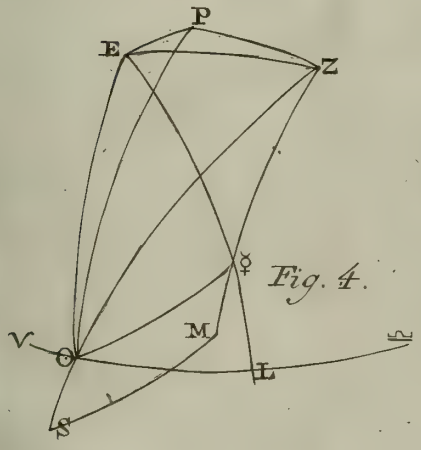


Fig. 4.

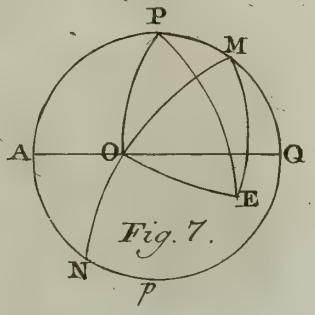


Fig. 7.

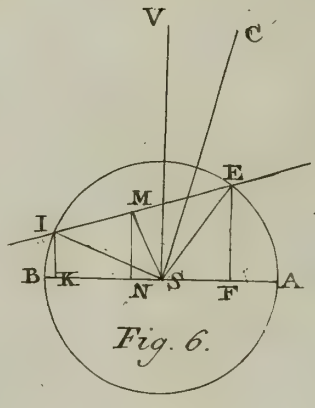
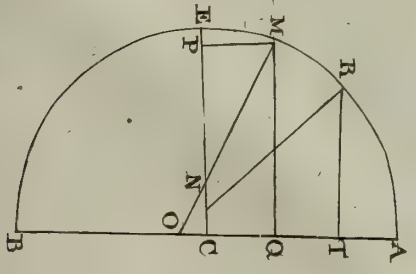


Fig. 6.

Fig. 8.



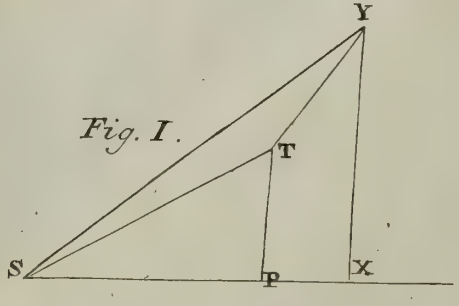


Fig. 1.

NATURAL HISTORY